Copie anonyme - n°anonymat :

Z1-00224 Maths S

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EML yon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

Soit $x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

(1.) (a.)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on considère $t \in [k, k+1]$

Alors, $\forall t \in [k, k+1]$, $k \leq t \leq k+1$

Par application de la fonction inverse ($k \in \mathbb{N}^*$) et continue sur $[k, k+1]$

$\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

Enfin, on intègre entre k et $k+1$ l'encadrement vis-à-vis de t.

Alors, $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = (k+1-k) \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

(b.)

Ensuite, on somme l'encadrement précédent sur k allant de 1 à $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Alors, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

on applique le changement d'indice à gauche $j = k+1$ et au centre par la propriété de Chasles, on a : On renomme le changement d'indice.

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

~~Puis $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = S_n - 1$ (la minoration vient de la positivité)~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~$\forall n \geq 2$, on a ; $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n$~~

Ainsi, à gauche, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = S_n - 1$ et à droite $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_n - \frac{1}{n}$

Donc $\forall n \geq 2$, $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$

(c.) D'abord, $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{t=1}^{t=n} = \ln(n)$

~~Ainsi, $\forall n \geq 2$, $\frac{S_n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{S_n}{\ln(n)}$~~

D'après le critère de riemann, on sait que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Ainsi $\forall n \geq 2$, si l'on divise par S_n l'encadrement de (1.b), on a :

$1 - \frac{1}{S_n} \leq \frac{\ln(n)}{S_n} \leq 1 - \frac{1}{nS_n}$

Puis $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{S_n}) = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{nS_n}) = 1$

Donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} (\frac{\ln(n)}{S_n}) = 1$

Ainsi, $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$

(2.a)

La fonction python a pour objectif de renvoyer le premier rang n à partir duquel $S_n > a$ (où a est une valeur entrée par l'utilisateur). La variable S, initialisé en 1, calcul la somme. La variable k, initialisé en 1 (tel que $S_1 = 1$), calcule le rang.

Ainsi, ry(50) renvoie le premier $n \geq 1$ tel que $S_n > 50$.

(3. a)

$n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [0,x]$

Alors, $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j$ (car $j = k-1$, changement d'indices)

$= \sum_{j=0}^{n} t^j - t^n$

Par ailleurs, puisque $x \in]0,1[$, $t \in]0,1[$ donc $|t| < 1$.

Cette somme est géométrique.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} - t^n$. Plus simplement, $\sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1-t^n}{1-t}$

Donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,x], \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}}$

(b)

Soit $t \in [0,x]$, alors, d'une part :

$\int_0^x t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \frac{x^k}{k}$ Donc $\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

D'autre part, par la linéarité de l'intégrale :

$\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$ (question précédente)

Alors, $\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

En conclusion :

$$\underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-n) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt}$$

(c) Soit $t \in [0,x]$

Alors, $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq t^n$ (car $1-t \leq 1$)

Ainsi, $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x t^n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Alors, $|x| < 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} (x^{n+1}) = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = 0$

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right) = 0$

(d.)

D'après la question (3.b) et (3.c), on peut dire que la limite quand $n \to +\infty$ de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ existe

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + \underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right)}_{=0 \ (3.c)}$

Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Exercice n°2 :

(1.) Soit $n \geq 2$. $n \in \mathbb{N}$.

(a.)

On pose $Z_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$

Ainsi, sachant que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivent des uniformes sur $]0,1[$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \subset]0,1[$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$,

$P(Z_n \leq x) = 0$ si $x \leq 0$ et $P(Z_n \leq x) = 1$ si $x \geq 1$.

D'autre part, si $x \in]0,1[$, $P(Z_n \leq x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x)$

ici, on a : ~~[min(X1, ...,~~ $[\min(X_1, \dots, X_n) \leq x] = [\bigcup\limits_{k=1}^{n} [X_k \leq x]]$

Ainsi, pour $x \in]0,1[$, $P(Z_n \leq x) = P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} [X_k \leq x])$

$= 1 - P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k > x])$

(Variable aléatoire à densité) $= 1 - P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [X_k \geq x])$

(indépendance) $= 1 - \left(\prod\limits_{k=1}^{n} P(X_k \geq x) \right)$

$= 1 - \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - P(X_k \geq x)) \right)$

($(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi) $= 1 - (1 - P(X_1 \geq x))^n$

(Loi usuelle : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et $x \in]0,1[$) $= 1 - (1-x)^n$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 18 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, si l'on note F_n la fonction de répartition de Z_n, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & x \in [0,1] \\ 1 & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} F_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (F_n(x)) = 1$.

Ainsi, par prolongement par continuité, $F_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
Puis, trivialement $F_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\{0,1\})$
Ainsi, Z_n est une variable aléatoire à densité.

(c)

Soit $x \in]-\infty, 0[$, $F_n'(x) = 0$. Soit $x \in]1,+\infty[$, $F_n'(x) = 0$
Soit $x \in]0,1[$, $F_n'(x) = n(1-x)^{n-1}$
Ainsi, en notant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ n(1-x)^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geq 0$ et $F_n' = f_n$ sur les points de continuité de F_n. Ainsi, f_n est une densité de Z_n.

(2) :

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return(min(random(n)))
```

random (n) simule un vecteur de n variable aléatoire indépendante suivant l'uniforme sur]0,1[. Min, renvoie le minimum de ce vecteur.

[3] ~~Soit~~

Soit $x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Soit $x \in]1, +\infty[$, $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Soit $x \in]0,1[$,

$1 - x \in]0,1[$, ainsi; $|1-x| \in]0,1[$

Ainsi; $\lim\limits_{n \to +\infty} ((1-x)^n) = 0$

Ainsi, si $x \in]0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1$

Ainsi, en notant F_Z la fonction suivante: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Alors, en tout point de continuité de F_n, on a:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_Z(x)$

Ainsi, en notant Z la variable aléatoire constante égale à 0, on a:

~~$Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$~~ $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge en loi vers Z.

[4.1] Soit $n \geq 2$:

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, indépendamment des $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

En considérant $Z_{n-1} = \inf((X_k)_{k \in [\![1, n-1]\!]})$ on remarque par le lemme des coalition que Z_{n-1} est indépendante de X_n (car les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants)

D'après les notations de la question [4], adaptées telles que $U = X_n$

On a une densité de $Z_{n-1} - X_n$: c'est g_{n-1}.

(b.)

$(Z_n)(\Omega) =]0,1[$. $(X_n)(\Omega) =]0,1[$ donc $(-X_n)(\Omega) =]-1,0[$

Ainsi, $T_n(\Omega) =]-1,1[$.

Cependant, d'après la question (4.a), $\forall n \geq 2$, $P(Z_n = X_n) = P(T_n = 0) = \frac{1}{n}$

Ainsi, $P(T_n = 0) \neq 0$ (car $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} \geq 0$)

Alors, la variable aléatoire (T_n) ne peut pas être à densité (la probabilité d'être égale à une constante où $0 \in T_n(\Omega) =]-1,1[$ n'est pas nulle).

(c.)

```
~~def VarT(n)~~:
import numpy as np
import numpy.random as rd
VarT(n):
    Z = rd.random(n)          # Vecteur de n simulation indépendant de X↪U(]0,1[)
    X = Z[-1]                 # On récupère la dernière simulation : Xn
    return (np.min(Z)-X)      # On simule Tn
```

(5.)

(a.) T_{500} ne semble pas discrète. On voit avec la figure n°2 qu'elle prends des valeurs se différançiant jusqu'au centième.

(b.)

Le résultat (4.a) indiquerait que $P(Z_{500} = X_{500}) = \frac{1}{500}$ donc un évenement très peu probable. Or, d'après la Figure 1, il se réalise plus de 50 fois. Ce n'a pas l'air cohérent.

Problème

Soit $n \geq 2$ et $\dim E = n$.

Préliminaire

(1.) on sait que $\dim E = n$

et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. $\mathbb{R}$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{R} = 1$

Ainsi, $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = \dim E \times 1 = n$

donc $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E = n$

(2) Soit $\varphi \in E^*$.

(a.)

On sait que φ est une application linéaire. Ainsi, le sous-espace vectoriel de ~~son~~ image est inclu dans l'espace d'arrivé de l'application. Ainsi, $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}$. Donc $\dim \operatorname{Im} \varphi = rg(\varphi) \leq \dim \mathbb{R} = 1$

~~D'autre part,~~

Ainsi, $\forall \varphi \in E^*$, $rg(\varphi) \in [\![0, 1]\!]$.

(b.)

D'autre part, si $rg(\varphi) = 0$. Par le théorème du rang, on a que $\dim E = rg(\varphi) + \dim \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ainsi, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E = n$

Ainsi, φ est l'application nulle.

~~Je considère ici qu'il y a une erreur d'énoncé. Si φ serait surjective, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim$~~

Si $rg(\varphi) = 1$. Alors, $rg(\varphi) = \dim \mathbb{R} = 1$. Donc par la linéarité de φ. φ est surjective.

(c.)

Dans le cas où $rg(\varphi) = 1$.

D'après le théorème du rang (comme en (2.b)), on a :

$\dim E = n = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \underbrace{rg(\varphi)}_{=1} \iff n-1 = \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Ainsi, $\forall \varphi \in E^*$, si φ n'est pas l'application linéaire nulle, $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan.

Partie I. Des exemples.

(3) Premier Exemple.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $E = \mathbb{R}_p[X]$

$g : E \to \mathbb{R} \mid P \mapsto \int_0^1 P(t)\, dt$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 18	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(a.)

Linéarité : Soient $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, $g(\lambda P+Q) = \int_0^1 (\lambda P+Q)(t)\,dt = \int_0^1 \lambda P(t)+Q(t)\,dt$

(Linéarité de l'intégrale) $= \lambda \int_0^1 P(t)\,dt + \int_0^1 Q(t)\,dt$

$= \lambda g(P)+g(Q)$

Ainsi, g est linéaire.

Puis il s'agit d'une application linéaire de E (ici $\mathbb{R}_p[x]$) dans $\mathbb{R}$.

$g \in E^*$.

(b.)

Soit $p \geq 1$, on prenant $P(x) = x^{p-1}$ où $P \in E$

On a : $g(P) = \int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 t^{p-1}\,dt = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p} > 0$.

Ainsi g n'est pas l'application nulle. ~~puisque~~

Ainsi, d'après la question (2.c), $\mathrm{Ker}(g)$ est un hyperplan.

Ici, $\dim E = p+1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(g) = p$.

(c.)

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $Q_k : x \mapsto x^k - \frac{1}{k+1}$

• Soit $k \in [\![1,p]\!]$, alors, $g(Q_k) = \int_0^1 Q_k(t)\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1} = 0$

Ainsi, $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $Q_k \in \mathrm{Ker}(g)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

par ailleurs, $\deg(Q_k) = k$ (évident)
Ils sont donc échelonné en degré, $(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre.
Enfin, $\dim \mathbb{R}_p[X] - 1 = \operatorname{card}(Q_1, \dots, Q_p) = p$

Ainsi, $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\ker(g)$

4) Second exemple

~~$p \in \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_p[X]$ $f: E \to \mathbb{R} \mid P \mapsto$~~

(a.)
Soient, $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors, $f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda f(P) + Q(P)$
Ainsi, f est linéaire. Enfin, d'après ses ensembles de départ et d'arrivée, c'est bien une application linéaire.

(b.)
Le noyau de f est constitué de l'ensemble des fonctions admettant 0 pour racine.
Ainsi, l'ensemble des $P \in \mathbb{R}_0[X]$ sont exclues.
Or, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\exists P_k \in \mathbb{R}_k[X]$, $P_k(0) = 0$.
En effet, il suffit de choisir $P_k : x \mapsto x^k$
Soit $P = (P_1, \dots, P_p)$ Alors, $\operatorname{card}(P) = n = \dim \ker f$
(en effet, puisque $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Im}(f)$, $\operatorname{rg}(f) = 1$, donc $\dim \ker f = p$ (2.c))
et $\deg(P_k) = k$. P est libre. $P_k \in \ker f$
Ainsi, on a déterminé une base du noyau : P.

5)
(a.)
Puisque ~~$\forall \in$~~ $f \in E^*$ et $g \in E^*$, et qu'ils sont tout deux non-nuls, (2.c), $\dim \ker f = n-1$ et $\dim \ker g = n-1$ ($\dim E = n$)
Ainsi, $\dim \ker f = \dim \ker g$.
Puis qu'il est supposé que $\ker f \subset \ker g$. On a : $\ker f = \ker g$

(b.)

puisque $rg(f) = 1$. $\exists x_0 \in E, f(x_0) \neq 0_E$.

En effet, en considerant, $y_0 \in Im(f)$, $\exists x_0 \in E, f(x_0) = y$ et du coup $f(x_0) \neq 0_E$ ($y \neq 0_E$).

Donc $\underline{\exists x_0 \in E, x_0 \notin Ker(f)}$

(c.)

Puisque $x_0 \notin Ker(f)$, en particulier (x_0) est libre.
(x_0 ne peut pas être nul).

Ainsi, $\dim Vect(x_0) = 1$ (sous espace vectoriel généré par (x_0))

Puis, soit $x \in Vect(x_0) \cap Ker(f)$.

Alors, $\begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda x_0 \end{cases}$ Donc $f(\lambda x_0) = \lambda f(x_0) = 0$ or $x_0 \notin Ker(f)$ donc $\lambda = 0$

Ainsi, $x = 0$. Ainsi, $Vect(x_0)$ et $Ker f$ sont en somme directe.
Et $\dim E = \dim Vect(x_0) + \dim Ker f$

Ainsi, ils sont supplémentaire dans E.

Donc $\underline{E = Ker(f) \oplus Vect(x_0)}$

(d.)

Soit $x \in E$, $\exists! (x_1, x_2) \in Ker(f) \times Vect(x_0) / x = x_1 + x_2$
$= x_1 + \lambda x_0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Ainsi, $h(x) = g(x_0) f(x_1 + \lambda x_0) - f(x_0) g(x_1 + \lambda x_0)$
$= g(x_0)[\underbrace{f(x_1)}_{=0} + \lambda f(x_0)] - f(x_0)[\underbrace{g(x_1)}_{=0} + \lambda g(x_0)]$ (car $Ker(f) \subset Ker(g)$)

$= \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0)$

$= 0$

Ainsi, $\underline{\forall x \in E, h(x) = 0}$. $\underline{h \text{ est nulle}}$.

(e.)

D'après la question d'avant, on a :
$\forall x \in E$, $h(x) = 0_E = f(x) g(x_0) - g(x) f(x_0) \Leftrightarrow f(x) g(x_0) = g(x) f(x_0)$

donc $f\, g(x_0) = g\, f(x_0)$ où $g(x_0) \in \mathbb{R}$ et $f(x_0) \in \mathbb{R}$

Les deux applications linéaires sont la combinaison linéaire l'une de l'autre.

Partie II : Hyperplan et Forme linéaire

16.1 Soit H un hyperplan de E.

(a.)

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H, en particulier, cette même famille est libre et est faite de vecteur de E.
D'après le théorème de la base incomplète, toute famille libre de E (ici, en dimension finie) peut se compléter en une base de E.
Ainsi, $\exists e_n \in E$, $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ où β est une base de E.

(b.)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel que $\varphi(e_i) \begin{cases} 0 & \text{si } i \in [\![1, n-1]\!] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors, d'après la question précédente, $\forall x \in E, \exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$
$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$

~~Donc si $x \in E$, $\varphi(x) =$~~

~~• Linéarité : Soient $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.~~
~~Alors, $\begin{cases} x = \sum_{k=1}^{n} e_k \alpha_k \\ y = \sum_{i=1}^{n} e_i \beta_i \end{cases}$ (les $(\beta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont définies similairement aux $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, ils n'en restent pas moins distincts)~~
~~Alors, $\varphi(\lambda x + y) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda e_k \alpha_k + e_k \beta_k\right)$~~

Ainsi, $x \in E$, $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(e_k) = \alpha_n \in \mathbb{R}$.
(φ est supposée linéaire)
Ainsi, φ est belle et bien une application linéaire définie.

• $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$.
Ainsi, notons des $(x_k)_{k \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$
$\begin{cases} x_k \in E \\ \exists ! (\alpha_{i,k})_{i \in [\![1,k]\!]} \in \mathbb{R}^k / x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,k} e_i \end{cases}$

Ainsi, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(x_k) = 0$ donc $x_k \in \operatorname{Ker}(\varphi)$
Puis, les $(x_k)_{k \in [\![1, n-1]\!]}$ sont par leur construction libre.
Ainsi, $\operatorname{card}((x_k)_{k \in [\![1, n-1]\!]}) = n - 1 = \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim H$.
(en effet, φ n'est pas l'application linéaire nulle).
Ainsi, on a trouvé une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ (ce qui n'était pas demandé) construite à partir de $(e_1, \dots, e_{n-1})$: la base de H. Ainsi, $\operatorname{Ker} \varphi \subset H$.

Par inclusion et égalité des dimensions.
$\operatorname{Ker}\varphi = H$.

Soit à present $p \geq 2$, $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})^p$

|7.|

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$.
Alors, $f(x) = (0, \dots, 0) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$
Ainsi, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(x) = 0$. ~~Donc $x \in$~~ $x \in \operatorname{Ker}(f_i)$
Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) \subset \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)$ (Il est inclu dans tous, donc dans l'intersection)

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)$
Alors, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x) = 0$. En particulier, en notant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \Leftrightarrow f(x) = (0, \dots, 0)$.
Ainsi, $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

Ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)$

|8|. (a.) On suppose que f est surjective.
f étant linéaire, cela signifie que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^p$.
Être surjectif signifie par définition :
$\forall y \in \mathbb{R}^p, \exists x \in E, f(x) = y$. En particulier, la base canonique de $\mathbb{R}^p$ appartient à $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $\exists x \in E, f(x) = \varepsilon_i$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(b.)

D'après la question d'avant.

$\exists x \in E, \ f(x) = y = (1, 0, \dots, 0) = f_1(x)\, \varepsilon_1$ k-ième position

Ainsi, $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \exists x_k \in E, \quad f(x_k) = y_k = (0, \dots, \overset{\vee}{1}, \dots, 0) = f_k(x_k)\, \varepsilon_k$

Ainsi, en considérant une combinaison linéaire nulle de $(f_1, \dots, f_p)$:

On a : $0_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ (où $(\alpha_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}$)

En particulier, on a alors : $0_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x_k)$ (evaluation)

$0_{\mathbb{R}} = (0, \dots, 0, \alpha_k, 0, \dots, 0)$ [faux]

Donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\quad 0_{\mathbb{R}} = \alpha_k$

$\alpha_k = 0_{\mathbb{R}}$.

Ainsi, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

(9.) Supposons que f ne soit pas surjective.

(a.)

On sait que si f est surjective, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^p = p$

ici, puisqu'elle ne l'est pas, on dit que $\dim \operatorname{Im} f < p$.

(b.)

En considérant une base de $\operatorname{Im}(f)$ (elle existe puisque $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie) alors, la famille de vecteur de cette base est en particulier libre et $\forall i \in [\![1, m]\!], \ e_i \in \mathbb{R}^p$ (car $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^p$)

Ainsi, puisque $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie, la famille $(e_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ est complétable en une base notée β' de $\mathbb{R}^p$.

En particulier, d'après la question précédent, les $(e_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ est été complétés par au moins 1 vecteur, donc $\dim \operatorname{Im} f \leq p-1$.

Ainsi en rejoutant aux $(e_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ de la manière énoncé précédemment de tel sorte que le cardinal de cette concaténation soit $p-1$, on obtient la base d'un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ où $Im(f)$ est incluse.

(10.)

(b.) D'après la question 7 et le théorème du rang.
$\dim E = \dim \ker f + \dim Im f$
$\Leftrightarrow \dim E - \dim Im f = \dim \ker f$
Et la surjectivité de f assure que $\dim f = p = \dim \mathbb{R}^p$.
Ainsi,
$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker f_k\right) = n-p$$

Partie III : Structure Euclidienne

(11.) Soit $a \in E$.
(a.)
□ Linéarité : Soient $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f_a(\lambda x+y) = \langle a, \lambda x+y\rangle = \lambda\langle a,x\rangle + \langle a,y\rangle = \lambda f_a(x) + f_a(y)$
(bilinéarité du produit scalaire)
Ainsi, f est linéaire.
Enfin, $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ puisque $\forall x \in E, f_a(x) = \langle a,x\rangle \in \mathbb{R}$.
Donc $f \in E^*$

(b.) Soit $a \in E$, non nul. Si a est l'élément nul, f_a est l'application nulle, donc $\ker(f_a) = n$.
Soit $x \in \ker(f_a)$: $\langle a,x\rangle = 0$
Ainsi, $\ker(f_a) \in Vect(a)^\perp$
Soit $x \in Vect(a)^\perp$. Ainsi, $\langle x,a\rangle = 0 = f(x)$
Ainsi, $\ker(f_a) = Vect(a)^\perp$

(c.)
Soit f_a telle que $\forall x \in E, f_a(x) = 0$.
En particulier, $a \in E$, donc $f_a(a) = 0 \Leftrightarrow \langle a,a\rangle = \|a\|^2 = 0$

Donc $\|a\| = 0$. Puis, le seul vecteur de norme nul est le vecteur nul.
Ainsi, $a = 0_E$.

(12.) $\forall a \in E,$

Soit $\Phi : E \to E^* \mid a \mapsto f_a$.

(a.) Soit $(x,y) \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Phi(\lambda x+y) = f_{\lambda x+y}$

Soit $\tilde{x} \in E$, on $\Phi(\lambda x+y)(\tilde{x}) = f_{\lambda x+y}(\tilde{x}) = \langle \lambda x+y, \tilde{x} \rangle$

(bilinéarité) $= \lambda \langle x, \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle$

$= \lambda f_x(\tilde{x}) + f_y(\tilde{x})$

Ainsi, $\Phi(\lambda x+y) = \lambda \Phi(x) + \Phi(y)$

Φ est linéaire.

(b.)

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Ainsi, $\Phi(x) = 0_{E^*} = f_x$.

Autrement dit, f_x est l'application linéaire nulle.

D'après la question (11.c), on a : $x = 0_E$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$ Donc Φ est injectif.

Finalement, d'après la question (1.)

$\dim E = \dim E^*$. Φ est bijectif.

C'est un isomorphisme de E dans E^*.

(c.)

D'après la bijectivité : ~~$\exists ! a \in E, \Phi(a) =$~~

$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E, \Phi(a) = \varphi = f_a$

En général, $\forall x \in E, \varphi(x) = f_a(x) = \langle a, x \rangle$

(13.) $p \in \mathbb{N}^*$

(a) On pose $\langle ; \rangle : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$

* Symétrie : Soient $(A,B) \in M_p(\mathbb{R}^2)$

~~tAB~~ On sait qu'une matrice et sa transposée ont la même trace, ainsi :

$\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^t({}^tA)) = \mathrm{tr}({}^tBA)$

Donc l'application est symétrique

* Bilinéarité : Soit $(A,B) \in M_p(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\forall C \in M_p(\mathbb{R})$, $\langle \lambda A+B, C \rangle = \mathrm{tr}({}^t(\lambda A+B)C) = \mathrm{tr}[\lambda {}^tAC + {}^tBC]$

(linéarité de la trace) $= \lambda \mathrm{tr}\, {}^tAC + \mathrm{tr}\, {}^tBC$

Ainsi, l'application par symétrie est bilinéaire.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 18	Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques Approfondies EMLyon		

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

* Positivité : Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$\langle A, A \rangle = tr\, {}^tAA$

On note $[a]_{ij}$ le coefficient en position i,j de la matrice A $(\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2)$

Ainsi par définition du produit matriciel et de la trace (somme des coefficient diagonaux : en notant $[{}^tAA]_{ij}$ le coefficient correspondant de ${}^tAA$, on a :

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, [{}^tAA]_{ij} = \cancel{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}} \sum_{k=1}^{n} {}^t[a]_{ik}[a]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [a]_{ki}[a]_{kj}$

Puis $tr([{}^tAA]_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} [a]_{ik}[a]_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [a]_{ik}^2 \geq 0$

Ainsi, $\langle A, A \rangle \geq 0$.

· Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

$\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [a]_{ik}^2 = 0 \quad (\forall i \in [\![1,n]\!])$

En effet, une somme de coefficient positifs est nulle ~~ssi~~ si et seulement si tous ses termes le sont.

Donc $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, [a_{ik}]^2 = 0 \Leftrightarrow [a_{ik}] = 0$

Ainsi, $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

Enfin, $\langle ; \rangle$ est un produit scalaire.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(b.) En appliquant le théorème de la question (1.2) pour $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et avec le produit scalaire nouvellement défini, on a :

$\forall \varphi \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^*, \exists ! A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{M}), \quad \varphi(M) = \langle {}^tA, M \rangle$

$= tr({}^t({}^tA)M)$

Ainsi, si $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ $= tr(AM)$

$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = tr(AM)$

Exo 1 :

question (2.b)

Puisque $\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} S_n$. Même si mathématiquement, on ne peut composer les équivalent, ici, on aurait l'idée selon laquelle : "$n \underset{+\infty}{\sim} e^{S_n}$".

Ainsi, en calculant $\exp(49)$, nombre gigantesque ($\times 10^{21}$), on se rends compte que le rang n de S_n a atteindre pour que $S_n > 50$ est lui aussi de cet ordre.

(8.b.) (Problème)

Sachant que $\forall k \in [\![1, p]\!], \exists x_k \in E, f(x_k) = f_k(x) e_k$

et sachant que les $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont la base canonique des $\mathbb{R}^p$.

Alors, en particulier, $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

Donc si $\sum_{k=1}^{\hat{p}} f_k(x_k) e_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], f_k(x_k) = 0$.

[non abouti]

(10.a)

Soit $y \in \mathbb{R}^p$.

Connaissons la liberté des $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On sait que $Im(f) \supset Vect((f_i)_{i\in[\![1,p]\!]})$

La liberté nous assure que $\dim Im(f) \geq p$

et $Im(f) \subset \mathbb{R}^p$ donc $rg\, f \leq p$.

Ainsi, $rg(f) = p$.

Puisqu'il s'agit d'une application linéaire.

f est surjective.