Copie anonyme - n°anonymat :

Maths 2S

Z0-00227

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 29 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths ESCP BS/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

par définition, $nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$

Donc comme $n > 0$,

$$\frac{nx-1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

donc $x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$

or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

donc par théorème d'encadrement,

$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$ donc

$-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq -\frac{n}{2}$ $(-1 < 0)$

donc $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

on $\frac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc par théorème de comparaison,

$\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Partie 1.

3) a) Soit $x \in [-1, 1]$.

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}$

car $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$

~~Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, comme~~

on arcsin est la bijection réciproque de la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc par définition, $\forall x \in [-1, 1]$,

$(\sin(\arcsin(x)))^2 = x^2$.

finalement, $\forall x \in [-1, 1]$,

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

3.b). Notons f la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
alors $f^{-1} = \arcsin$ et $f' = \cos$

Donc $\forall x \in [-1, 1]$, $f' \circ f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Donc $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule qu'en 1 et en -1 sur $[-1,1]$.

Donc d'après le cours, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$\arcsin' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Donc $\forall x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (3.a).$$

Donc arcsin est en particulier continue sur $]-1,1[$ (car dérivable).

De plus, $\lim\limits_{t \to -1^+} \arcsin(t) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

et $\lim\limits_{t \to 1^-} \arcsin(t) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Donc arcsin est continue en -1 et 1

Bilan : arcsin est continue sur $[-1,1]$

4a). $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$, ~~et~~ dérivable sur $]0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.

Or $\sqrt{x} = 1 \iff x = 1$ donc comme arcsin est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur

$[0,1[$,

$x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ est continue sur $[0,1] \cap [0,1] = [0,1]$
et dérivable sur $]0,1] \cap [0,1[=]0,1[$.

Donc en multipliant par 2,

G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$

$\forall x \in]0,1[$,

$$g(x) = G'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} \quad \text{d'après 3.b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

4.b) $\forall x \in]0,1[$, $x > 0$ et $1-x > 0$
Donc $\sqrt{x} > 0$ et $\sqrt{1-x} > 0$
Donc $g(x) > 0$.

Ainsi

x	0		1
$g(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$
G	$\cancel{g}G(0)$ par continuité en 0	$\nearrow$	$G(1)$ par continuité de G en 1

or $G(0) = 0$ et $G(1) = 2\arcsin(1) = \pi$.

Finalement déterminons la convexité de G.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	**Nombre de pages :** 29	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths ESCP / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Comme il est clair (par opération de fonctions dérivables) que g est dérivable sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$,

$$g'(x) = -\frac{(-2x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}{x(1-x)}$$

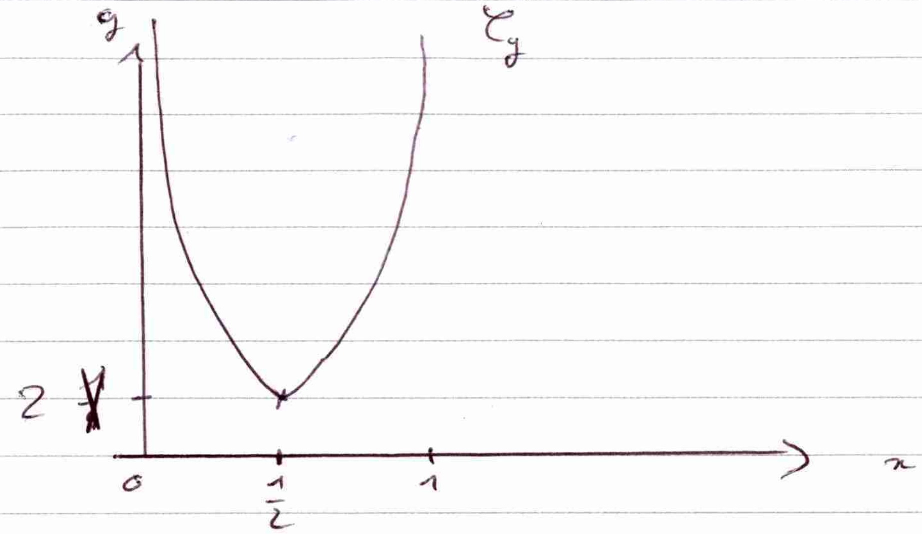
$$= \frac{2x-1}{2\left(x(1-x)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

donc $g'(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$.

Donc ~~g~~ G est concave sur $[0,\frac{1}{2}]$ et convexe sur $[\frac{1}{2},1]$. Prenons le tableau de g

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

(Au début j'avais confondu G et g dans la consigne)



5 a). g est positive et continue sur $]0,1[$

Donc f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1

~~De plus,~~ $\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} g(t)\,dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{\pi} g(t)\,dt}$ ~~(c'est une intégrale sur un segment non impropre)~~

$\cancel{7\ \frac{1}{\pi}}$

Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0,1[^2$.

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(t)\,dt = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{\pi} g(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[G(t)\right]_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(2\left(\arcsin(\sqrt{\varepsilon_2}) - \arcsin(\sqrt{\varepsilon_1})\right)\right)$$

Donc

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(t)\,dt \xrightarrow[\varepsilon_2 \to 1]{} \frac{1}{\pi}\left(G(1) - G(\varepsilon_1)\right)$$

(par continuité de G sur $[0,1]$.)

Donc $$\int_{\varepsilon_1}^{1} f(t)\,dt \xrightarrow[\varepsilon_1 \to 0]{} \frac{1}{\pi}\left(G(1) - G(0)\right) = 1$$ d'après 3.b)

Donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Or $\forall t \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$, $f(t) = 0$ donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$

Bilan : f est une densité de probabilité

5b) ~~Soit~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx \quad (*)$$

~~Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0,1[^2$.~~

~~$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} x f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$~~ ~~$u = 1-x$, $du = -dx$.~~

~~$$= -\frac{1}{\pi}\int_{1-\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\,du$$~~

Or $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

Notons alors $I = \pi \int_0^1 x f(x) dx$.

I est impropre seulement en 1.

~~Or $\sqrt{x} \longrightarrow 0$~~

Or $\frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{x} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 1$

~~Donc $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \underset{1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$~~

~~Donc $\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}$~~

Donc $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ or

d'après le critère de rieman,

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ converge donc par

théorème ~~d'ep~~ de comparaison sur les intégrales à termes positifs,

$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ converge donc

I converge. Le changement de variable

$u = 1-x$ est licite car ~~est~~

Copie anonyme - n°anonymat : 314672

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de : Maths ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$x \mapsto 1-x$ est de classe C^1 et réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

$du = -dx$ donc

$$I = -\int_1^0 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\,du$$

~~Donc I^2~~ =

$$\text{Donc } 2I = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x+1-x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= \cancel{G(1)}\ \pi \quad \text{d'après S. a).}$$

Donc $I = \frac{\pi}{2}$

Donc ~~pa~~ $E(X)$ existe et vaut $\int_0^1 x f(x)dx = \frac{I}{\pi} = \frac{1}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6a) $\frac{\pi}{2}U(\Omega) = [0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right)\cdot\right)^2(\Omega) = [0,1]$

Notons $T = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right)\right)^2$

Soit $t \in [0,1]$.

$F_T(t) = P\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq t\right)$

$= P\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \sqrt{t}\right)$

$= P\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right)\right) \leq \arcsin(\sqrt{t})\right)$ d'après 3.a)

~~$= P\left(\frac{\pi}{2}U \leq \sqrt{t}\right)$~~

$= P\left(U \leq \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t})\right)$

$= \frac{1}{\pi}G(t)$

Donc une densité de T est bien F_T'

et donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_T'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}g(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc ~~$T \hookrightarrow U[0,1]$~~

T suit une loi arcsinus

6b)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def arcsinus():
    u = rd.ran()
    v=(np.sin((np.pi/2)*u))**2
    return v
```

7). D'après 4.b), g est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Donc comme $\forall k \in [\![1, \frac{n}{2} - 1]\!] \cap \mathbb{N}^*$,

$\frac{k+1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}$. Alors

Soit $k \in [\![1, \frac{n}{2} - 1]\!] \cap \mathbb{N}^*$.

Soit $t \in [\![k, k+1]\!]$.

$$\frac{k}{n} \leq \frac{t}{n} \leq \frac{k+1}{n}$$

Donc $$g\left(\frac{k}{n}\right) \geq g\left(\frac{t}{n}\right) \geq g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Donc $$\int_k^{k+1} g\left(\frac{k}{n}\right) dt \geq \int_k^{k+1} g\left(\frac{t}{n}\right) dt \geq \int_k^{k+1} g\left(\frac{k+1}{n}\right) dt$$

Donc $$g\left(\frac{k}{n}\right) \geq n\left(G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En particulier,

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \geq n\left(G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Donc $$\frac{n}{\sqrt{k(n-k)}} \geq n\left(G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Donc $\forall n \geq 4$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \mid k \geq 1$ et $k \leq \frac{n}{2} - 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right)$$

On pourrait montrer de même, en prenant $t \in [k-1, k]$

que $\dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$

Et si on suppose ~~tq~~

$k \geq \frac{n}{2} + 1$ et $k \leq n-1$ alors

g est croissante sur cet intervalle donc

les inégalités s'inversent

8) Posons $(a_n) = (\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$.

On a bien $\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0$

$a_n \longrightarrow +\infty$.

et ~~a~~ à partir d'un certain rang,

Comme $\sqrt{n} = o(\lfloor nx \rfloor)$ car $x > 0$,

~~alors~~ $1 \leq a_n \leq \lfloor nx \rfloor$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on admet la limite.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 29 | Session : 2023

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie II

9). Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$Y_i(\Omega) = \frac{1}{2}(X_i + 1)(\Omega) = \{0, 1\}$.

$P(Y_i = 1) = P(X_i + 1 = 2)$
$= P(X_i = 1)$
$= \theta$
$\cancel{= 1 - \theta}$.

Donc $P(Y_i = 0) = P(X_i = -1) = 1 - \theta$.

Donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta)$ et ceci $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

~~1)~~ D'après ~~le lemme~~ des coalitions, comme les (X_i) sont mutuellement indépendantes, les (Y_i) sont mutuellement indépendantes.

Donc par stabilité de la loi binomiale,
$\sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$. (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(X_i + 1) \hookrightarrow \cancel{B(\theta)}\ \mathcal{B}(n, \theta)$

Donc $\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + n\right) \hookrightarrow \cancel{B(\theta)}\ \mathcal{B}(n, \theta)$

Donc $\frac{1}{2}(S_n + n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$ ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

10). ~~Non car $\forall n \in \mathbb{N}^*$~~

Soit $n \geq 2$,

$S_n = X_n + S_{n-1}$

~~Donc~~ Or $X_n + S_{n-1}$ n'est pas indépendant de S_{n-1}

Donc les variables $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

11). ~~$\theta \in]0, 1[$.~~

~~Donc~~ $\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

Donc $\theta^2 - \theta + \frac{1}{4} \geq 0$

Donc $\frac{1}{4} \geq \theta - \theta^2$

donc $\frac{1}{4} \geq \theta(1 - \theta) \geq 0$

car $\theta \in]0, 1[$

~~Donc $\frac{1}{}$~~

Donc $\frac{1}{2} \geq \sqrt{\theta(1-\theta)}$ par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$P\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right)$$

$$= P\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} - 2\theta \leq \overline{S_n} \leq 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} - 2\theta\right)$$

$$= P\left(\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} - 3\theta\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \leq \frac{\sqrt{n}\left(\overline{S_n} - \theta\right)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} - 3\theta\right)\right)$$

Or $\overline{S_n}$ admet une ~~vraie~~ espérance par linéarité qui vaut

$$E(\overline{S_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} n.\theta = \theta.$$

et ~~$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $V(X_i$~~

N'aboutit pas : admis

12 a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $2k+1$ est impair donc

comme $\forall i \in [\![1, 2k+1]\!]$, $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$.

~~Nécessairement, il y aura toujours~~

~~au moins un des X_i~~ ~~X_i~~ ~~dep~~

Nécessairement, il ne peut pas il y avoir

le même nombre de X_i prenant la valeur -1

que les X_i prenent la valeur 1.
car $2k+1$ est impair

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(S_{2k+1}=0)=0$

12b). Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$P(S_{2k}=0) = P($" k X_i parmi $2k$ prennent la valeur 1 et le reste prend la valeur -1 "$)$

Donc par mutuelle indépendance des X_i,

$P(S_{2k}=0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Cette formule reste vraie pour $k=0$
car $S_0 = 0$.
Donc $P(S_0=0)=1 = \binom{0}{0}\theta^0(1-\theta)^0$

13). ~~Vm∈~~

$P(L_n = n) = P(S_{2m}=0)$
$= \binom{2n}{m}\theta^k(1-\theta)^k$ (12.b).

14)a). ~~∀~~

$[L_n = k]$ est réalisé si et seulement si
k est le plus grand entier tel que $S_{2k}=0$.
c'est-à-dire si $[S_{2k}=0]$ est réalisé et
~~$\forall i \geq 2k+1$, S_{2k+1}~~ $\forall i > k$, $[S_{2i} \neq 0]$ sont réalisés.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 29	Session : 2023

Épreuve de : Maths ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On a alors

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} [S_{2i} \neq 0]$$

Or d'après 12 a), $\forall k \in \mathbb{N}$, $[S_{2k+1} = 0]$ ne se réalise presque sûrement jamais. Donc

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap \bigcap_{i=k+1}^{2n} [S_i \neq 0]$$

b). Sachant $[S_{2k} = 0]$ il ~~y a~~ faut que durant les $2n - (2k+1) + 1 = 2n - 2k - 1 + 1 = 2(n-k)$ étapes de la marche restante on ne revienne pas à l'origine pour que l'événement $\bigcap_{i=2k+1}^{n} (S_i \neq 0)$ soit réalisé.

Ceci a alors ~~la~~ même probabilité que les $2(n-k) - 1 + 1 = 2(n-k)$ premiers S_n ~~Sn~~ ne reviennent pas à l'origine par indépendance du fait de la probabilité conditionelle.

13) ~~...~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'après 14(a)).

$$P(L_n = k) = P\left(S_{2k}=0,\ \bigcap_{i=2k+1}^{2n} [S_i \neq 0]\right)$$

$$= P_{[S_{2k}=0]}\left(\bigcap_{i=2k+1}^{2n} [S_i \neq 0]\right) P(S_{2k}=0) \quad \text{par définition}$$

$$= p_{n-k}\, P(S_{2k}=0)$$

$$= p_{n-k} \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k \qquad (12.b).$$

16)a) Par définition, $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$ donc $\forall \omega \in \Omega$,

$S_i(\omega) = \sum_{k=1}^{i} X_k(\omega)$ or

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall \omega \in \Omega$, $X_k(\omega) \in \mathbb{Z}$.

Donc $S_i(\omega) \in \mathbb{Z}$ en tant que somme d'éléments de $\mathbb{Z}$.

Donc $\forall \omega \in \Omega$,

~~Donc~~ l'ensemble : $\{S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\} \subset \mathbb{Z}$

16b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, \{S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\} \subset \mathbb{Z}$,

on ne peut pas avoir D_n réalisé et à la fois certains S_i négatifs et d'autres positifs car nécessairement, un d'entre eux aurait valu 0 à un moment donc D_m n'aurait pas été réalisé.

Donc $D_m = D_m^+ \cup D_m^-$ et par incompatibilité,

$P(D_m) = P(D_m^+) + P(D_m^-)$

17). ~~Comme~~

$\forall r \in [\![1, m]\!]$, $2r \in [\![2, 2m]\!]$ et $2r$ est pair

Donc ~~$[S_{2m} = 2r]_{r \in [\![2, m]\!]}$~~ est

$[S_{2m} = 2r]_{r \in [\![1, m]\!]}$ est un système complet d'événements.

En effet, à la $2m$ ème étape de la marche, la valeur en abscisse de l'endroit où se trouve S_{2m} est nécessairement paire.

Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$D_m^+ = \bigcup_{r=1}^{m} (A_{m,r} \cap D_m^+) = \bigcup_{r=1}^{m} \left(\bigcap_{k=1}^{2m-1} [S_k > 0] \cap S_{2m} = 2r \right)$$

Donc par incompatibilité,

$$P(D_m^+) = \sum_{r=1}^{m} P(A_{m,r})$$
$$= \sum_{r=1}^{m} a_{m,r}$$

18).

les S_m et S_{m-1} n'ayant ~~qu'un~~ que deux pas d'écart,

~~si~~ ~~q~~ $[\cancel{S}_{2m-2} = 2q]$ et ~~S_2~~

les évènements $[S_n = 2i]$ avec $i \in [\![\cancel{q}, q-2]\!] \cup [\![q+2, n]\!]$

sont incompatibles donc

Si $q < n-1$ ou $q > n+1$,

$P(A_{n-1,q} \cap A_{m,n}) = 0$

~~Si $q = n-1$ ou $q = n+1$,~~

Si $q = n-1$

alors $P(A_{m-1,q}, A_{m,n}) = P(A_{m-1,q} \cap [X_{2m-1} = 1] \cap [X_{2m} = 1])$

donc par indépendance,

$P(A_{m-1,q}, A_{m,n}) = a_{m+1,q} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} a_{m-1,q}$

De même, si $q = n+1$,

$P(A_{m-1,q}, A_{m,n}) = P(A_{m-1,q}), (X_{2m-1} = -1), (X_{2m} = -1))$

$= \frac{1}{4} a_{m-1,q}$

et si $q = n$, alors, de même,

$P(A_{m-1,q}, A_{m,n}) = P(A_{m-1,q} \cap (((X_{2m-1} = -1) \cap (X_{2m} = 1))$

$\cup ((X_{2m-1} = 1) \cap (X_{2m} = -1)))$

$= 2 \cdot \frac{1}{4} a_{m-1,q}$

$= \frac{1}{2} a_{m-1,q}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	**Nombre de pages :** 29	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths ESCP / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1 8 b). En utilisant un raisonnement similaire à celui adopté à la question précédente, il suffit de dénombrer les "chemins" possibles :

pour avoir $[S_{2n} = 2r]$ on peut soit partir de $[S_{2n-1} = 2r]$ et avoir dans n'importe quel ordre $[X_{2n-1} = 1]$ et $[X_{2n} = -1]$ ou l'inverse. (Puis on conclut par indépendance)

Soit partir de $[S_{2n} = 2(r-1)]$ puis avoir 2 fois d'affilée $[X_{2n-1} = 1]$ et $[X_{2n} = 1]$.

et de même avec $[S_{2n} = 2(r+1)]$, il faut avoir $[X_{2n-1} = -1]$ et $[X_{2n} = -1]$.

Ainsi, par indépendance entre les pas de la marche et par incompatibilité entre les événements, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$a_{n,r} = \frac{1}{4} a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2} a_{n-1,r} + \frac{1}{4} a_{n-1,r+1}$

19).

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, posons $P(m)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ~~$\forall i \in [\![1, m]\!]$~~,

$$a_{i,n} = \frac{1}{4^i}\left(\binom{2m-1}{m+n-1} - \binom{2m-1}{m+n}\right).$$

Initialisation : $m = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

~~$A_{1,n} = X_{k=1}$~~

$A_{1,n} = [S_1 > 0] \cap [S_2 = 2n]$ ~~X~~

$= [X_1 = 1] \cap [S_2 = 2n] \cap [X_2 > 0]$

1er cas : $n = 1$: $a_{1,n} = \frac{1}{4}$

~~2ème cas : $n = 0$: $a_{1,n} = \frac{1}{4}$~~

$\forall n \neq 1$, $a_{1,n} = 0$.

Ce qui confirme la formule.

$P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(m)$ soit vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_{m+1,n} = \frac{1}{4} a_{m,n-1} + \frac{1}{2} a_{m,n} + \frac{1}{4} a_{m,n+1} \quad (18.b)$$

Donc

$$a_{m+1,n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^m}\left(\left(\binom{2m-1}{m+n-2} - \binom{2m-1}{m+n-1}\right) + 2\binom{2m-1}{m+n-1} - 2\binom{2m-1}{m+n}\right.$$

$$\left. + \binom{2m-1}{m+n} - \binom{2m-1}{m+n+1}\right)$$

c'est un signe −

$$= \frac{1}{4^{m+1}}\left(\left(\binom{2m-1}{m+n-2} + \binom{2m-1}{m+n-1}\right) - \binom{2m-1}{m+n} - \binom{2m-1}{m+n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4^{m+1}}\left(\binom{2m}{m+n-1} - \binom{2m}{m+n+1}\right)$$

N'aboutit pas.

Conclusion : $P(n)$ est vraie.

20) D'après 15. en prenant $k=0$,

$\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$p_m = P(L_m = 0)$$
$$= P\left(S_0 = 0 \cap \bigcap_{k=1}^{2m} [S_k \neq 0]\right)$$

or $[S_0 = 0]$ est certain. Donc

$p_m = P(D_m) = P(D_m^+) + P(D_m^-)$ (16.b)

Or D_m^+ et D_m^- sont "symétriques", leur probabilité est la même. Donc

$P(D_m) = 2P(D_m^+) = 2\sum_{n=1}^{m} a_{m,n}$ (17)

Donc

$$p_n = \frac{2}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{2n-1}{n+(k-1)} - \binom{2n-1}{n+k}\right)$$

$$= \frac{2}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n}\right)$$

$$= \frac{2}{4^n}\binom{2n-1}{n}$$

$$= \frac{2}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(2n)\, n!\, (2n-n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{4^n\, n!\, . n(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{4^n\, n!\, n!} \quad \cancel{\frac{1}{4^n}}$$

$$= \frac{1}{4^n} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}$$

$$= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

2)1)a) ~~[illegible]~~

~~2)b)~~.

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n):
    L=0
    S=0
    for i in range(1,2*n+1):
        if rd.rand() < 1/2:
            S=S+1
        if S==0:
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 29 | Session : 2023

Épreuve de : Maths ESCP/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~else:~~
~~S = S - 1~~

```
        L = i        (cette instruction est dans le deuxième if)
    else:
        S = S - 1
        if S==0 :
            L = i
    return L
```

le else ici est associé au premier if.

b). On conjecture : $\frac{L_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} U$

avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$.

22). a).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2}\right)$$

Donc $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \ln\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\right)$

et $\frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} \sim 4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$

Donc $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(4) = 0$.

22b).

Donc $\forall n$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\ln\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cancel{\ell}\ 0$

Donc $\frac{C_{n+1}}{C_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Donc $C_{n+1} \sim C_n$

Donc par récurrence on montre $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

~~$C_n \sim e^{\ell n} C_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} C_0 (e^{\ell})^n$.~~

~~Donc (C_n) converge~~

$C_n \sim C_0 \to C_0$

Donc (C_n) converge

23 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P\left(\frac{L_n}{n} \le x\right) = P(L_n \le xn)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} [L_n = k]\right) \quad \text{car } L_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(L_n = k) \quad \text{par incompatibilité}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k p_{n-k} \quad (15)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

d'après (20)

Donc $P\left(\frac{L_n}{n} \le x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$

23) b). En prenant n assez grand, $a_n < \lfloor nx \rfloor$

et $\frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} C_k C_{n-k} \cdot \frac{4^k \cdot 4^{n-k}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

$$= \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{C_k C_{n-k}}{\sqrt{k(n-k)}}$$

≥ 0

Or $\forall k \in [\![a_n, \lfloor nx \rfloor]\!]$, $C_k C_{n-k} \in [m_n, M_n]$

Donc finalement on peut minorer par m_n et majorer par M_n il vient :

$$\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{m_n}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=a_n} \frac{M_n}{\sqrt{k(n-k)}}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall c_n \in [\![\alpha_n, \beta_n]\!]$,

$$C_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$ par théorème de

Comparaisons. On $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\exists (c_n, d_n) \in ([\![\alpha_n, \beta_n]\!])^2 \mid \underline{\min_{k \in [\![\alpha_n, \beta_n]\!]} C_k = C_{c_n}}$ ~~max~~

et $\underline{\max_{k \in [\![\alpha_n, \beta_n]\!]} C_k = C_{d_n}}$

Donc par composition de limite d'après

22), $\underline{C_{c_n} \longrightarrow \frac{1}{\pi}}$

et $\underline{C_{d_n} \longrightarrow \frac{1}{\pi}}$

23) d). D'après la question 8) et par encadrement, il vient, d'après l'encadrement de 23.b) et les limites de 23.c) que

$$\underline{\frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{G(x)}{\pi}}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 30	Session : 2023

Épreuve de : Math

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

24) a) posons $(a_n) = (\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor)$.

il est clair que (a_n) vérifie les critères.

24b) admis.

25). on a alors d'après 23.a) et les autres questions,

$$F_{\frac{L_n}{n}}(x) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{G(x)}{\pi}$$

Donc $\frac{L_n}{n}$ converge en loi par définition de la convergence en loi