Copie anonyme - n°anonymat : 813835

Z9-00076 813835 Maths S

Code épreuve : 295 **Nombre de pages :** 24 **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies - EM Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$\forall t \in [k ; k+1]$

$k \leq t \leq k+1$

Donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par croissance de l'intégrale sur $[k ; k+1]$ ($t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue),

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt$$

Donc $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k}$

b) Par sommation pour k allant de 1 à $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)($n>1$) dans l'inégalité a) on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où par la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

D'où par changement d'indice

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

D'où,

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq S_n - \frac{1}{n}$$

c) Comme $\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n)$

On a que :

$$S_n \leq \ln(n) + 1 \quad \text{et} \quad S_n \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$$

D'où $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

d) En divisant de part et d'autre par $\ln(n)$ ($\ln(n) > 0$ car $n \geq 2$), on obtient que

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Comme $1 + \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

par encadrement,

$$\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

2) a) L'appel rang(50) renvoie le premier rang n pour lequel $S_n > 50$

~~b) Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, $e^{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim}$~~

b) Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, on peut penser qu'elles croissent à la même allure. Comme $\exp(49) \simeq 1{,}91$

on peut donc penser que rang(50) renverra

$\ln(2)$ environ.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;x]$ où $x \in]0;1[$.

$$\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \cancel{= \sum_{k=0}^{n} t}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

b) Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k + \frac{t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

Donc, en intégrant de part et d'autre, il vient que

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k \, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt$$

D'où, par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k \, dt = \left[\ln(1-t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt$$

D'où,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt$$

Donc, $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt$

(par changement d'indice)

c) $\forall t \in [0;x]$, $(x \in]0;1[)$

$1-t > 0$ et $t^n > 0$

Donc $t \mapsto \dfrac{t^n}{1-t}$ est positive sur $[0;x]$

Donc $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt$

De plus $\forall t \in [0;x]$,

$\dfrac{1}{1-t} \leq 1$

D'où $\displaystyle \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt \leq \int_0^x t^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$

Donc $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt < \frac{1}{n+1}$

Copie anonyme - n°anonymat : 813835

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 295	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023
	Épreuve de : Mathématiques - EM Lyon		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

D'où par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

d) Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \lim_{n \to +\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Exercice 2 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. $Z_n(\Omega) =]0;1[$

$\circ$ $\forall x \in]0;1[$,

$F_n(x) = P(\min(X_1 \dots X_n) \leq x)$

$= 1 - P(\min(X_1 \dots X_n) > x)$

$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= 1 - (1-x)^n$ par indépendance de $X_1 \dots X_n$ (car $\forall k \in [\![1;n]\!]$; $\forall x \in]0;1[$, $P(X_k \leq x) = x$)

• $\forall x \leq 0$,
$F_n(x) = 0$

• $\forall x \geq 1$
$F_n(x) = 1$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

~~car~~ (les inégalités deviennent strictes car de toute manière F_n est continue en 0 et en 1)

b) La fonction de répartition F_n est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ de manière évidente.

$\lim_{x \to 0^+} F_n(x) = 0 = F_n(0)$ et $\lim_{x \to 1^-} F_n(x) = 1 = F_n(1)$

~~donc~~ F_n est continue sur $\mathbb{R}$

De plus, F_n est une différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
($x \mapsto 1-(1-x)^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$)
Donc F_n est la fonction de répartition d'une variable à densité.

c) En dérivant F_n on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [0;1] \\ n(1-x)^{n-1} \text{ si } x \in [0;1] \end{cases}$$

2) return (min (random (10)))

3) Si $x \in [0;1]$, $1-x \in [0;1]$

~~On suppose que $x \neq 1$~~

~~alors~~ : $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \in [0;1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

car $(1-x)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ si $x \in [0;1]$

Ainsi Z_n converge en loi vers la variable dont la fonction de répartition F est donnée par

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

4) a) $P(Z_n = X_n) = P(Z_n - X_n = 0)$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$,

$\mathcal{P}_n$: " $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$ "

Initialisation : $P(Z_2 = X_2) =$

b) $P(Z_n = X_n) = P(T_n = 0) = \frac{1}{n} \neq 0$

Donc T_n n'est pas à densité

c) def VarT(n) :

~~Z = min (random (n))~~

X = rd.random (n)
Z = min(X)
T = Z - X[n]

5) a) La variable T_{500} ne semble pas discrète car il semble ~~qu'il existe une fonction continue qui puisse~~ que l'on puisse tracer une droite qui passe par toutes les valeurs de la simulation sur la figure 1.

b) D'après 4) a), $P(X_n = Z_n) = P(T_n = 0) = \frac{1}{n}$

Il semblerait donc que $P(T_{500} = 0) = \frac{1}{500}$ c'est-à-dire une valeur très petite. Or, ici le rectangle le plus à droite (qui représente $[T_{500} = 0]$) semble indiquer que sur 500 simulations ~~de T~~, la valeur 0 serait apparue 50 fois, ce qui est très peu cohérent car la probabilité de cet évènement est très faible.

Problème :

Préliminaire :

1) $\text{Dim } \mathbb{R} = 1$ donc $\text{Dim}(E^*) = \text{Dim } E \times 1 = \text{Dim } E$

Bilan : $\text{Dim } E^* = \text{Dim } E$

Copie anonyme - n°anonymat : 813835

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 295	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023
	Épreuve de : Mathématiques - EM Lyon		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

2) a) φ est à valeur dans $\mathbb{R}$ donc, ~~$\text{Dim Im}(\varphi) \in \{0$~~

φ est soit de rang 0 soit de rang 1

b) ◦ On suppose que $\text{Rg}(\varphi) = 0$. Donc $\text{Im}(\varphi) = \{0_E\}$

Donc $\text{Ker}(\varphi) = E$ ~~(car d'après le théorème du rang si $\text{Rg}(\varphi) = 0$, $\text{Dim Ker}(\varphi) = n$ et comme $\text{Ker}(\varphi) \subset E$~~

(d'après le théorème du rang)

Donc φ est l'application nulle

◦ On suppose que $\text{Rg}(\varphi) = 1$

Donc comme $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ et $\text{Rg}(\varphi) = \text{Dim}(\mathbb{R})$

$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ donc φ est surjective

Bilan : φ est soit surjective soit nulle

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) On suppose que φ n'est pas nulle
Donc $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$
Donc par le théorème du rang, $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(\varphi) = n-1$

Donc si φ n'est pas nulle, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

Partie I :

3)a) Montrons que g est une forme linéaire.
- Tout d'abord, g va bien de E dans $\mathbb{R}$
- Montrons que g est linéaire

Soit $(P,Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$g(P+\lambda Q) = \int_0^1 (P+\lambda Q)(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 P(t) + \lambda Q(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 P(t)\,dt + \lambda \int_0^1 Q(t)\,dt$$

par linéarité de l'intégrale

$$= g(P) + \lambda\, g(Q)$$

Donc g est linéaire. Donc g est une forme linéaire

Bilan : $g \in E^*$

~~b) Soit P ∈~~

b) $\dim E = p+1$. D'après 2)c) comme g n'est pas l'application nulle ($g(X) = 1$ par exemple) alors $\dim \operatorname{Ker}(g) = p$

c) La famille $(Q_1 \dots Q_p)$ est libre car composée de polynômes de degrés 2 à 2 distincts
De plus, cette famille contient p éléments et $\dim \operatorname{Ker}(g) = p$.

Ainsi, $(Q_1 \dots Q_p)$ est une base de $\operatorname{Ker}(g)$

4) a) Montrons que f est linéaire. Soit $(P,Q) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0)$$
$$= f(P) + \lambda f(Q)$$

Donc f est une application linéaire.

Comme f va de E dans $\mathbb{R}$, $f \in E^*$

b) Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$
Donc $f(P) = 0$
Donc $P(0) = 0$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_p[X] \,/\, P(0) = 0\}$

5) a) On sait que $\underline{Ker(f) \subset Ker(g)}$
f et g sont non nuls donc $\underline{\dim Ker(f) = \dim Ker(g)}$

Donc $\underline{Ker(f) = Ker(g)}$

b) f n'est pas nulle donc $Im(f) \neq \{0_E\}$

donc : $\underline{\exists x_0 \in E \,/\, f(x_0) \neq 0}$ ~~(x_0 non nul~~

c) ~~On suppose x_0 non nul~~

- $\dim Ker(f) + \dim Vect(x_0) = n$

(car comme x_0 n'est pas nul, la famille (x_0) forme une famille libre de E et comme (x_0) est génératrice de $Vect(x_0)$, (x_0) est une base de $Vect(x_0)$ donc $\dim Vect(x_0) = 1$)

- De plus, soit $x \in (Ker(f) \cap Vect(x_0))$

Donc $f(x) = 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, x = \lambda x_0$

Donc $f(\lambda x_0) = 0$ et $x = \lambda x_0$

Donc $\lambda f(x_0) = 0$.

Or, $x_0 \notin Ker(f)$ par définition, donc $f(x_0) \neq 0$

Donc $\lambda = 0$
Or $x = \lambda x_0$
Donc $x = 0$

Donc, $\underline{Ker(f) \cap Vect(x_0) \subset \{0_E\}}$

Comme une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Vect}(x_0)$

Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

Donc d'après le théorème de Grassman,

$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$

d) Soit $x \in E$,

$h(x) = g(x_0) f(x) - f(x_0) g(x)$

◦ On suppose que $x \in \mathrm{Ker}(f)$:

Alors de manière évidente, $h(x) = 0$

◦ On suppose que $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; x = \lambda x_0$

Donc $h(x) = g(x_0) f(\lambda x_0) - f(x_0) g(\lambda x_0)$

$= \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0)$

$= 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi comme tout vecteur x de E se ~~compo~~ décompose (de manière unique) comme la somme d'un vecteur de Ker(f) et d'un vecteur de Vect(x_0), il vient que : ~~$\forall x$~~

$\forall x \in E, h(x) = 0$ donc h est nulle

e) Ainsi $g(x_0)f = f(x_0)g$ ~~$\iff f = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g$~~ ($f(x_0) \neq 0$)

$\iff g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f$ Donc f et g sont colinéaires

Partie II :

6) a) Soit ($e_1 \dots e_{n-1}$) est une base de H, où $H \subset E$

Donc ~~$\exists$~~ ($e_1 \dots e_{n-1}$) est libre dans E.

D'après le théorème de la base incomplète, $\exists e_n \in E$ /

($e_1 \dots e_{n-1}, e_n$) est une base de E

b) ~~Montrons~~ ~~Soit~~

($e_1 \dots e_n$) est une base de E. Or tout élément de E est une combinaison linéaire de vecteurs de la base de E. Donc φ va bien de E dans $\mathbb{R}$

Donc φ est correctement définie

- Soit $x \in H$

Donc $x = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k$ $(\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

Donc $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi(e_k)$ par linéarité de φ

$= 0$ car $\forall i \in [\![1 ; n-1]\!], \varphi(e_i) = 0$

Donc $H \subset Ker(\varphi)$

• Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$.

~~Donc $\varphi(x) = 0$~~

~~Or, $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_{n-2}) = 0$~~

Or $\text{Ker}(\varphi) = \{e_i \,;\, i \in [\![1 ; n-2]\!]\}$

Donc $x \in H$

Donc $\text{Ker}(\varphi) \subset H$.

Bilan : $\text{Ker}(\varphi) = H$

7) Soit $x \in \text{Ker}(f)$

Donc $f(x) = (0 \dots 0)$

Donc $(f_1(x) ; f_2(x) \dots f_p(x)) = (0 \dots 0)$

Donc $\forall i \in [\![1 ; p]\!],\ f_i(x) = 0$

Donc $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}\, f_i$

Donc $\text{Ker}(f) \subset \bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}(f_i)$

• Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}(f_i)$

Donc $\forall i \in [\![1 ; p]\!],\ f_i(x) = 0$

Donc $f(x) = 0$

Donc $x \in \text{Ker}(f)$

~~Donc Ker f~~ Donc $\bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f)$

Bilan : Par double inclusion, $\bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}(f_i) = \text{Ker}(f)$

8) a) On suppose que f est surjective.

Donc : $\forall (x_1 \dots x_p) \in \mathbb{R}^p$, ~~$\exists (x_1 \dots x_p) \in$~~
$\exists (u) \in E$ tel que

$f(u) = (x_1 \dots x_p)$ (tout p-uplet admet au moins un antécédent par f)

Si $(x_1 \dots x_p) = (1, 0 \dots 0) = \varepsilon_1$

Alors ε_1 admet un antécédent x par f

~~b) $\text{Dim } E^* = \text{Dim } E$ d'après 1).~~
~~Donc $\text{Card}(f_1 \dots f_p) = p = \text{Dim } E$.~~

b) Soit $(\lambda_1 \dots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0$$

Donc $\forall x \in E$,

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) = 0$$

~~Donc~~

Copie anonyme - n°anonymat : 813835

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 295	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023
	Épreuve de : Mathématiques - EM-Lyon		

9) a) f n'est pas surjective donc $m < p$

b) D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_{m+1} \dots e_p) \in \mathbb{R}^{p-m}$ tel que $(e_1 \dots e_p)$ forme une base de $\mathbb{R}^p$. Je n'aboutis pas.

10) a) On admet le résultat.

b) $\mathrm{Dim}\left(\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)\right) = \mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}(f) = n - \mathrm{Dim}\ \mathrm{Im}(f)$

Montrons que $\mathrm{Rg}(f) = p$.

On sait que f est surjective. Donc ?

Partie III.

11) a) f_a va bien de E dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f_a(x+\lambda y) = \langle a, x+\lambda y \rangle = \langle a ; x \rangle + \lambda \langle a, y \rangle$
$= f_a(x) + \lambda f_a(y)$

(par linéarité à droite du produit scalaire).

Donc f_a est linéaire.

Bilan : $f_a \in E^*$

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f_a)$

Donc $\langle x, a \rangle = 0$

Bilan : $\mathrm{Ker}(f_a) = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$

~~c) On suppose que $a = 0$~~

~~Donc $\forall x \in E$, $f_a(x) = \langle 0, x \rangle = 0$~~

~~Ainsi $\forall x \in E, f_a(x) = 0$. Donc f_a est l'application nulle~~

c) On suppose que f_a est l'application nulle.

Donc $\forall x \in E$, $f_a(x) = 0$

Donc $\forall x \in E$ $\langle a, x \rangle = 0$

Donc $a \perp x$, $\forall x \in E$

Donc $a \perp E$

Donc $a = 0_E$

Bilan : $f_a = 0 \implies a = 0_E$

12) a) Soit $(a,h) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Phi(a+\lambda h) = f_{a+\lambda h}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(a+\lambda h)(x) = f_{a+\lambda h}(x) = \langle x, a+\lambda h\rangle$$
$$= \langle x,a\rangle + \lambda\langle x,h\rangle$$
$$= f_a(x) + \lambda f_h(x)$$
$$= (\Phi(a) + \lambda\Phi(h))x$$

Ainsi $\Phi(a+\lambda h) = \Phi(a) + \lambda\Phi(h)$.

Donc Φ est linéaire.

b) Soit $a \in \operatorname{Ker}(\Phi)$

Donc $\Phi(a) = 0$

Donc $f_a = 0$

Donc $a = 0_E$ d'après 11) c)

Donc $\operatorname{Ker}(\Phi) \subset \{0_E\}$

Donc $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$ (car $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker}(\Phi)$)

Donc Φ est injective. Or E est de dimension finie donc Φ est bijective

De plus, $f_a \in E^*$ d'après 11) a)

Donc Φ est à valeur dans E^*

Bilan : Φ est un isomorphisme de E dans E^*

c)

13) a) ∘ $\langle , \rangle$ est bien une application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ donc $\langle , \rangle$ est <u>définie</u>

∘ Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$

$$\langle A ; B \rangle = Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB))$$

~~car la trace de la transposée est la même que~~

car $\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $Tr(A) = Tr({}^tA)$

$$\langle A, B \rangle = Tr({}^tBA) = \langle B, A \rangle$$

Donc $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ est <u>symétrique</u>.

∘ Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle A + \lambda B, C \rangle = Tr({}^t(A+\lambda B)C)$$

$$= Tr(({}^tA + \lambda {}^tB)C)$$

par linéarité de la transposition

$$= Tr({}^tAC) + \lambda \, Tr({}^tBC)$$

par linéarité de la trace

$$= \langle A, C \rangle + \lambda \langle B, C \rangle$$

Donc $\langle ; \rangle$ est <u>linéaire à gauche et par symétrie linéaire à droite</u>

Copie anonyme - n°anonymat : 813835

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques - EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

- Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ tel que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$

~~$Tr({}^tAA) = \sum$~~

On note $C = {}^tAA$ et $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} \times a_{kj}$$

$$Tr(C) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2 \geq 0$$ car une somme de carrés est toujours positive.

Donc $Tr({}^tAA) \geq 0$

On suppose que $Tr({}^tAA) = 0$

Donc, $$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2 = 0$$

Or une ~~somme~~ somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls

Donc $\forall (i,k) \in [\![1;p]\!]^2$, ~~$a_{ki}$~~ $a_{ki} = 0$

Donc $A = 0$

Donc $\langle \, ; \, \rangle$ est <u>définie positive</u>.

Bilan : L'application $\langle ; \rangle$ est un produit scalaire sur $M_p(\mathbb{R})$

b) On suppose que $\varphi \in E^*$.

On sait que $\forall x \in E$, $\exists !\, a \in E$ tel que

$\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ où E est un espace muni d'un produit scalaire.

~~Soit X = Mat~~

~~Soit~~ .

Ainsi comme $M_p(\mathbb{R})$ est muni d'un produit scalaire,

$\forall M \in E$; $\exists A \in E$ tel que

$\varphi(M) = \langle A ; M \rangle = Tr({}^tAM)$

Si on suppose A symétrique (${}^tA = A$) on a donc

que ~~il existe une~~

$\forall M \in M_p(\mathbb{R})$; $\exists A \in M_p(\mathbb{R})$,

$\varphi(M) = Tr(AM)$

Exercice 2 :

1) a) $P(Z_n = X_n) = P(\inf(X_1 \dots X_n) = X_n)$
$= P(\inf(X_1 \dots X_{n-1}) > X_n)$

$= 1 - P(Z_{n-1} - X_n \leq 0)$

$= 1 - \int_{-\infty}^{0} g_{n-1}(x)\,dx$

~~car X_n est indé~~ car Z_{n-1} et X_n sont indépendants

$= 1 - \int_{-1}^{0} 1-(-x)^{n-1}\,dx$

$\cancel{= 1 - 1 + \int_{-1}^{0} (-x)^{n-1}\,dx}$

$\cancel{= [}$

Or $\int_{-1}^{0} 1-(-x)^{n-1}\,dx = 1 - \int_{-1}^{0} (-x)^{n-1}\,dx$

$= 1 - \left[\frac{(-x)^n}{-(n)}\right]_{-1}^{0}$

$= 1 - \frac{1}{n}$

D'où $1 - \int_{-\infty}^{0} g_{n-1}(x)\,dx = \frac{1}{n}$

Bilan : $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$

Exercice 3 :

Partie II :

8) b) Soit $(e_1 \dots e_m)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. $(m \leq p-1)$.
Ainsi il existe $(e_{m+1} \dots e_p) \in \mathbb{R}^{p-m}$ tel que $(e_1 \dots e_p)$ forme une base de $\mathbb{R}^p$

Soit $H = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_{p-1})$. H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ et $\mathrm{Im}(f) \subset H$.

Ainsi il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$ tel que $\mathrm{Im}(f) \subset H$

12) c) Φ est bijectif donc : $\forall\, \varphi \in E^*, \exists!\, a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$

Donc $\forall x \in E$, $\Phi(a)(x) = \varphi(x)$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = \langle a ; x \rangle$

10) a). On suppose que $(f_1 \dots f_p)$ est libre. On sait que f est linéaire
f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$

Or $(f_1 \dots f_p)$ est libre dans E^*
Donc $\forall x \in E$, $(f_1(x) \dots f_p(x))$ est libre dans $\mathbb{R}^p$

Donc, comme $\mathrm{card}(f_1(x) \dots f_p(x)) = p = \mathrm{Dim}\, \mathbb{R}^p$

Il vient que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^p$ donc $(f_1 \dots f_p)$ libre $\Rightarrow$ f est surjective

b) Ainsi $\mathrm{Dim}\, \mathrm{Im}(f) = p$. Donc par le théorème du rang,
$\mathrm{Dim}\left(\bigcap_i \mathrm{Ker}\, f_i\right) = \mathrm{Dim}\, \mathrm{Ker}(f) = n-p$ (d'après 7)