Copie anonyme - n°anonymat :

Maths 2E
N3-00120

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 13

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

PARTIE I

1) $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ et $(t,h) \in (\mathbb{R}^+)^2$
avec le système complet d'événement $([X_t = i])_{i \in \{1,\dots,n\}}$,
la formule des probabilités totales donne :

$$\boxed{P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^{n} P([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j])}$$

2) L'événement $[X_{t+h} = j]$ sachant que $[X_t = i]$ est réalisé définit une loi de probabilité

donc $\sum_{j=1}^{n} P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j) = 1$

Si $1 \underset{h \to 0}{=} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + o(h)$

alors il faut que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0$

3) b) $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $t \geq 0$ et $h > 0$,

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \frac{P(X_{t+h} = j) - P(X_t = j)}{h}$$

$$\underset{h \to 0}{=} \frac{1}{h}\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} h + o(h)) P(X_t = i)\right)$$

$$\underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} + o(1)) f_i(t)$$

$$\boxed{\underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + o(1)}$$

donc $\lim_{h \to 0} \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j}$

donc $\boxed{f_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j}}$

c) $L_t G = \begin{pmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} f_i(t) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{i}(t) a_{i,n} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_1'(t) & \cdots & f_n'(t) \end{pmatrix}$ d'après la question 3) b)

$\boxed{= L_t'}$

4) $E(Z_{i,T})$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_T}(t) f_i(t)\, dt$ converge absolument, c'est-à-dire converge.

Avec f_{U_T} la densité de U_T.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_T}(t) f_i(t)\, dt = \int_0^T \frac{1}{T} f_i(t)\, dt$ converge en tant qu'intégrale de fonctions continues sur le segment $[0, T]$.

donc $E(Z_{i,T})$ existe et $\boxed{E(Z_{i,T}) = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t)\, dt}$

5) a) Cherchons f_1'

$L_t' = L_t G$ or $L_t = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$

donc $L_t' = \begin{pmatrix} -af_1(t) + bf_2(t) & af_1(t) - bf_2(t) \end{pmatrix}$

donc $f_1'(t) = -af_1(t) + bf_2(t)$

En remplaçant y par f_1 et y' par f_1' dans l'équation différentielle, on trouve :

$f_1' + (a+b) f_1 = b \iff -af_1 + bf_2 + af_1 + bf_1 = b$

$\iff b(f_1 + f_2) = b$

or $f_1 + f_2 = 1$ car $n=2$ donc $([X_t = 1], [X_t = 2])$ forme un système complet d'événement.

donc f_1 vérifie bien l'équation différentielle.

b) $t \mapsto p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$ est solution particulière de $y' + (a+b)y = b$

On peut donc prendre pour tout $t \geq 0$
$f_1(t) = p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$

on montrerait de la même manière que f_2 vérifie aussi l'équation différentielle $y' + (a+b)y = b$
et $t \mapsto q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$ est aussi une solution particulière donc
$\forall t \geq 0,\ f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$

$\boxed{= p}$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-(a+b)t} = 0$

d) $e_1(T) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f_1(t)\,dt = \dfrac{1}{T}\int_0^T p + (\alpha - p)e^{-(a+b)t}\,dt$

$= \dfrac{1}{T}\left(pT + (\alpha - p)\displaystyle\int_0^T e^{-(a+b)t}\,dt\right)$

$$= p + \frac{(\alpha - p)}{T}\int_0^T e^{-(a+b)t}\,dt$$

$$\xrightarrow[T\to+\infty]{} p + 0 \times \frac{1}{a+b}$$

$$= p$$

donc $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \varphi_1(T) = p}$

6) a)

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\left(G + \frac{1}{6} I\right) X = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5y = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$$\iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $\ker\left(G + \frac{1}{6} I\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

donc $-\frac{1}{6}$ est valeur propre

et $E_{-\frac{1}{6}}(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

de même pour $-\frac{1}{10}$ et 0, ce qui donne :

$E_{-\frac{1}{10}}(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

et $E_0(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

donc $Sp(G) = \left\{ -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, 0 \right\}$

b) G est symétrique donc diagonalisable donc il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$G = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

c) $${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) $\forall t \geq 0$, $P^{-1}C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \iff C_t = P\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

Or, en résolvant les équations différentielles homogènes $y_1'(t) = 0$, $y_2'(t) = -\frac{1}{10} y_2(t)$ et $y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t)$, on trouve :

$\forall t \geq 0 \quad y_1(t) = ke^{-0t} = k$, $y_2(t) = he^{-\frac{1}{10}t}$ et $y_3(t) = le^{-\frac{1}{6}t}$
avec $(k, h, l) \in \mathbb{R}^3$.

avec la condition initiale $P^{-1}C_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$,

cela donne $\forall t \geq 0 \quad y_1(t) = \alpha$, $y_2(t) = \beta e^{-\frac{1}{10}t}$ et $y_3(t) = \gamma e^{-\frac{1}{6}t}$

donc en remplaçant dans C_t cela donne :
$\forall t \geq 0$, $C_t = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \\ \alpha - 2\beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} - \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$$

donc $P(X_t = 1) = \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t}$
$P(X_t = 2) = \alpha - 2\beta e^{-\frac{1}{10}t}$
$P(X_t = 3) = \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} - \gamma e^{-\frac{1}{6}t}$

Quand t tend vers $+\infty$, on obtient

$\forall i \in \{1,2,3\}, \lim_{t \to +\infty} P(X_t = i) = \alpha$

or $[X_t = i]_{i \in \{1,2,3\}}$ est un système complet d'événements
donc $\alpha = \frac{1}{3}$

donc $\boxed{\lim_{t \to +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}}$

7) b) $\forall x \geq 0$, $P_{[X_0 = i]}(Y_i > x) = e^{-B_i x}$

donc $P_{[X_0 = i]}(Y_i \leq x) = 1 - e^{-B_i x}$

et Y_i est à valeur dans $\mathbb{R}_+$
donc on reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle.

donc la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $P_{[X_0=i]}$ est une loi exponentielle de paramètre β_i

c) La probabilité de $Y>x$ est la probabilité que le premier instant t où $X_t \neq X_0$ arrive après l'instant x
c'est-à-dire la probabilité que $X_0 = k$ et que $X_t \neq k$, donc que $Y_k > x$

cela donne :

$$\forall x \geq 0, \quad P(Y>x) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} [X_0=k \cap Y_k > x]\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(X_0=k \cap Y_k > x)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(X_0=k)\, P_{[X_0=k]}(Y_k>x)$$
$$\boxed{= \sum_{k=1}^{n} P(X_0=k)\, e^{-\beta_k x}}$$

d) $\forall x<0, \quad P(Y\leq x)=0$
$\forall x \geq 0, \quad P(Y\leq x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_0=k)\, e^{-\beta_k x}$

$x \mapsto P(Y\leq x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ou constante.
donc $x\mapsto P(Y\leq x)$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^*$
en 0 :

$$\lim_{x\to 0} P(Y\leq x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_0=k) = 1-1=0 = P(Y\leq 0)$$
car $([X_0=k])$ est un système complet d'événement.

donc $x\mapsto P(Y\leq x)$ est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$
donc $x\mapsto P(Y\leq x)$ est la fonction de répartition

d'une variable aléatoire à densité.
donc Y est une variable aléatoire à densité.
et par dérivation et prolongement arbitraire, une densité f_Y de Y est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k)\, \beta_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

e) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx$ converge absolument, c'est-à-dire converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \sum_{k \in I} P(X_0 = k)\, \beta_k e^{-\beta_k x}\,dx$$

$$= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) \int_0^{+\infty} x \beta_k e^{-\beta_k x}\,dx$$

$$\boxed{= \sum_{k \in I} \frac{P(X_0 = k)}{\beta_k}}$$ car $\int_0^{+\infty} x \beta_k e^{-\beta_k x}\,dx$ est l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre β_k.

PARTIE II

8) b) Si $P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])$ est nulle,
$\forall (j,k) \in \{1, \dots, n\}^2$ et s et t des réels positifs,

$$P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) \times P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

$$= 0$$

Si $P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])$ est non-nulle,
$\forall (j,k) \in \{1, \dots, n\}^2$ et s et t positifs,

$$P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j])$$
$$= P(X_r = i)\, P_{[X_r = i]}(X_{r+s} = k)\, P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

$$= P(X_r = i)\, m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)$$ car $P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j) =$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 13 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$= P_{[X_{r+s}=k]}(X_{r+s+t}=j)$ d'après la propriété (H2).

donc $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ et s et t des réels positifs,

si $P([X_r=i]\cap[X_{r+s}=k])$ est nulle ou non-nulle, on a

$$\boxed{P([X_r=i]\cap[X_{r+s}=k]\cap[X_{r+s+t}=j]) = P([X_R=i])\, m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)}$$

9)c) Ce graphique est cohérent avec le fait que

$\lim\limits_{t\to+\infty} P(X_t=i) = \frac{1}{3}$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$

car la fonction traceLoi2Xt trace les graphes des fonctions $t \mapsto P(X_t=i)$

et on voit bien que les 3 courbes convergent vers $\frac{1}{3}$

PARTIE 3

10) a) Montrons par récurrence que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$

pour $i=1$
$G^1 = G = (-\alpha-\beta)^0 G$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$

$G^{i+1} = G^i G = (-\alpha-\beta)^{i-1} G^2$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$= (-\alpha-\beta)^{i-1}\begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)^2 & \alpha(-\alpha-\beta) & \beta(-\alpha-\beta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-\alpha-\beta)^{i} G$$

d'où, par récurrence, pour tout j de $\mathbb{N}^*$, $\boxed{G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k = \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i} \quad I_3^{k-i} \left(\frac{t}{k} G\right)^i\right)$$ par le binôme de Newton

$$= I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^k G^i$$

$$= \boxed{I_3 + G\left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^k (-\alpha-\beta)^{i-1}\right)}$$

c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et t réel,

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}$$

$$= -\frac{1}{\alpha+\beta}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i}$$

$$= -\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k - 1\right)$$ par le binôme de Newton

$$= \boxed{\frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}}$$

$\forall t \geq 0, \quad M(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k$

$$= \lim_{k \to +\infty} I_3 + \left(\frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}\right) G$$

or $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \lim\limits_{k \to +\infty} e^{k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)}$

or $\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k}$ car $\lim\limits_{k \to +\infty} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k} = 0$

donc $\lim\limits_{k \to +\infty} e^{k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)} = e^{-(\alpha+\beta)t}$

donc $\boxed{M(t) = I_3 + \frac{1-e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta} G}$

d) Pour trouver la loi de X_t, il faut calculer L_t or $L_t = L_0 M(t)$ d'après la question 8)a)

donc $\forall t \geq 0$,

$$L_t = L_0 M(t) = L_0 \left(I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-1+\exp(-(\alpha+\beta)t) & \frac{\alpha(1-e^{-(\alpha+\beta)t})}{\alpha+\beta} & \frac{\beta(1-e^{-(\alpha+\beta)t})}{\alpha+\beta} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc, par identification des coefficients,

$L_t = L_0 M(t) \iff \begin{pmatrix} P(X_t=1) & P(X_t=2) & P(X_t=3) \end{pmatrix} = L_0 M(t)$

$$\iff \begin{cases} P(X_t=1) = \exp(-(\alpha+\beta)t) \\ P(X_t=2) = \frac{\alpha(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))}{\alpha+\beta} \\ P(X_t=3) = \frac{\beta(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

11) a) $A^3 - 2A^2 + A = A^3 - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + A$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 9 \\ 36 & 0 & -36 \end{pmatrix} + \frac{9}{27}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

donc $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$ est un polynôme annulateur de A.

PARTIE 4

12)

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1,j}| = 1 \qquad \sum_{j=1}^{3} |a_{2,j}| = 0$$

et $\sum_{j=1}^{3} |a_{3,j}| = |-2| = 2$

donc $\boxed{\|A\| = 2}$

13) a) Les coefficients de $M(t)$ sont tous compris entre 0 et 1 donc on a forcément $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) = 1$

donc $\boxed{\|M(t)\| = 1}$

14) a) On a $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$

donc $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|$

donc $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \right) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \right)$

donc $\boxed{\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|}$

c) Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$

Si $n=0$, $\|A^0\| = \|I\| = 1 \leqslant \|A\|^0 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$

$\|A^{n+1}\| = \|A^n A\| \leqslant \|A^n\| \|A\| = \|A\|^n \|A\|$ d'après l'hypothèse

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 13	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

de récurrence.

donc $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}$

d'où, par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

d) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A(A^k - B^k) + (A-B)B^k$

$= A^{k+1} - AB^k + AB^k - B^{k+1}$
$\boxed{= A^{k+1} - B^{k+1}}$

e) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$\|A^k - B^k\| \leq k c^{k-1} \|A-B\|$

pour $k=1$
$\|A-B\| \leq \|A-B\|$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\|A^k - B^k\| \leq kc^{k-1}\|A-B\|$

$\|A^{k+1} - B^{k+1}\| = \|A(A^k - B^k) + (A-B)B^k\|$

$\leq \|A(A^k - B^k)\| + \|(A-B)B^k\|$ d'après la 1(a)a)

$\leq \|A\|\|A^k - B^k\| + \|A-B\|\|B^k\|$ d'après (a 1(a)c)

or $\|A^k - B^k\| \leq kc^{k-1}\|A-B\|$ d'après l'hypothèse de récurrence
donc $\|A\|\|A^k - B^k\| \leq kc^{k-1}\|A\|\|A-B\|$