Copie anonyme - n°anonymat :

P6-00034
974448
Maths S

Code épreuve : 297 **Nombre de pages :** 31 **Session :** 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ donc d'après la formule du rang :

$rg(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(Ker(f))$ et comme $\begin{cases} rg(f) = 1 \\ \dim(\mathbb{R}^n) = n \end{cases}$:

$\dim(Ker(f)) = n-1$

▷ $n \geq 2$ donc $\dim(Ker(f)) \geq 1$

Ainsi, $0 \in Sp(f)$

2-a) comme $rg(M) = 1$, toutes les colonnes de M sont proportionnelles à C
$\exists (l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que :

$M = (C \; l_2 C \; \dots \; l_n C)$

$ = C \, (1 \; l_2 \dots l_n)$ et en posant $L = (1 \, l_2 \dots l_n)$

$M = CL$

Ainsi, il existe une matrice $L = (1 \, l_2 \dots l_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~2-c) D'après q2-a) et q2-b)~~ :

~~$Tr(M) M = LC\ CL$~~

3) $M.C = CL.C$ (d'après q2-a))

$= C.Tr(M)$ (d'après q2-b))

$M.C = Tr(M).C$

comme C est supposée non nulle, alors on peut conclure :

$Tr(M)$ est valeur propre de M, et donc de f

4) Comme d'après q1-, $\dim(E_0(f)) = n-1$

où on a noté $E_0(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0

Et que $\begin{cases} \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n \\ \dim(E_{Tr(M)}(f)) \geq 1 \end{cases}$

Alors $Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$ et comme $Tr(M) = 0$

$Sp(f) = \{0\}$

▷ Supposons que M est diagonalisable

Alors $M = 0 . I_n$ ce qui absurde car f est non nulle
$= 0_n$ $(rg(f) = 1)$

2/

Donc, on peut conclure :

M n'est pas diagonalisable

5- Comme $Tr(M) \neq 0$ et que d'après q4-, $sp(f) = \{0, Tr(M)\}$

Alors $n \leq \sum_{\lambda \in sp(f)} \dim(E_\lambda(f))$

$\leq \dim(E_0(f)) + \dim(E_{Tr(M)}(f))$

$\leq n$

Donc, $\sum_{\lambda \in sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$

Ainsi, on peut conclure :

f est diagonalisable

2-b) $LC = CL(C)_{1,1}$ (car $LC \in \mathbb{R}$)

$= \sum_{i=1}^{n} C(L)_{1,i}\, C(C)_{i,1}$

$= \sum_{i=1}^{n} C(C)_{i,1}\, C(L)_{1,i}$

$= \sum_{i=1}^{n} C(CL)_{i,i}$ et par définition de Tr :

$= Tr(CL)$ et donc d'après q2-a) :

$LC = Tr(M)$

2-c) $M^2 = (CL).(CL)$

$= C(L.C)L$ et d'après q2-b)

$= Tr(M)(CL)$ d'où :

$M^2 = Tr(M^T M)$.

Partie II

6-a) $AX = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{6}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ 6x + cy + z = 0 \end{cases}$ et comme $a \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} ax + y + \frac{a}{6}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ 6x + cy + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} ax + y + \frac{a}{6}z = 0 \\ \frac{ac-6}{6c}z = 0 \\ 6x + cy + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a6x + 6y + az = 0 \\ \frac{ac-6}{6c}z = 0 \\ a6x + acy + az = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a6x + 6y + az = 0 \\ \frac{ac-6}{6c}z = 0 \\ (ac-6)y = 0 \end{cases}$

Supposons que $ac \neq 6$

Alors d'après la dernière équivalence du système précédent :

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ d'où $\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$

Donc, A est inversible, ce qui est absurde

Ainsi, $ac = 6$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) Notons A_1, A_2 et A_3 les 3 colonnes de A

▷ $a A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ ac \end{pmatrix}$ et comme d'après q6-a), $ac = 6$:

$= \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 6 \end{pmatrix}$

$= A_1$

▷ $6 A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/c \\ 6 \end{pmatrix}$ et comme $6/c = ac/c = a$:

$= \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 6 \end{pmatrix}$

$= A_1$

Ainsi, $rg(A) = 1$

7-a) ▷ Comme $rg(g) = 1$, d'après la formule du rang :

$dim(Ker(g)) = 2$
≥ 1

Donc, $0 \in Sp(g)$

▷ $A.A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3a \\ 36 \end{pmatrix}$ (car $ac = 6$)

Donc, $A.A_1 = 3A_1$ et $A_1 \neq 0_{3,1}$

Ainsi, $3 \in sp(g)$

D'où, $3 \leqslant dim(E_0(A)) + dim(E_3(A)) \leqslant n$

Donc, $\sum_{\lambda \in sp(A)} E_\lambda(A) = 3$

Donc, A est diagonalisable et $sp(A) = \{0, 3\}$

D'où, g est diagonalisable et $sp(g) = \{0, 3\}$

6) cf page 16

Exercice 2 :

Partie 1 :

1) ▷ $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant 0$

▷ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1

▷ on étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

Soit $A > 1$.

$\int_1^A f(x)\,dx = c \int_1^A \frac{1}{x^{c+1}}\,dx$

$= c \int_1^A x^{-c-1}\,dx$ et comme $c \neq 0$:

$= c \left[\frac{x^{-c}}{-c} \right]_1^A$

$\int_1^A f(x)\,dx = c\left(-\frac{1}{cA^c} + \frac{1}{c}\right)$

Comme $\lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{cA^c} = 0$, alors $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)\,dx = c \times \frac{1}{c}$
$= 1$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Donc, f peut être considéré comme une densité

2) ▷ $x^2 f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{c}{x^{c-1}}$ et comme $c > 2$, alors $c-1 > 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}}\,dx$ converge (intégrale de Riemann) et

$\forall x \geq 1$, $\frac{c}{x^{c-1}} \geq 0$ donc par comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$
$= \int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

converge (absolument) donc X admet un moment d'ordre

2 d'après le théorème de transfert:

Ainsi, X possède une espérance et une variance

▷ Soit $A > 1$

$\int_1^A x f(x)\,dx = \int_1^A \frac{c}{x^c}\,dx$

$= c\left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right]_1^A$

$= c\left(-\frac{1}{cA^{c-1}} - \frac{1}{-c+1}\right)$

Comme $\lim_{A \to +\infty} -\frac{1}{cA^{c-1}} = 0$, alors on obtient:

$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A x f(x)\,dx = \frac{c}{c-1}$ d'où:

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{c}{c-1}$ donc:

$$E(X) = \frac{c}{c-1}$$

▷ Soit $A > 1$

$$\int_1^A x^2 f(x)\,dx = c \int_1^A x^{1-c}\,dx$$

$$= c \left[\frac{x^{2-c}}{2-c} \right]_1^A$$

$$= c \left(\frac{1}{(2-c)A^{c-2}} - \frac{1}{2-c} \right)$$

Comme $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{(2-c)A^{c-2}} = 0$ alors :

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A x^2 f(x)\,dx = \frac{c}{c-2}$ donc :

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{c}{c-2}$ d'où :

$$E(X^2) = \frac{c}{c-2}$$

Donc, d'après la formule de Koenig-Hüygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

$$= \frac{c(c-1)^2 - (c-2)c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c(c^2-2c+1) - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$V(X) = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3- $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc :

▷ $\forall x < 1, \quad F(x) = 0$

▷ $\forall x \geq 1, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_{1}^{x} f(t)\,dt$

$= c \int_{1}^{x} t^{-c-1}\,dt$ et d'après q1-

$= c\left(-\frac{1}{cx^c} + \frac{1}{c}\right)$

$= -\frac{1}{x^c} + 1$

$\forall x \geq 1, \quad F(x) = 1 - \frac{1}{x^c}$

4-a) $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc :

$Y(\Omega) = [0, +\infty[$

▷ $\forall x < 0, \quad G(x) = 0 = F(x)$

▷ $\forall x \geq 0, \quad G(x) = P(\ln(X) \leq x)$ et comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$= P(X \leq e^{x})$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall x \geq 0, \quad G(x) = F(e^x)$

6) D'après l'expression de F trouvée en q3-, on obtient :

$\forall x \geq 0, \quad G(x) = 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^c$

$= 1 - e^{-cx}$

Donc, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ (ce qui est licite car $c > 0$)

c)
```
def simulX(c):
        y = rd.exponential(1/c)
        x = np.exp(y)
        return x
```

Partie 2 :

5-
```
def simulZ(c):
        a = simulX(c)
        b = simulX(c)
        z = a*b
        return z
```

6- ▷ Comme $E(X_1)$ et $E(X_2)$ existent et que X_1 et X_2 sont indépendantes, $E(Z)$ existe et d'après q2- :

$E(Z) = E(X_1)\,E(X_2)$

$= \frac{c^2}{(c-1)^2}$

▷ comme X_1 et X_2 sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes et comme $E(X_1^2)$ et $E(X_2^2)$ existent, alors $E(Z^2)$ existe :

$$E(Z^2) = E((X_1 X_2)(X_1 X_2))$$

$$= E(X_1^2 X_2^2)$$

$$= E(X_1^2)E(X_2^2)$$ et d'après q2- :

$$E(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2((c^2-2c+1)(c^2-2c+1) - c^2(c^2-4c+4))}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^4-2c^3+c^2-2c^3+4c^2-2c+c^2-2c+1-c^4+4c^3-4c^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7-a) $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ (q 4-b)) donc :

$$cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$

De même, $cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

b) comme $\gamma(1) = \mathcal{E}(1)$ et que d'après le lemme des coalitions, cY_1 et cY_2 sont indépendantes, par stabilité de la loi gamma :

$$cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$$

8-a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x)$ et comme $c > 0$:

$$= \mathbb{P}(cY_1 + cY_2 \leq cx)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad H(x) = K(cx)$$

▷ comme $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad K'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x^{2-1} e^{-x}}{\Gamma(2)} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$ soit :

$$K'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$ car $\Gamma(2) = 1! = 1$

Donc, une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = K'(cx)$$

$$= \begin{cases} c \cdot cx e^{-cx} & \text{si } cx \geq 0 \\ 0 & \text{si } cx < 0 \end{cases}$$ et comme $c > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Maths appo EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) ▷ $\forall x \geq 1$, $F_2(x) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x)$ et comme $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$= \mathbb{P}(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$

$= \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$

$\forall x \geq 1$, $F_2(x) = H(\ln(x))$

▷ $\forall x < 1$, $F_2(x) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x)$ et comme $(X_1 X_2)(\Omega) = [1, +\infty[$:

$= 0$

Ainsi, d'après Q8-a), une densité f_2 de Z est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} h(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ soit :

$= \begin{cases} \frac{1}{x} c^2 \ln(x) e^{-c\ln(x)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ soit :

$= \begin{cases} \frac{1}{x} c^2 \ln(x) x^{-c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

9-2) Soit $\alpha > 1$

~~$x \mapsto \frac{\ln x}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$~~

~~$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)$~~

~~En effet, par croissances comparées :~~

~~$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha+1} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} x$~~

Soit $A > 1$

$\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$

$f'(x) = x^{-\alpha}$ $\quad f(x) = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

$g(x) = \ln x$ $\quad g'(x) = \frac{1}{x}$

Comme f et g sont de classe C^1 sur $[1, A]$, par croissance de l'intégration :

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \left[\ln x \, \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha+1}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \int_1^A x^{-\alpha} dx\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

et comme $\alpha - 1 > 0$, $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{(1-\alpha) A^{\alpha-1}} = 0$

et par croissances comparées,

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} = 0$$

Donc, en faisant tendre A vers $+\infty$, on peut conclure que :

$$\forall \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

6) On a déjà montré en q6- que $E(Z)$ et $V(Z)$ existent

▷ $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx$ et donc d'après q8-6) :

$= \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln x}{x^c} dx$ et d'après q9-a), pour $\alpha = c > 2$:
> 1

$= c^2 \frac{1}{(1-c)^2}$ soit :

$$E(Z) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

▷ $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x) dx$ (d'après le théorème de transfert).

$= \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln x}{x^{c-1}} dx$ et d'après q9-a), pour $\alpha = c-1 > 1$:

$$E(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens et le calcul effectué en q6-, on obtient :

$$V(2) = \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

Retour exercice 1 :

7-6) Posons, $\forall n \geq 1$, $A(n)$: " $A^n \in Vect(A)$ "

▷ $A \in Vect(A)$ donc $A(1)$ est vraie

▷ Soit $n \geq 1$. Supposons que $A(n)$ est vraie

$A^{n+1} = A . A^n$ et comme $A^n \in Vect(A)$ d'après $A(n)$

$A^{n+1} \in Vect(A^2)$

or, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$

et donc en utilisant la relation établie en Q6-a), $ac = b$, on obtient :

$= \begin{pmatrix} 3 & 3/a & 3/b \\ 3a & 3 & 3/c \\ 3b & 3c & 3 \end{pmatrix}$

$A^2 = 3 . A$

Donc, $A^{n+1} \in Vect(3A)$
$\in Vect(A)$

Ainsi, $A(n+1)$ est vraie

▷ $\forall n \geq 1$, $A(n)$ est vraie

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 3 :

1-a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})$

et comme $F_1, \dots, F_k, P_{k+1}$ sont indépendants

$= \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(F_i)\right) \mathbb{P}(P_{k+1})$

$= (1-p)^k p$

$\mathbb{P}(X=k) = pq^k$

b) Soit $N \geq 1$

$\sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{N} k p q^k$

$= pq \sum_{k=1}^{N} k q^{k-1}$

Comme $|q| < 1$, la série "dérivée" première $\sum_{k \geq 1} k q^{k-1}$ converge, donc la série $\sum_{k \geq 0} k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge (absolument)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, $E(X)$ existe et $E(X) = \frac{pq}{(1-q)^2}$

$$E(X) = \frac{pq}{p^2}$$

$$E(X) = \frac{q}{p}$$

▷ $\sum_{k=0}^{N} k^2 \mathbb{P}(X=k) = p \sum_{k=1}^{N} k^2 q^k$

$= p \sum_{k=1}^{N} (k(k-1)+k) q^k$

$= pq^2 \sum_{k=2}^{N} k(k-1) q^{k-2} + pq \sum_{k=1}^{N} k q^{k-1}$

comme $|q|<1$, la série "dérivée" première $\sum_{k\geq 1} k q^{k-1}$

et la série "dérivée" seconde $\sum_{k\geq 2} k(k-1) q^{k-2}$ convergent

donc la série $\sum_{k\geq 0} k^2 \mathbb{P}(X=k)$ converge (absolument)

Ainsi, d'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe

et $E(X^2) = pq^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} + pq \cdot \frac{1}{(1-q)^2}$

$= \frac{pq^2}{p^3} + \frac{q}{p}$

$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{qp}{p^2}$

$= \frac{q(q+p)}{p^2}$ et comme $q+p=1$

$E(X^2) = \frac{q}{p^2}$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{q}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$

$= \frac{q(1-q)}{p^2}$

$= \frac{qp}{p^2}$

$V(X) = \frac{q}{p}$

2-a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $(Y = k) = (3Y = 3k)$ et comme $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$:

$= \bigcup_{i=0}^{2} (X = 3k + i)$

b) D'après Q2-a), $\forall k \in \mathbb{N}$:

$P(Y = k) = P\left(\bigcup_{i=0}^{2} (X = 3k+i)\right)$ et par incompatibilité des évènements entre eux :

$= \sum_{i=0}^{2} P(X = 3k+i)$

et d'après Q1-a) :

$= \sum_{i=0}^{2} p q^{3k+i}$

$= pq^{3k} + pq^{3k+1} + pq^{3k+2}$

$= q^{3k}(p + pq + pq^2)$

$P(Q=k) = q^{3k}(1-q+(1-q)q+(1-q)q^2)$

$= q^{3k}(1-q+q-q^2+q^2-q^3)$

$= q^{3k}(1-q^3)$

$= (1-q^3)(q^3)^k$

$P(Q=k) = (1-q^3)(1-(1-q^3))^k$

Donc, on peut conclure d'après q1-, pour $p = 1-q^3$:

Q suit la loi $GN(1-q^3)$

3) ~~$P(R=0) = P(X=3Q)$~~

~~4) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après q3- et q2-c) :~~

~~$P(R=0)P(Q=k) = \frac{1}{1+q+q^2}(1-q^3)(1-(1-q^3))^k$~~

~~$= \frac{(1-q^3)q^{3k}}{1+q+q^2}$~~

~~Et, $P((R=0)\cap(Q=k)) =$~~

5-a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc :

$\forall k \in \mathbb{N}, \ P(Y=k) = p(1-p)^k$

$(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(Y+1=k) = P(Y=k-1)$

$= p(1-p)^{k-1}$

Donc, $Y+1 \hookrightarrow G(p)$

Ainsi la fonction suivante est une simulation de

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

la variable $(X+1)-1 = X$ et donc renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice

6)
```
def div(p):
    X = simulX(p)
    q = simulX(1-(1-p)**3)
    r = X - 3*q
    return(X,q,r)
```

Problème

1- Soit $k \in \mathbb{Z}$

$$h(k+1) = \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{1}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{1} + 2\pi\right)$$ et comme cos est 2π-périodique :

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{1}\right)$$

$h(k+1) = h(k)$

Donc, $h \in F_1$

2-▷ Soit θ l'application nulle de E

$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \theta(k+1) = 0 = \theta(k)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc, $0 \in F_1$

▷ Soit $(\lambda, h_1, h_2) \in \mathbb{R} \times F_1 \times F_1$

$\forall h \in \mathbb{R}$, $(\lambda h_1 + h_2)(h+1) = \lambda h_1(h+1) + h_2(h+1)$

et comme $(h_1, h_2) \in F_1^2$

$= \lambda h_1(h) + h_2(h)$

$= (\lambda h_1 + h_2)(h)$

Donc, $\lambda h_1 + h_2 \in F_1$

Ainsi, F_1 est un sous-espace vectoriel de E

3- Soit $f \in F_1$

~~$f(h) = f(1q + r)$ et comme $q \in \mathbb{Z}$ et que f est 1-périodique :~~

~~$= f(r)$~~

Posons, $\forall m \in \mathbb{N}$, $A(m)$: " $f(h + m1) = f(h)$ "

▷ $f(h) = f(h + 0 \times 1)$ donc $A(0)$ est vraie

▷ Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $A(m)$ est vraie

$f(h + (m+1)1) = f(h + 1 + m1)$ et d'après $A(h)$:

$= f(h+1)$ et comme f est 1-périodique :

$= f(h)$

Donc, $A(m+1)$ est vraie

$\triangleright$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $A(m)$ est vraie

On montre également que $\forall m \in \mathbb{Z}$, $f(h+mn) = f(h)$

Donc, comme $q \in \mathbb{Z}$, $f(h) = f(r+nq)$
$= f(r)$

4-a) Soit $f \in F_n$. En utilisant la décomposition donnée par q3-

Soit $h \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(h) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(nq+r)$

et comme $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $e_i \in F_n$, d'après q3-

$= \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(r)$

et comme $r \in I_n$, par définition des e_i

$= f(r)\, e_r(r)$

$= f(r)$

et donc d'après q3- :

$\forall h \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(h) = f(h)$

b) comme $\forall i \in I_n$, $e_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
$\forall f \in F_n$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

on a d'après q4-a) :

$\forall f \in F_n$, $f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i$

Donc B_n est génératrice de F_n

▷ Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

Supposons que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$

En évaluant cette égalité pour $h \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\lambda_h e_h(h) = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\lambda_h = 0 \quad \text{et ceci } \forall h \in [\![0, n-1]\!]$$

Donc, B_n est libre

Ainsi, on peut conclure :

La famille B_n est une base de F_n

c) $\forall f \in F_n, \ f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i$

Donc, $(f(0), \dots, f(n-1))$ sont les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans la base B_n

5-a) Soit $(\lambda, f_0, f_1, g_0) \in \mathbb{R} \times F_n^3$

▷ $\langle f, g \rangle = \sum_{h=0}^{n-1} f(h) g(h)$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} g(h) f(h)$$

$$= \langle g, f \rangle$$

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

▷ $\langle \lambda f_0 + f_1, g_0 \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f_0 + f_1)(k)\, g_0(k)$

$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f_0(k)\, g_0(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f_1(k) g_0(k)$

$= \lambda \langle f_0, g_0 \rangle + \langle f_1, g_0 \rangle$

Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

▷ $\langle f_0, f_0 \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (f_0(k))^2$

≥ 0

▷ Supposons que $\langle f_0, f_0 \rangle = 0$

Comme $\forall k \in [\![0, n-1]\!], (f_0(k))^2 \geq 0$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], f_0(k) = 0$

Or, $\{k + nq \mid k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } q \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

Donc, comme f_0 est n-périodique,

$\forall k \in \mathbb{Z}, f_0(k) = 0$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_n

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ / $i \neq j$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k)$$

$$= e_j(i) \quad \text{et comme } i \neq j$$

$$= 0$$

$$\langle e_i, e_i \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (e_i(k))^2$$

$$= (e_i(i))^2$$

$$= 1$$

Donc, B_n est orthonormale pour ce produit scalaire

c) ~~D'après les formules trigonométriques rappelées :~~

$$\cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos}$$

D'après le résultat admis, comme $\sin(\frac{b}{2}) \neq 0$ (car $\frac{b}{2} \in]0,\pi[$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{1}{2\sin(\frac{b}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(\frac{b}{2})\cos(a+kb)$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{b}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin(a + \frac{(2k+1)b}{2}) - \sin(a + \frac{(2k-1)b}{2})\right)$$

et par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(ak+b) = \frac{\sin\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

d) ~~En appliquant l'égalité précédente pour $a=0$ et $b=\frac{4\pi}{n}$, on obtient~~

$$\cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{4n}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{2n}\right)}}$$

e) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$ et d'après les formules trigonométriques rappelées :

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + \frac{n}{2}$$

et comme $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$ (q5-d)) donc :

$$\|h\|^2 = \frac{n}{2}$$

$$\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

6-a) Soit $f \in F_n$

$\forall k \in \mathbb{Z},\ Df(k+n) = f(k+1+n) - f(k+n)$

et comme $f \in F_n$

$= f(k+1) - f(k)$

$\forall k \in \mathbb{Z}, \; Df(k+n) = Df(k)$

Donc, $\forall f \in F_n, \; Df \in F_n$

b) Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n \times F_n$. $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$D(\lambda f+g)(k) = (\lambda f+g)(k+1) - (\lambda f+g)(k)$$

et comme F_n est un sous-espace vectoriel de E (q2-1)

$$= \lambda\,(f(k+1) - f(k)) + g(k+1) - g(k)$$

$$= \lambda D(f)(k) + D(g)(k)$$

Donc, D est linéaire

De plus, d'après q6-a), $\forall f \in F_n, \; Df \in F_n$

Donc, on peut conclure :

$$D \in \mathcal{L}(F_n)$$

c) Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$Dh(k) = h(k+1) - h(k)$$

$$= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Et,

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Donc,~~

~~$-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)$~~

7-a)

8-a) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Delta(\varepsilon_0)(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1)$

$= 2-2$

$\Delta(\varepsilon_0)(k) = 0$

Donc, $\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$

b) ▷ $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$

▷ Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Delta)$

Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1)$

Donc,