Copie anonyme - n°anonymat :

Z0-00227 Maths S

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 27	Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $t \in [k, k+1]$.

alors $0 < k \leq t \leq k+1$

donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$$

donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt$$

donc $$\frac{k+1-k}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \frac{k+1-k}{k+1}$$

Donc $$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{k+1} \quad (*)$$

b) ~~Donc~~ En sommant pour k allant de 1 à $n-1$ $(*)$, il vient

$S_n - \frac{1}{n}$ $\cancel{S_n}$ $\geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ en ayant fixé $n \geq 2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc par relation de Chasles,

$$S_n - \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc $S_n - \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \geq S_n - 1$

c) Soit $n \geq 2$ D'après 1.b),

il vient d'une part

$$S_n \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + 1$$

et d'autre part $S_n \geq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{n}$.

Donc $\left[\ln(t)\right]_1^n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \left[\ln(t)\right]_1^n + 1$

Donc $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$ (**).

qui est vrai $\forall n \geq 2$.

d) Dès lors en fixant $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$

Donc en ~~divisant~~ multipliant par $\frac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité (**), il vient

$$1 + \underbrace{\frac{1}{n\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leq \frac{S_n}{n\ln(n)} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc par théorème d'encadrement,

$$\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ par théorème

2a) rang(50) détermine l'entier k tel que $S_k \geq 50$ et $S_{k-1} < 50$

2b) D'après le code,

$$e^{49} \simeq 1,9 \times 10^{21}$$

Donc $49 \simeq 21 \ln(10) + \ln(1,9)$

Donc rang(50) renverra un entier plus grand que $21\ln(10) + \ln(1,9)$ car $S_n \sim \ln(n)$ d'après 1.d)

3a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n]$,

$$\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$$

$$= \frac{1 - t^n}{1-t} \text{ d'après le cours}$$

3b). D'après 3.a),

$$\int_0^n \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\right) dt = \int_0^n \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

donc par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^n t^{k-1} dt = \int_0^n \frac{1}{1-t} dt - \int_0^n \frac{t^n}{1-t} dt$$

Donc $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \left[-\ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

3c). Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$0 \leq t \leq x$

donc $0^n \leq t^n \leq x^n$ par croissance de $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$

Donc $0 \leq t^n \leq x^n$.

On $t \in [0,x] \subset [0,1[$

Donc $t \neq 1$ et $t < 1$

Donc $1-t > 0$

Donc $\frac{1}{1-t} > 0$.

Donc $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$

Donc par croissance de l'intégrale,

$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq x^n \underbrace{\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt}_{\text{ne dépend pas de } n}$

On $|x| < 1$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $x^n \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc par encadrement,

$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 27	Session : 2023
	Épreuve de : Maths approfondies		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3d) D'après 3.b),

$$-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x)$$

Donc d'après 3.b), la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ converge vers $-\ln(1-x)$

Donc $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$

Exercice 2

1)a) Soit $n\geq 2$

~~$Z_n(\Omega) \subset]0,1[$~~

$Z_n(\Omega) \subset [0,1]$. et même : $Z_n(\Omega) = [0,1]$.

Soit $t \in Z_n(\Omega)$.

$F_n(t) = P(Z_n \leq t) = 1 - P(Z_n > t)$

~~$= P(\bigcap_{i=1}^{n}$~~

~~$= P($~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $F_n(t) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t]\right)$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(t))$ car les $(X_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - t)$

$= 1 - (1-t)^n$.

D'autre part comme $Z_n(\Omega) = [0, 1]$, par définition d'une fonction de répartition,

$\forall t < 0 \quad F_n(t) = 0 \quad$ et $\forall t > 1, \; F_n(t) = 1$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}, \; F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

b) Premièrement, F_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ en tant qu'opérations de fonctions continues sur ces intervalles et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1 ~~Deuxièmement~~ pour les mêmes raisons.

Deuxièmement

$\lim_{x \to 0^-} F_n(x) = 0 = 1 - (1-0)^n = F_n(0) = \lim_{x \to 0^+} F_n(x)$

Donc F_n est continue en 0.

Troisièmement,

$\lim_{x \to 1^-} F_n(x) = 1 - (1-1)^n = 1 = \lim_{x \to 1^+} F_n(x)$

Donc F_n est continue en 1

Bilan: F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc ~~F_n et~~ Z_n est à densité

c) Une densité f_n de Z_n est F_n'

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -(-1)n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2) def VarZ(n):
return min(random(n))

3). Soit $x \in [0,1]$.

~~$F_n(x) = \exp(n \ln(1-x))$~~

1er cas: $x \in [0,1[$.

Alors $|1-x| < 1$

Donc $(1-x)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $F_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ par opérations algébriques

2ème cas: $x = 1$,

$F_n(x) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

~~Si x~~

et $\forall x < 0$, $F_n(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

et $\forall x > 1$, $F_n(x) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$ avec $Z = 1$ i.e

la variable certaine égale à 1.

4). Soit $n \geq 2$.

$$P(Z_n = X_n) = P(X_n \leq Z_{n-1})$$
$$= P(Z_{n-1} - X_n \geq 0)$$

or $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ Donc

$$\cancel{P(Z_n = X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}}$$

$$\cancel{P(Z_n = X_n) = \int_0^{+\infty} g_{n-1}(x)}$$

$$P(Z_n = X_n) = \int_0^{+\infty} g_{n-1}(x)\,dx$$ d'après ce qui a été admis.

$$= \int_0^1 (1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{n} \int_0^1 -n(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{n} \left[(1-x)^n\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{n}(0-1)$$

$$= \frac{1}{n}$$

Bilan $\forall n \geq 2$, $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 27	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths approfondies.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

4b). Non. En effet,

$P(T_n = 0) = \frac{1}{n} \neq 0$ d'après 4.a)

Or si T_n était à densité,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(T_n = x) = 0$ ce qui n'est pas vrai pour 0.

Donc T_n n'est pas à densité

4c). On utilise ici ~~la fonction~~ Var Z ~~drangement~~ ~~m~~ définie en 2).

```
def VarT(n):
    U = random(n)
    b = U[0,n]
    return U - b
```

5a) Elle ne semble pas discrète car si elle l'était, nous pourrions observer des espaces entre les rectangles. Or ce n'est pas le cas.

~~Problème~~

5.b). ~~Non car~~
Oui car en 4a) on a montré que $P(T_n=0)=\frac{1}{n}$.
Donc sur ~~20 000~~ 20 000 variables T_{500}
il y en a ~~a~~ peu près $\frac{20\,000}{500}=40$ qui s'approchent de 0.
C'est presque ce que l'on obtient ici.

Problème

1) $\dim(E^*)=\dim(E).\dim(\mathbb{R})$
$=1.\dim(E)$
$=\dim(E)$

2)a) ~~D'après le théorème du rang~~,

~~$\dim(E)=\dim\ker$~~

$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
Donc $Im(\varphi)\subset\mathbb{R}$.
Donc $\dim(Im(\varphi))\leq 1$
Donc $rg(\varphi)\in\{0,1\}$.

2b). D'après 2.a) on peut distinguer deux cas.

1er cas : $rg(\varphi)=0$
alors $Im(\varphi)=\{0_E\}$
Donc φ est nulle.

Deuxième cas: $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$

Alors comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$,

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Donc par théorème, φ est surjective

Conclusion: φ est soit nulle soit surjective

c) D'après le théorème du rang,

$n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi)$.

Or φ n'est pas nulle donc $\mathrm{rg}(\varphi) > 0$

Donc d'après (2.a) $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n - \mathrm{rg}(\varphi)$

$= n - 1$

Bilan: $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E

Partie I

3) a) D'une part, $\forall P \in E$,

$\int_0^1 P(t)dt \in \mathbb{R}$ Donc

$g : E \to \mathbb{R}$

D'autre part, Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times E^2$

$g(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)dt$

$= \int_0^1 \lambda P(t) + Q(t) dt$

$= \lambda \int_0^1 P(t)dt + \int_0^1 Q(t)dt$ par linéarité de l'intégrale

Donc $g(\lambda P+Q) = \lambda g(P) + g(Q)$

Donc g est linéaire.

Donc $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

3) b) Soit $P = 1$, le polynome constant égal à 1.

alors $g(P) = \int_0^1 dt$

$= 1 \neq 0$.

Ainsi $\exists P \in E \mid g(P) \neq 0$.

Donc g n'est pas ~~nl~~ l'application nulle

Donc d'après 2.c), le noyau de g est un hyperplan de E (car g est une forme linéaire non nulle de E)

Donc $\dim(\ker(g)) = \dim(\mathbb{R}_p[x]) - 1$
$= p+1-1$
$= p$

3.c). Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$$g(Q_k) = \int_0^1 Q_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^k - \frac{1}{k+1}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1-0}{k+1}$$ par linéarité de l'intégrale

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}$$

$$= 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 27	Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $Q_k \in \ker(g)$.

Montrons que $F = ((Q_i)_{i\in[\![1,p]\!]})$ est libre.

~~Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.~~

~~Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i Q_i = 0$.~~

F est une famille de polynômes à degré échelonné.

En effet il est clair que $\forall k \in [\![1,p]\!]$,

$\deg(Q_k) = k$ Donc F est libre dans $\ker(g)$

On $\mathrm{card}(F) = p = \dim(\ker(g))$ d'après (3.b)

Donc par théorème, F est une base de $\ker(g)$.

4). a) Il est clair d'une part que $f : E \to \mathbb{R}$ car $\forall P \in \mathbb{R}_p(x)$, $P(0) \in \mathbb{R}$.

D'autre part, Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times E^2$.

$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0)$
$= \lambda P(0) + Q(0)$
$= \lambda f(P) + Q(P)$

Donc f est linéaire. Donc $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.

4.b). Soit $P = 1$ le polynôme constant égal à 1.

$f(P) = P(0) = 1 \neq 0$.

Donc f est non nulle.
Donc d'après 2.c), $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p+1-1$
$= p$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

$f(X^i) = 0^i = 0$ car $i > 0$.

Donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $X^i \in \mathrm{Ker}(f)$.

Or $((X^i)_{i \in [\![1,p]\!]})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$ en tant que famille de polynômes à degré échelonné.

Or $\mathrm{card}((X^i)_{i \in [\![1,p]\!]}) = p = \dim(\mathrm{Ker}(f))$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^p)$

Car $((X^i)_{i \in [\![1,p]\!]})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$)

5) a) f et g sont deux formes linéaires non nulles.
Donc d'après 2.c)

$\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g)) = \dim(E) - 1 = n - 1$

Donc Comme $\ker(f) \subset \ker(g)$

il vient $\ker(f) = \ker(g)$

5b). Supposons que $\forall x \in E,\ x \in \ker(f)$.

Alors $E = \ker(f)$ alors $n = \dim(\ker(f))$
ce qui est absurde d'après 5.a) car
f est non nulle. et $\dim(\ker(f)) = n - 1 < n$.

Donc $\exists x_0 \in E \mid x_0 \notin \ker(f)$

5.c) Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$.

alors $f(x) = 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid x = \lambda x_0$.

~~Supposons que $\lambda \neq 0$. Alors.~~

$f(x) = 0$ donc $f(\lambda x_0) = 0$

donc $\lambda f(x_0) = 0$ par linéarité car $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Or ~~tem~~ produit de terme est
nul si et seulement si au moins l'un des deux
est nul.
Or ~~x_0~~ $x_0 \notin \ker(f)$ Donc $f(x_0) \neq 0$.
Donc $\lambda = 0$.

Ainsi $x = 0 . x_0$
$= 0$

Donc $\ker(f) \cap \mathrm{Vect}(x_0) \subset \{0_E\}$
Donc $\ker(f) \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0_E\}$.

Dès lors, Ker f et Vect(x_0) sont en somme directe.

Or $x_0 \neq 0$ ~~donc~~ (car si $x_0 = 0$ alors $f(x_0) = f(0) = 0$ donc $x_0 \in \ker f$ ce qui est absurde.)

Donc $\dim(\text{Vect}(x_0)) = 1$

Donc $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Vect}(x_0)) = n-1+1$
$= n.$

Donc $\ker(f)$ et vect(x_0) sont supplémentaires dans E.

~~i.e.:~~ donc $\ker(f) \oplus \text{Vect}(x_0) = E$

d). Soit $x \in E$. D'après 5. c),

$\exists ! (a,b) \in \ker(f) \times \text{vect}(x_0) \mid x = a+b$.
on peut alors noter $b = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $x = a + \lambda x_0$.

$h(x) = g(x_0) f(a + \lambda x_0) - f(x_0) g(a + \lambda x_0)$
$= g(x_0) f(a) + \lambda g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(a) - \lambda f(x_0) g(x_0)$

$a \in \ker f$ donc $f(a) = 0$ or d'après 5. a), $\ker f = \ker g$ donc $g(a) = 0$.

Donc $h(x) = \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0)$
$= 0$.

Ceci étant vrai pour tout vecteur x de E, h est nulle.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 27	Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5e). On a alors

$$0 = g(x_0) f - f(x_0) g$$

Donc $g(x_0) f = f(x_0) g$.

Donc comme $x_0 \notin \ker(g)$,

$$f = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g.$$

Donc (f, g) est liée dans E^*.

Partie II.

6) a). $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H donc est libre dans H et donc dans E car $H \subset E$. Donc d'après le théorème de la base incomplète, Comme $\dim(E) = n$, $\exists e_n \in E$ tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E.

6 b). Tout élément x de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des (e_i). Donc $e_i^* : E \to \mathbb{R}$ est bien la coordonnée associée au vecteur

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

e_m. Cette définition est alors correcte.
Car φ est bien linéaire.

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$.

On $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est génératrice de H
Donc $H \subset \ker(\varphi)$

~~Soit~~ Par ailleurs φ est non nulle donc d'après
2c), $\dim(\ker(\varphi)) = n-1 = \dim(H)$

Donc $\ker(\varphi) = H$

7). Soit $x \in \ker f$.

Alors $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0)$

Donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(x) = 0$
donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, ~~$x \in f_i$~~ $x \in \ker(f_i)$

Donc $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$

Donc $\ker(f) \subset \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f_i(x)=0$

Donc $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0)$

Donc $f(x)=0$.

Donc $\bigcap_{i=1} \ker(f_i) \in \ker(f)$

Bilan: $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$

8) a) $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$. Or f réalise une surjection de E dans $\mathbb{R}^p$.

Donc par définition d'une surjection,

~~$\exists x$~~ ε_1 admet un antécédent x par f

8.b/ En itérant ce processus pour $i \in [\![2,n]\!]$, on peut alors affirmer que

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\exists x_i \in E \mid f(x_i) = \varepsilon_i$.

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $(0, \dots 0, \underset{\text{à la i-ème position}}{1}, 0, \dots, 0) = (f_1(x_i), \dots, f_{i-1}(x_i), f_i(x_i), f_{i+1}(x_i), \dots, f_n(x_i))$

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f_i(x_i) = 1$. et $i \neq j \Rightarrow f_i(x_j) = 0$ avec $j \in [\![1,p]\!]$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Supposons que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j = 0$$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j(x_i) = 0$

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i f_i(x_i) = 0$

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i = 0$.

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est alors libre dans E^*.

9).a) f n'est pas surjective donc
$Im(f) \neq \mathbb{R}^p$. or $Im(f) \subset \mathbb{R}^p$
Donc $rg(f) = \dim(Im(f)) \leq p-1$.
Donc $m \leq p-1$

9b). Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $Im(f)$.

~~Si~~ d'après le théorème de la base incomplète, $\exists (e_{m+1}, \dots, e_p) \in (\mathbb{R}^p)^{p-m}$

$(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de $\mathbb{R}^p$

Posons $H = vect(e_1, \dots, e_{p-1})$.
alors $Im(f) = vect(e_1, \dots, e_m) \subset vect(e_1, \dots, e_{p-1}) = H$
Car d'après 9a) $m \leq p-1$.

Donc $Im(f) \subset H$.

Or $\dim(H) = rg((e_1, \dots, e_{p-1})) = p-1$

Car $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est libre.
Donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$.

Et ainsi, $Im(f)$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$

9c). D'après 6. tout hyperplan de $\mathbb{R}^p$ est le noyau d'une forme linéaire* sur $\mathbb{R}^p$. or
* non nulle
Or d'après 9.b), Il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$ tel que $Im f \subset H$.
Donc $\exists \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ $\varphi \neq 0$ / $Im(f) \subset Ker(\varphi)$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 27	Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Notons $x = (x_1, \dots, x_p)$

φ est de fait de la forme

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$
les λ_i ne sont pas tous nuls.
car $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}$.

On $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(\varphi)$

Donc $\varphi \circ f$ est nulle.
En effet $\forall x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \ker(\varphi)$

Donc $\forall x \in E$, $\varphi(f(x)) = 0$.

Donc $\forall x \in E$, $\varphi(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0$

Donc $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$ alors même que pas tous les λ_i ~~ne~~ sont nuls. car $\varphi \neq 0$
Donc par définition d'une famille liée dans E^*, la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^*

10) a). ~~Card $(f_1, \dots, f_p) = p = \dim$~~

~~$\forall x \in E$, $(f_1(x), \dots, f_p(x))$ est libre dans $\mathbb{R}^p$. Donc comme elle contient p vecteurs c'est une base de $\mathbb{R}^p$.~~

~~Donc $\forall y \in \mathbb{R}^p$, $\exists x \in E$~~

admis

b). d'après 7),

$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)\right) = \dim(\ker f)$

$= n - rg(f)$ (théorème du rang)

$= n - p$

car d'après 10-a), $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im}(f)$

donc $rg(f) = p$.

Partie III

11) a). $f : E \to \mathbb{R}$ car le produit scalaire est à valeur dans $\mathbb{R}$

Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$,

$f_a(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle$ par linéarité à droite

$= \lambda f_a(x) + f_a(y)$.

Donc $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

11)b). Soit $x \in \ker(f_a)$.

alors $\langle x, a\rangle = 0$

donc ~~$x \in (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$~~

~~Donc $\ker(f_a) \subset (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$~~

$x \in (\{a\})^{\perp}$ Donc $\ker(f_a) \subset \{a\}^{\perp}$

Soit $x \in \{a\}^{\perp}$.

Alors $\langle x, a\rangle = 0$

Donc $\ker(f_a) = \{a\}^{\perp}$

11c). Supposons que f_a soit nulle.

alors $\forall x \in E,\ \langle x, a\rangle = 0$

Donc $a \in E^{\perp} = \{0_E\}$.

Donc $a = 0_E$

12) a). Soit $(\lambda, a, b) \in \mathbb{R} \times E^2$,

$\forall x \in E$, ~~$\Phi(a)(x) = f_\lambda$~~

$$\Phi(\lambda a + b)(x) = f_{\lambda a + b}(x)$$
$$= \langle \lambda a + b, x\rangle$$
$$= \lambda \langle a, x\rangle + \langle b, x\rangle$$
$$= \lambda\, \Phi(a)(x) + \Phi(b)(x)$$

Donc Φ est linéaire

12) b). Soit $a \in \ker(\Phi)$.

alors $\Phi(a) = 0$ donc $f_a = 0$.

Donc d'après 11. c), ~~f~~ on a $a = 0_E$

Donc $\ker(\Phi) = \{0_E\}$. Donc Φ est injective

Or, d'après (1) $\dim(E) = \dim(E^*)$ donc d'après le Corollaire du théorème du rang, Φ est aussi surjective. Or Φ est linéaire ~~don~~

Donc Φ est un isomorphisme de E sur E^*

12 c). Par définition d'une bijection de E sur E^*, $\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E |$

$\varphi = \Phi(a) = f_a$. d'après (12.b)

Donc $\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E | \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

13) a) Soit $(\lambda, A, B, C) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{M}(\mathbb{R}))^3$.

$$\begin{aligned}
\langle A, B \rangle &= Tr({}^tAB) \\
&= Tr({}^t({}^tAB)) \\
&= Tr({}^tB\,{}^t({}^tA)) \\
&= Tr({}^tBA) \\
&= \langle B, A \rangle.
\end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

$$\begin{aligned}
\langle A, \lambda B + C \rangle &= Tr({}^tA(\lambda B + C)) \\
&\cancel{= Tr({}^tA} + \\
&= Tr(\lambda {}^tAB + {}^tAC) \\
&= \lambda Tr({}^tAB) + Tr({}^tAC) \quad \text{car } Tr \text{ est linéaire} \\
&= \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle
\end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite donc

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths approfondies.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

bilinéaire par symétrie.

On note ~~À~~ $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $[A]_{i,j}$ le coefficient de A placé à la i-ème ligne et j-ème collonne.

~~$\in Tr^t$~~

$$\langle A, A \rangle = Tr({}^tAA)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} [{}^tAA]_{i,i}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} [{}^tA]_{i,k} [A]_{k,i}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} [A]_{k,i}^2 \geq 0$$

. C.,> est positive

De plus, si $\langle A, A \rangle = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \underbrace{[A]_{k,i}^2}_{\geq 0} = 0$

~~Donc~~ Or une somme de termes positifs est nulle si tous ses membres sont nuls.

Donc $\forall (k,i) \in [\![1,p]\!]^2$, $[A]_{k,i}^2 = 0$

donc $[A]_{k,i} = 0$

Donc $A = 0$.

$<.,.>$ est alors défini

Bilan : $<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

13) b). Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. avec $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Alors d'après 12)c)

$\exists ! A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid f(M) = <A, M>$

En particulier,

$\exists A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \ f(M) = \mathrm{Tr}({}^tAM)$. (A)

Soit $g : \begin{cases} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto {}^tM \end{cases}$

Par linéarité de la transposée, il est clair que $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$.

Soit ~~$M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.~~ $M \in \mathrm{Ker}(g)$.

alors ${}^tM = 0$.

Donc ${}^t({}^tM) = {}^t0$

donc $M = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}\}$

Donc g est injectif et réalise une bijection de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans lui même d'après le corollaire du théorème du rang car $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$.

Donc on déduit de (*) que

$$\exists A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid f(M) = Tr({}^tA\,{}^tM)$$
$$= Tr({}^tM\,{}^tA)$$
$$= Tr({}^t(AM))$$
$$= Tr(AM)$$