Copie anonyme - n°anonymat :

Maths S

Z0-00227

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) Comme $rg(M)=1$, $rg(f)=1$ ~~Donc~~

On d'après le théorème du rang,

$\dim(\ker(f)) + rg(f) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Donc ~~$\dim \ker(f) = n-1$~~

Donc $\dim(\ker(f)) = n-1$

Ainsi f n'est pas injectif car $n-1>0$

Donc $f - 0.Id_{\mathbb{R}^n}$ n'est pas injectif

Donc $0 \in Sp(f)$

C'est-à-dire 0 est valeur propre de f.

2a) $C \neq 0$ donc en notant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ | \\ c_n \end{pmatrix}$

$\exists i \in [\![1,n]\!] \,/\, c_i \neq 0$.

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$ posons ~~$l_j = \frac{m_{i,j}}{c_i}$~~

~~Ave~~ $l_j = \dfrac{m_{i,j}}{c_i}$

~~alors~~ avec $m_{i,j}$ le coefficient de M à la i-ème ligne et j-ème colonne.

~~X~~ Donc ~~$\forall (u,v) \in [\![2,n]\!]^2$~~,

déjà $(CL)_{1,1} = c_1 \cdot 1 = m_{1,1}$

et $\forall (u,v) \in [\![1,n]\!]^2 \setminus \{1,1\}$,

$(CL)_{u,v} = c_u l_v$

$=$

N'aboutit pas

2.b). $Tr(M) = Tr(CL)$ d'après 2.a)
$= Tr(LC)$ par propriété de Tr
$= LC$ car $LC \in \mathbb{R}$

2.c) $M^2 = CLCL$
$= C\, Tr(M) L$ (2.b)
$= Tr(M) CL$
$= Tr(M) M$ (2.a)

3) $M = CL$ 2.a)
donc $MC = CLC$
donc $MC = C\,Tr(M)$ 2.b)
donc $MC = Tr(M) C$
or $C \neq 0$ par hypothèse donc C est vecteur propre de M associé à la valeur propre $Tr(M)$.

Donc $Tr(M) \in Sp(f)$

4) ~~Ainsi~~ D'après ~~3)~~, (2 ·C),

$M^2 - Tr(M)M = 0$

Donc $\cancel{X^2 - Tr X}$ $X^2 - Tr(M)X$ est annulateur de f.

Donc $Sp(f) \subset \{0, Tr(M)\}$

Donc d'après 1) et 3), $Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$

donc si $Tr(M) = 0$, $Sp(f) = \{0\}$.

or $\dim(\ker(f)) = n-1 < n$ donc

f n'est pas diagonalisable donc M n'est pas diagonalisable.

5) D'après le raisonnement de la question 4), $Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$

Donc f admet deux valeurs propres distinctes.

or $\dim(\ker f - Tr(M) Id_E) \geq 1$

et d'après 1), $\dim(\ker(f)) = n-1$

Donc $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker f - Tr(M) Id_E) \geq n$

Donc f est diagonalisable.

6a). $AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $AX = 0$

$$\iff \begin{cases} x + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \dfrac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 & L_1 \leftarrow abL_1 \text{ car } ab \neq 0 \\ cax + cy + z = 0 & L_2 \leftarrow cL_2 \quad (c \neq 0) \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

~~Ainsi, supposons que $ac \neq b$, alors le système n'admet pas de solution car $L_2 - L_3$ donne $(ca - b)x =$~~

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ cax + cy + z = 0 \\ (ca \overset{*}{-} b)x = 0 & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}$$

* c'est un signe $-$

Supposons que $ca \neq b$ alors $x = 0$.

Donc $AX = 0$

$$\iff \begin{cases} by + az = 0 \\ cy + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} by + az = 0 \\ (ac - b)y = 0 & L_2 \leftarrow aL_2 - L_1 \\ x = 0 \end{cases}$$

or $ac - b \neq 0$ donc $y = 0$

car $a \neq 0$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 36 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Donc 0 n'est pas valeur propre de A ce qui est absurde car A n'est pas inversible

Donc $ac = b$

b) On a alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $A = (C_1 | C_2 | C_3)$

avec $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ ac \end{pmatrix}$ $C_2 = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$

et $C_3 = \begin{pmatrix} 1/ac \\ 1/c \\ 1 \end{pmatrix}$

On a clairement $C_1 = a C_2$

et $C_1 = ac C_3$.

Donc $rg(A) = rg(C_1, C_2, C_3) = rg(C_1) = 1$

car $C_1 \neq 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Bilan : $\gamma(A) = 1$

7a). $Tr(A) = 3 \neq 0$ donc d'après la partie 1, g est diagonalisable et $Sp(g) = \{0, 3\}$. On est ~~bien~~ bien dans le cadre de la partie 1 car $\gamma(M) = 1$

7b). $\forall n \in \mathbb{N}^*$, notons

$P(n)$: " $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid A^n = \lambda A$ "

Initialisation :

$A^1 = A = 1.A$

$P(1)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie.

~~alors $A^{n+1} =$~~ alors $\exists \lambda_n \in \mathbb{R} \mid A^n = \lambda A$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad A^{n+1} &= \lambda_n A^2 \\ &= \lambda_n (Tr(A) A) \quad (2.c) \\ &\cancel{= \lambda Tr} \\ &= 3\lambda_n A \end{aligned}$$

En posant $\lambda_{n+1} = 3\lambda_n$. on a bien

$\exists \lambda_{n+1} \in \mathbb{R} \mid A^{n+1} = \lambda_{n+1} A$. $P(n)$ est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid A^n = \lambda A^n$.

autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \in \mathrm{Vect}(A)$

Exercice 2

1) ~~Soit $A \in \mathbb{R}$.~~

~~Soit $A \geqslant 1$.~~

$c > 2$ donc $c \geqslant 0$ donc il est clair que f est positive.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1

Soit $A \geqslant 1$.

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx = \int_{1}^{A} \frac{c}{x^{c+1}}\,dx$$

$$= c \int_{1}^{A} x^{-c-1}\,dx \quad \text{~~car c+~~}$$

$$= c \left[\frac{x^{-c}}{-c} \right]_1^A \quad \text{car } c+1 > 1$$

$$= -\frac{1}{A^c} + 1 \quad \text{or } c > 0$$

Donc $-\frac{1}{A^c} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1

Donc f est une densité

2) Soit ~~$A \in \mathbb{R}$~~. $A \geq 1$.

$$\int_{-\infty}^{A} x f(x)\, dx = \int_{1}^{A} \frac{c}{x^c}\, dx$$

$$= c \int_{1}^{A} x^{-c}\, dx$$

$$= c \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A \quad \text{car } c \neq 1$$

$$= c \left(\frac{1}{(1-c)A^{c-1}} - \frac{1}{1-c} \right)$$

or $c > 1$ donc

$$\int_{-\infty}^{A} x f(x)\, dx \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{c}{c-1}$$

Donc X admet une espérance qui vaut $\frac{c}{c-1}$

De même, $\int_{-\infty}^{A} x^2 f(x)\, dx = \int_{1}^{A} c\, x^{-c+1}\, dx$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies ECRICOME

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\int_{-\infty}^{A} x^2 f(x)dx = c\left[\frac{x^{-c+2}}{2-c}\right]_1^A$

car $c>2$

Donc de même comme $c>2$,

$\int_{-\infty}^{A} x^2 f(x)dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{c}{c-2}$

Donc X admet un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{c}{c-2}$ par théorème de transfert

~~D~~ Donc par théorème, X admet une variance et

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$

$= \frac{c(c-1)^2 - c(c-2)}{(c-2)(c-1)^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $V(X) = \dfrac{c\left(c^2 - 2c + 1 - c + 2\right)}{(c-2)(c-1)^2}$

$= \dfrac{c\left(c^2 - 3c + 3\right)}{(c-2)(c-1)^2}$

3). $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $\forall x < 1$,

$F(x) = 0$.

$\forall x \geq 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{x} c\,x^{-c-1}\,dx$

$= c\left[\dfrac{x^{-c}}{-c}\right]_1^x$ $(-c-1 \neq -1)$

$= -\dfrac{1}{x^c} + 1$

$\cancel{= 1}$

$= 1 - \dfrac{1}{x^c}$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

4). $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc $\forall x < 0$,

$G(x) = 0 = F(x)$.

$\forall x \geq 0$,

$$G(x) = P(\ln(X) \leq x)$$
$$= P(X \leq e^{x})$$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$
$$= F(e^{x})$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x < 0 \\ F(e^{x}) & \text{sinon} \end{cases}$

4.b). Donc d'après 4.a),

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{e^{cx}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ 1 - e^{-cx} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\ln(X) = Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

4c). ~~def simulX(c):~~
~~y = rd.exponential(1/c)~~
~~return np.log(y)~~

On a $X = \exp(Y)$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

Donc

```
def simulX(c):
    y = rd.exponential(1/c)
    return np.exp(y)
```

5) ~~def simulZ(c):~~
~~a = simul(X)(c)~~
~~b = simul~~

```
def simulZ(c):
    a = simulX(c)
    b = simulX(c)
    return a+b
```

6) $E(Z) = E(X_1 X_2)$

$= E(X_1)E(X_2)$ par indépendance

$= \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$ d'après 2)

$E(Z^2) = E(X_1^2 X_2^2)$

$= E(X_1^2)E(X_2^2)$ car X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc

$$E(Z^2) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2.$$

Donc $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$ (Huygens).

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2((c-1)^4}$$

$$\cancel{= c^2(c^4+4c^3}$$

$$= \frac{c^2(c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 1 - c^4 + 4c^3 - 4c^2)}{(c-2)^2((c-1)^4}$$

d'après le binôme de Newton

$$= \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7a). ~~$cY_1(\Omega$~~

Soit $i \in \{1,2\}$.

$cY_i(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$P(cY_i \leq t) = P(Y_i \leq \frac{t}{c})$

$= 1 - e^{-c \cdot \frac{t}{c}}$

$= 1 - e^{-t}$

Donc $\forall i \in \{1,2\}$, $cY_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

7b) ~~On~~ donc cY_1 et cY_2 suivent une loi gamma de paramètre 1.

or X_1 et X_2 sont indépendantes.

Donc d'après le lemme des coalitions, Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

Donc par stabilité de la loi gamma : $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$

8a) ~~$H(\Omega)=$~~

$Y_1 + Y_2(\Omega) = c(Y_1+Y_2)(c\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$H(t) = P(Y_1 + Y_2 \leq t)$$
$$= P(cY_1 + cY_2 \leq ct)$$
$$= K(ct)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = K(cx)$

Une densité de $Y_1 + Y_2$ est H' donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} cK'(cx) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c(cx)^1 e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $c(Y_1+Y_2) \hookrightarrow \gamma(2)$.
d'après 7.b).

$$= \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

8 b/. $Z(\Omega) = [1, +\infty[$.

Donc Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$F_Z(x) = P(X_1 X_2 \leq x)$$
$$= P(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x))$$ ($\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)
$$= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$$
$$= H(\ln(x)).$$

or on peut prendre $f_2 = F_2'$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} h(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'après 8 a)
$$= \begin{cases} \frac{1}{x} c^2 \ln(x)\, x^{-c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

---

9 a). ~~Soit $A \geq 1$. posons $u = \ln(x)$. alors $du = -\frac{1}{x} dx$~~

~~Donc~~ $\cancel{\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = -\int_0}$

Soit $A \geq 1$. par intégration par partie, comme tout est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$,

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^A - \underbrace{\int_1^A \frac{1}{(1-\alpha)x^\alpha} dx}_{\text{converge en } +\infty}$$

car $\alpha > 1$

donc d'après le critère de Riemann, et par croissance comparée entre $\ln$ et Id,

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge et vaut

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{x^\alpha} dx$$

On $\int_1^A \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left[\frac{1}{(-\alpha+1)x^{\alpha-1}}\right]_1^A$

$$= -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1\right)$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$

9b) admis

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 3

~~1/a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$.~~

~~Soit $k \in \mathbb{N}^*$.~~

~~$[X = k]$~~

~~Premier cas : $k = 1$.~~

~~alors $P(X = k) =$~~

1/a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$P(X=0) = P(P_1) = p$$

$\forall k \geq 1$,

$$P(X=k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \cap P_{k+1}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(F_i) \cdot P(P_{k+1})$$ par indépendance mutuelle des lancers.

$$= q^k p$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = q^k p$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{N} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} p k q^k$$

donc

$$\sum_{k=0}^{N} kP(X=k) = pq \sum_{k=0}^{N} k q^{k-1}$$

. On reconnaît alors une somme de série géométrique dérivée. Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{N} k P(X=k)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

Autrement dit, X admet une espérance qui vaut $E(X) = pq \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1}$

$$= \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

Donc $\underline{E(X) = \frac{q}{p}}$

De même, X^2 admet une espérance

et $E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X=k)$ par théorème de transfert

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p q^k$$

$$= pq \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1+1) q^{k-1}$$

$$= pq\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) q^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1}\right)$$

$$= pq\left(q \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1}\right)$$

Donc $E(X^2) = pq\left(\dfrac{2q}{(1-q)^3} + \dfrac{1}{(1-q)^2}\right)$

$$= pq\left(\frac{2q}{p^3} + \frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2q^2 + p}{p^2}.$$

Donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\cancel{= \frac{2p^2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{p^2}{q^2}}$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

2) a). Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\cancel{(Q=k) = 3Q}$

$(Q=k) = (3Q = 3k)$

$= (3Q + R = 3k + R)$

$= (X = 3k + R)$

$= \displaystyle\bigcup_{i=0}^{2} (X = 3k+i, R = i)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 36	Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2b/ admis

3) admis

4) admis

5/a). Car X ~~ne~~ est la variable qui renvoit le ~~rang~~ dernier lancer ayant obtenu face avant le premier pile.

C'est donc la variable qui renvoit la valeur de rang ~~étant~~ juste avant le premier succès.

5b). def div(p):

```
    ~~X~~ = simulX(p)
    Q = simulX(1-(1-p)**3)
    R = X - 3*Q
    return (X, Q, R)
```

Problème.

1/ Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$f_n(k+n) = \cos\left(\dfrac{2(k+n)\pi}{n}\right)$

Donc $h(k+n) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$

$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ car $\cos$ est 2π-périodique.

$= h(k)$ ceci pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $h \in F_n$.

2) ~~Soit~~ Notons θ l'application nulle de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$

alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\theta(k+n) = 0 = \theta(k)$.

Donc $\theta \in F_n$.

Soit $(\lambda, g, h) \in \mathbb{R} \times F_n^2$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$(\lambda g + h)(k+n) = \lambda g(k+n) + h(k+n)$$
$$= \lambda g(k) + h(k)$$
$$= (\lambda g + h)(k)$$

Donc par théorème de caractérisation des sous espaces vectoriels,

F_n est un sous espace vectoriel de E.

3) ~~Soit~~ $\cancel{f \in F_m}$.

~~$\forall i \in [\![0, m]\!]$, notons $P(i)$: $f(k) = f((m-i)q+r)$~~

~~Initialisation : $i = 0$.~~

~~$f(k) = f(mq+r)$ par définition de k.~~

~~$P(0)$ est vrai.~~

~~Hérédité : Soit $i \in [\![0, m]\!]$, supposons que $P(i)$ soit vraie~~

~~$f((m-i)q+r) = f($~~

Soit $f \in F_m$.

$$
\begin{aligned}
f(k) &= f(mq+r) \\
&= f((q-1)m + r + m) \\
&= f((q-1)m + r) \\
&= f((q-2)m + r + m) \\
&= f((q-2)m + r) \\
&= \dots \quad \text{en itérant} \\
&= f((q-q)m + r + m) \\
&= f(r)
\end{aligned}
$$

Donc $\underline{f(k) = f(r)}$

~~3)~~

4) a) $\forall n \in I_{m-1}$,

$$f(n) = f(n) \underbrace{e_n(n)}_{=1} + \underbrace{\sum_{i \in I_m \setminus \{n\}} f(i)\, e_i(n)}_{=0}$$

Donc $\forall n \in I_{m-1}$, $f(n) = \sum_{i=0}^{m-1} f(i)\, e_i(n)$.

Donc d'après 3),

$$f(k) = f(n) = \sum_{i=0}^{m-1} f(i)\, e_i(n).$$

Or comme $\underset{\forall i \in I_m}{e_i} \in F_m$,

$$\begin{aligned} e_i(n) &= e_i(k - mq) \\ &= e_i(k - m(q-1) - m) \\ &= e_i(k - m(q-1)) \\ &= \dots \quad \text{en itérant} \\ &= e_i(k - m(q-q)) \\ &= e_i(k). \end{aligned}$$

Donc ~~$\forall k \in \mathbb{N}$~~
$\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = \sum_{i=0}^{m-1} f(i)\, e_i(k)$

b) la question 4.a) montre que
$\forall f \in F_m$,

$$f = \sum_{i=0}^{m-1} f(i)\, e_i$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 36	Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc B_n est une famille génératrice de F_n

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ /

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0.$$

Soit $j \in I_n$.

alors en évaluant en j, il vient immédiatement

$$\lambda_j \underbrace{e_j(j)}_{=1} = 0$$

donc $\lambda_j = 0$.

Donc $\forall j \in I_n, \lambda_j = 0$ Donc

B_n est libre dans F_n

Bilan : B_n est une base de F_n

c) Comme ~~les~~ ~~Coeff~~ la décomposition d'un élément f

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

de F_n est unique dans la base B_n, alors d'après 3) : les coordonnées de $f \in F_n$ dans B_n sont $(f(0), \dots, f(n-1))$

5a). Soit $(\lambda, f, g, h) \in \mathbb{R} \times F_n^3$.

$$< f, g > = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(k) f(k)$$

$$= < g, f >$$

$< . , . >$ est symétrique

$$< \lambda f + g, h > = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(k) \cancel{g(k)} h(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(k) + g(k)) h(k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k) h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k) h(k)$$

$$= \lambda < f, h > + < g, h >$$

$< . , . >$ est linéaire à gauche, donc à droite par symétrie. Donc il est bilinéaire.

$$\langle g, g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(g(k))^2}_{\geq 0} \geq 0$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif

et $\langle g, g\rangle = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (g(k))^2 = 0$$

" Or une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(g(k))^2 = 0$

Donc $g(k) = 0$.

~~Don~~ d'après 3), $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$\exists r \in I_n \mid g(j) = g(r) = 0$

Donc $\forall j \in \mathbb{Z}$, $g(j) = 0$

g est nulle

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire

5 b). Soit $(i, j) \in I_n^2$.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{e_i(k)}_{=\begin{cases}1 \text{ si } k=i\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}} \underbrace{e_j(k)}_{=\begin{cases}1 \text{ si } j=k\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}}$$

Donc $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Bilan : ~~*~~ B_n est orthonormale

5 c). D'après ce qui est admis,

~~$\forall k \in I_n, \cos(a+kb) = \sin\left(a+\frac{2n-1}{2}b\right) - \sin a \; b$~~

~~$\forall k \in I_n$,~~ en divisant par $2\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$ des deux côtés et en sommant pour k allant de 0 à $n-1$ il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(a+\frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{(2k-1)b}{2}\right)}{\underbrace{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}_{\text{est une constante}}}$$

Comme $2k+1 = 2(k+1)-1$ par télescopage il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}b\right) - \sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

~~En posant $a = \frac{3k\pi}{n}$~~

~~et $b =$~~

d) Posons $b = \frac{4\pi}{n} \in \left]0, 2\pi\right[$ et $a = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 36	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

alors il vient

$$\cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) =}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \cancel{\sin}$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\left(\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

Or sin est 2π-périodique donc 4π-périodique donc

$$\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$

On pourrait montrer la deuxième inégalité de la même manière

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

en posant $b = \frac{4\pi}{n}$ et $a = \frac{2\pi}{n}$

5).c) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + 1}{2}$

$= 0 + \frac{n}{2}$ d'après 5.d

$= \frac{n}{2}$

Donc $\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$

6) a) $Df \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$

et Df est n-périodique en tant que somme d'application n-périodique.
Donc $Df \in F_n$

6b) Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n^2$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $D(\lambda f + g)(k) = \lambda f(k+1) - \lambda f(k)$
$+ g(k+1) - g(k)$
$= \lambda D(f) + D(g)$

De plus d'après 6.a), $D : F_n \to F_n$

Donc $\underline{D \in \mathcal{L}(F_n)}$

6c) Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$Dh(k) = \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

<u>admis</u>.

6) d) $\|Dh\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$

$= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}(2k+1)\right)\right)$

$= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)+1}{2}\right)$

$= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(n - \left(0 + \frac{n}{2}\right)\right)$

$= 2n\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Donc $\|Dh\| = \sqrt{2n\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ $\underbrace{}_{\geq 0}$

$= \sqrt{2n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

7/a). Soit $(f,g) \in F_n^2$.

~~$<f, g>$~~

$$<f, \Delta g> = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))$$

et $$<Df, Dg> = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k))(g(k+1) - g(k))$$

N'aboutit pas.

7b). Comme f et g jouent des rôles symétriques on peut dire que $\forall (f,g) \in F_n^2$,

$$<f, \Delta g> = -<Df, Dg>$$

et $$<\Delta f, g> = -<Dg, Df>$$

Donc $<f, \Delta g> = <\Delta f, g>$

Donc Δ est un endomorphisme symétrique

7c). Soit ~~f~~ $\lambda \in Sp(\Delta)$.

Soit f un vecteur propre associé.

$\Delta f = \lambda f$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2023

Épreuve de : Maths

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\underbrace{\langle \Delta f, \Delta f \rangle}_{= \|\Delta f\|^2 \geq 0} = \lambda \langle f, \Delta f \rangle$

Donc $\lambda \langle f, \Delta f \rangle \geq 0$

or donc $-\lambda \langle D_f, D_f \rangle \geq 0$ (Q.a)

Donc $-\lambda \| D_f \|^2 \geq 0$

Donc $\lambda \leq 0$

Donc $Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}_-$

8). Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\Delta(\varepsilon_0)(k) = 1 - 2 + 1 = 0$

Donc $\Delta(\varepsilon_0)$ est nulle

Donc $\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

b). On pourrait montrer ~~que~~ de même que toutes les fonctions constantes appartiennent au noyau de Δ donc

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$

8b) admis

9). $\|\varepsilon_0\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1}$

$= \sqrt{n}$

~~Donc d'après le processus de Schmidt,~~

~~En admet une base orthonormée~~

~~Donc $\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}}$ est normé.~~

~~Donc d'après le théorème de la base orthonormée~~ incomplète,

~~En ad~~

Donc $\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}}$ est normé.

or ε_0 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

Δ est symétrique donc diagonalisable.

On prend alors une base orthonormée constituée de ses vecteurs propres dont $\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}}$ puis on ~~la~~ l'orthonormalise avec le processus de Schmidt.

ainsi $f = \sum_{i=0}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

$= \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

on pose alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$,

$\alpha_i = \langle f, \varepsilon_i \rangle$.

9b). $\|Df\|^2 = \| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i D \varepsilon_i \|^2$.

or $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}^* \mid$

$D\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$

on $c = \min \{ |\lambda| , \lambda \in sp(\Delta) \setminus \{0\} \}$

Donc il vient

$\|Df\|^2 \geq c^2 \|f\|^2$.

On admet.

10a/ $\Delta(e_0)(0) = \cancel{e_0(1) - e_0}$

$e_0(1) - 2e_0(0) + e_0(-1)$

$= -2$

$\Delta(e_0)(1)$

N'aboutit pas.

10b/

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$= -3A$

Donc $X^2 + 3X$ est annulateur de A

Donc $Sp(A) \subset \{0, -3\}$.