Copie anonyme - n°anonymat :

N3-00120
Maths E

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 16 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) La matrice A a pour coefficient $a_{i,j} = 1$ lorsque les sommets i et j sont reliés par une arête, ce qui donne :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) a) Il y a 8 chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 :

2 - 1 - 0 - 3   3 - 2 - 3 - 2
2 - 3 - 4 - 3   2 - 3 - 2 - 3
3 - 4 - 3 - 2   2 - 1 - 2 - 3
3 - 0 - 1 - 2   3 - 0 - 3 - 2

b)
```
B = f(A, 3)        # pour obtenir A^3 .
n = B[1 , 2]       # pour obtenir le coefficient ligne 1
                                                colonne 2
print(n)
```

3) a)

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $D - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) L est diagonalisable car L est symétrique, c'est-à-dire que ${}^tL = L$.

4) ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$

donc ${}^tXL \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$
et $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$

donc $\boxed{{}^tXLX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$

b) ${}^tXLX = \begin{pmatrix} 2a-b-d & -a+2b-c & -b+2c-d & -a-c+3d-e & -d+e \end{pmatrix} X$

$= a(2a-b-d) + b(-a+2b-c) + c(-b+2c-d) + d(-a-c+3d-e) + e(-d+e)$

$= 2a^2 - ab - ad - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - dc - da - dc + 3d^2 - de - ed + e^2$

$\boxed{= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2}$

c) $LX = \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}$

${}^tXLX = {}^tX\lambda X = \lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 + \lambda d^2 + \lambda e^2$
$\boxed{= \lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)}$

or ${}^tXLX \geq 0$ en tant que somme de carrés d'après la question 4)b) donc $\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geq 0$

donc $\lambda \geq 0$

donc les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d) $LU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times U$

donc U est vecteur propre de L associé à la valeur propre 0 donc 0 est une des valeurs propres de L et comme les valeurs propres de L sont supérieures ou égales à 0, alors 0 est la plus petite valeur propre, c'est-à-dire λ_1.

5) a) $LX = 0 \iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 2d = 0 \\ e = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2c - b + 3d = 0 \\ b - d = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ a = -c + 2d \\ e = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b = d \\ c = d \\ a = d \\ e = d \end{cases}$

$\iff X = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = dU$

$\Leftrightarrow X \in Vect(U)$

donc on a bien $\boxed{LX = 0 \Leftrightarrow X \in Vect(U)}$

b)

EXERCICE 3

1) a) Si $a=b$ alors $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

A est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale

donc $Sp(A) = \{a\}$

donc si $a=b$, A a une seule valeur propre.

b) Supposons que A est diagonalisable.

Si $a=b$, alors A n'a qu'une valeur propre λ.
et A est semblable à une matrice diagonale avec sa valeur propre sur la diagonale,
c'est-à-dire qu'on a $A = \underbrace{P^{-1} \lambda I P}_{= \lambda I}$ avec P une matrice de passage

on aboutit à une contradiction.
donc si $a=b$, A n'est pas diagonalisable.

2) a) A est triangulaire donc ~~ses~~ valeurs propres sont sur sa diagonale

donc $\boxed{Sp(A) = \{a, b\}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 409895

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 16 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b-a\\b(b-a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\b(b-a)\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres a et b

c) Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ sont non-colinéaires

donc $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale car elle est composée de deux vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$

donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

et $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & b-a\end{pmatrix}}$

d) Une matrice diagonale telle que $AP = PD \iff A = PDP^{-1}$ est la matrice du même endomorphisme dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ mais dans la base $\mathcal{B}$.

C'est-à-dire qu'on a $D = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc A est semblable à une matrice diagonale avec ses valeurs propres sur la diagonale. donc A est diagonalisable.

3) a) $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n \cap Y=n)$

$\boxed{= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)}$ car X et Y sont indépendantes

b) donc $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1$

on reconnaît une série géométrique avec $-1 < \frac{1}{4} < 1$

donc $\boxed{P(X=Y) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}}$

4) a) On a vu que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ n'était pas diagonalisable

si $a=b$ donc $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

si $Y=X$

on $P(X=Y) = \frac{1}{3}$

donc la probabilité que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable est $\boxed{p = \frac{1}{3}}$

b) Le script simule m : les lois X et Y et comptabilise le nombre de fois où $X=Y$, c'est-à-dire lorsque $A(X,Y)$ ne sera pas diagonalisable.
donc, pour m grand, $\frac{c}{m}$ se rapproche de la moyenne du nombre de fois où

la matrice $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable
donc $i = 1 - \frac{c}{m}$ est proche de la moyenne du nombre de fois où $A(X,Y)$ est diagonalisable.

Problème

PARTIE 1

1) • si $x < 1$, $f(x) = 0$
si $x \geq 1$, $f(x) = \frac{c}{x^{1+c}} > 0$ car $x \geq 1$ et $c > 0$.

• f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que fonction constante ou quotient, qui ne s'annule pas, de fonctions continues.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}}\,dx = c \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+c}}\,dx$

Soit $A \geq 1$, $c\int_1^A \frac{1}{x^{1+c}}\,dx = c \int_1^A x^{-c-1}\,dx$

$= -\frac{c}{c} \int_1^A -c x^{-c-1}\,dx$

$= -\left[x^{-c} \right]_1^A$

$= -(A^{-c} - 1)$

$\xrightarrow[A \to -\infty]{} 1$

donc f peut être considérée comme une densité.

2) $X(\Omega) = [1; +\infty[$
$\forall x < 1$, $F(x) = 0$
$\forall x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{1+c}}\,dt$

comme pour le calcul précédent, on trouve

$\forall x \geqslant 1, F(x) = -\left[t^{-c} \right]_1^x$

$= -x^{-c} + 1$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$

3) a) Si $x < 1$, $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \dfrac{P(t < X \leqslant tx)}{P(X>t)}$

$= 0$ car si $x < 1$ alors $tx < t$

si $x \geqslant 1$, $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \dfrac{P(t < X \leqslant tx)}{P(X>t)}$

$= \dfrac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$

$= \dfrac{1 - (tx)^{-c} - (1 - t^{-c})}{1 - (1 - t^{-c})}$

$= \dfrac{t^{-c} - (tx)^{-c}}{t^{-c}}$

$= 1 - x^{-c}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

$\boxed{= F(x)}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = P_{(X>t)}\left(\dfrac{X}{t} \leqslant x\right)$ car $t > 1$

$= F(x)$

donc la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à $(X>t)$ est la loi de X.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 16	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 2

4) $G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt = 0$ car g est nulle sur $]-\infty;1[$.

5) a) On a $P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) = G(x)$ d'après l'enoncé

donc $G(x) = \dfrac{P(t < Y \leq tx)}{P(Y>t)}$

$$\boxed{= \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}}$$ pour tout $x>1$ et $t>1$

b) G est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 (des fonctions de répartition qui sont C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points).

$\forall x>1$ et $\forall t>1$, $G'(x) = \dfrac{1}{1-G(t)} \times \left(tG'(tx) - 0\right)$

$$\boxed{= \frac{t\,G'(tx)}{1-G(t)}}$$

c) $\forall t>1$, $G(t) + \dfrac{t}{c}G'(t) = G(t) + \dfrac{t\,G'(t)}{\frac{t\,G'(t)}{1-G(t)}}$ car $c = g(1) = G'(1)$

$= G(t) + 1 - G(t)$

$\boxed{= 1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) a) y est solution de $(E_1) \Leftrightarrow y(t) + \frac{t}{c} y'(t) = 0$

$\Leftrightarrow z(t)t^{-c} + \frac{t}{c}\left(t^{-c}\left(z'(t) - c\frac{z(t)}{t}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{t}{c} z'(t)t^{-c} = 0$

$\Leftrightarrow z'(t) = 0$ car $t > 1$ et $c > 0$

donc y est solution de (E_1) si et seulement si z est constante sur $]1 ; +\infty[$.

c) $u = 1$ est une solution de (E_2).

$1 + \frac{t}{c} \times 0 = 1$

d) h solution de $(E_2) \Leftrightarrow h + \frac{t}{c} h' = 1$

$\Leftrightarrow h - 1 + \frac{t}{c} h' = 0$

$\Leftrightarrow (h-1) + \frac{t}{c} h' = 0$

$\Leftrightarrow h - 1$ solution de (E_1)

car $(h-1)' = h'$

b) Les solutions de (E_1) sont :

$\forall t > 1, \quad y(t) = K \times t^{-c}$ $\boxed{= \frac{K}{t^c}}$

e) Les solutions de (E_2) sont :

$\forall t > 1, \quad h(t) - 1 = y(t)$

$\Leftrightarrow h(t) = y(t) + 1$

$\boxed{= 1 + \frac{K}{t^c}}$

7)a) d'après la question 5)c), $\forall t \geq 1 \quad G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$

$\iff y + \frac{t}{c} y' = 1$ avec $y = G$

or les solutions de $y + \frac{t}{c} y' = 1$

sont $\forall t \geq 1 \quad h(t) = 1 + \frac{k}{t^c}$

En particulier, $G(1) = 0$

donc $1 + k = 0$

donc $k = -1$

donc $\forall t \geq 1 \quad h(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$

donc $\forall t \geq 1 \quad \boxed{G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}}$

b) pour $t = 1$

$G(1) = 0 = 1 - 1 = 0$

Cette relation s'étend à $[1; +\infty[$

et $\forall t < 1, \ G(t) = 0$ car g est nulle sur $]-\infty; 1[$

donc $Y(\Omega) = [1; +\infty[$

et $\forall t \geq 1, \ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c} = 1 - t^{-c}$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètre c, étudiée en partie 1, donc Y suit une loi de Pareto de paramètre c.

PARTIE 3

8)a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = P(Z \leq x)$

$= P(\ln(X) \leq x)$

$= P(X \leq e^x)$ car $u \mapsto e^u$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$= F(e^x)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(e^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ car } e^x < 1 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre c.

Donc Z suit une loi exponentielle de paramètre c.

c)
```
import numpy as np
import rd.random as rd
def simulX(c):
    return np.log(rd.exponential())
```

EXERCICE 2

1) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-u_n| \leq k^n |u_1-u_0|$

pour $n=0$ $\quad |u_1-u_0| \leq k^0 |u_1-u_0|$

L'inégalité est valable pour $n=0$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $|u_{n+1}-u_n| \leq k^n |u_1-u_0|$

Par la relation $(*)$ on a $|f(u_{n+1})-f(u_n)| \leq k|u_{n+1}-u_n|$

$\iff |u_{n+2}-u_{n+1}| \leq k|u_{n+1}-u_n|$

or $|u_{n+1}-u_n| \leq k^n |u_1-u_0|$

donc $|u_{n+2}-u_{n+1}| \leq k|u_{n+1}-u_n| \leq k^{n+1}|u_1-u_0|$

d'où, par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\boxed{|u_{n+1}-u_n| \leq k^n |u_1-u_0|}$

b) on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq |u_{n+1}-u_n| \leq k^n |u_1-u_0|$

or $\sum k^n |u_0-u_1|$ converge en tant que série géométrique avec $k\in]0,1[$.

donc, par le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum |u_{n+1}-u_n|$ converge.

donc $\sum u_{n+1}-u_n$ converge absolument donc converge.

Copie anonyme - n°anonymat : 409895

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 16	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On a donc $\sum_{k=0}^{n-1} U_{k+1} - U_k = U_n - U_0$ car c'est une somme télescopique.

donc $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k) + U_0$

donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (U_{k+1} - U_k) + U_0$

donc (U_n) converge car $\sum U_{k+1} - U_k$ converge.

c) On a donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = a$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(a) = a$

donc a est solution de $f(x) = x$
et comme $f(x) = x$ a au plus une solution,
a est l'unique solution de $f(x) = x$.

5) a) $\forall i \in \mathbb{N}$, on a $|U_{i+1} - U_i| \leqslant K^i |U_1 - U_0|$
d'après la question 4) a).

en sommant ces inégalités pour i allant de n à $n+p-1$,
on a
$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |U_{i+1} - U_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |U_i - U_0|$$

b) $\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |U_1 - U_0| = |U_1 - U_0| \sum_{i=n}^{n-p-1} K^i = |U_1 - U_0| K^n \dfrac{1 - K^{n+p-1-n+1}}{1-K}$
car $K \in]0,1[$.

et $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1}-u_i| = \left|u_{n+p-1+1} - u_n\right|$ par télescopage

$$= |u_{n+p}-u_n|$$

donc $\boxed{|u_{n+p}-u_n| \leqslant k^n \dfrac{1-k^p}{1-k}|u_1-u_0|}$

c) En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on a

$\boxed{|a-u_n| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|u_1-u_0|}$ car $k \in]0,1[$
donc $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p = 0$

6) a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{-e^t}{(1+e^t)^2} < 0$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f''(t) = \dfrac{-e^t(1+e^t)^2 + 2e^{2t}(1+e^t)}{(1+e^t)^4}$

$$= \frac{e^t(1+e^t)(2e^t-1-e^t)}{(1+e^t)^4}$$

$$= \frac{e^t(1+e^t)(e^t-1)}{(1+e^t)^4}$$

b) f'' est du signe de e^t-1

$e^t-1 \geqslant 0 \iff e^t \geqslant 1 \iff t \geqslant 0$ car $u \mapsto \ln u$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'	↘		$-\frac{1}{4}$		↗

car $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \geq -\frac{1}{4}$

donc $\boxed{|f'(t)| \leq \frac{1}{4}}$ car $u \mapsto |u|$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

c) $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq \frac{1}{4}$ donc par les inégalités des accroissements finis,

$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x-y|$

f est $\frac{1}{4}$ - contractante.

d) D'après la question 4) a), on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$

f étant $\frac{1}{4}$ - contractante, on remplace k par $\frac{1}{4}$

donc $0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1|$

Or $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_1|$ est convergente en tant que série géométrique avec $-1 \leq \frac{1}{4} \leq 1$

donc, par le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge.

De la même manière que dans la question 4) b),
on a $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k)$

or $\sum (u_{k+1} - u_k)$ converge donc (u_n) converge.

e)

```
* import numpy as np
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1,n+1):
        u = 1/(1+ np.exp(k))
    return u
```

f) $|a - u_n| \leq 10^{-3} \iff \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} |u_1| \leq 10^{-3}$ d'après (a5)c)

$\iff \frac{1}{2 \times 3 \times 4^{n-1}} \leq \frac{1}{1000}$ car $u_1 = \frac{1}{2}$

$\iff \frac{2}{4^n} \leq \frac{3}{1000}$

$\iff 4^n \geq \frac{2000}{3}$ car $u \mapsto \frac{1}{u}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

g)

```
n = 0
u = 0
while 4**n < 2000/3:
        n = n+1
        u = suite(n)
return u
```