Copie anonyme - n°anonymat :

Maths S

Z0-00227

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 26	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 1 :

1)a). Soit $n \in \mathbb{N}$, on note f une densité de X

~~Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$~~.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx$$

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ x & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X^n)$ existe ~~car~~ d'après le théorème de transfert

car $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$ converge

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = \dfrac{1}{n+1}$

1.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une densité de X et soit $A \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_{-\infty}^{A} x^n f(x)\,dx = \int_0^A x^n \lambda e^{-\lambda x}\,dx \quad \text{car } X(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{A} x^2 f(x) = \lambda \int_0^A x^n e^{-\lambda x} \, dx$$

posons $\underline{u = \lambda x}$ alors $du = \lambda dx$

Donc $$\lambda \int_0^A x^n e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\lambda A} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^n e^{-u} du$$

$$= \underline{\frac{1}{\lambda^{n-1}} \int_0^{\lambda A} u^n e^{-u} du}$$

or $\lambda A \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$ car $\lambda > 0$

Donc
$$\frac{1}{\lambda^{n-1}} \int_0^{\lambda A} u^n e^{-u} du \xrightarrow[A \to +\infty]{} \underline{\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n-1}} = \frac{n!}{\lambda^{n-1}}}$$

Car $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$ converge et vaut $\Gamma(n+1)$

Bilan, $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx}$ converge

et vaut $\underline{\frac{n!}{\lambda^{n-1}}}$.

Donc d'après le <u>théorème de transfert</u>,

$E(X^2)$ existe et vaut $\frac{n!}{\lambda^{n-1}}$

Partie II :

II . 1).

2) Par définition,

$$H_3 = \begin{pmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ U_2 & U_3 & U_4 \end{pmatrix}$$

et $$G_3 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_2 & U_3 & U_4 \\ U_3 & U_4 & U_5 \end{pmatrix}$$

3)

$$^tW H_n W = (^tW H_n W)_{1,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (^tW)_{1,i} (H_n W)_{i,1}$$ par définition du produit matriciel

$$= \sum_{i=1}^{n} (W)_{i,1} \sum_{j=1}^{n} (H_n)_{i,j} (W)_{j,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j U_{i+j-2}$$

par définition de W et H_n

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i-1} x^{j-1} f(x) \right) dx$$

On reconnait alors à une constante près ~~le moment~~ la somme des moments d'ordre

$i+j-2$ de X avec i et j variant de 1 à n. ~~Et~~. Or par hypothèse, X admet des moment de tout ordre donc l'intégrale converge bien dès lors il vient par linéarité

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x)\, dx$$

or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x)\,dx = m_{i+j-2}(X)$
$= u_{i+j-2}$

d'après le théorème de transfert donc

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j\, u_{i+j-2} = {}^tW H_n W$$

---

a) W étant un vecteur quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a montré que d'après (3),

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX H_n X \geq 0$. car

d'après ~~le th~~ par croissance de l'intégrale,

comme $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(P(x))^2 f(x) \geq 0$
car f est une densité, alors

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx \geq 0$$

donc ${}^tX H_n X \geq 0$

~~D'emblée~~
Par ailleurs, on peut affirmer que $Sp(H_n) \neq \emptyset$ car H_n est symétrique réelle.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 26	**Session :** 2023
Épreuve de : Mathématiques		

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Soit $\lambda \in Sp(H_n)$.

Alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \mid$ ~~AX~~

$H_n X = \lambda X$.

alors ${}^t X H_n X = \lambda {}^t X X$

donc ${}^t X H_n X = \lambda \|X\|^2$

or ${}^t X H_n X \geq 0$

Donc $\lambda \|X\|^2 \geq 0$

or $X \neq 0$ donc $\|X\|^2 > 0$

Donc $\lambda \geq 0$. Ceci est vrai pour tout $\lambda \in Sp(H_n)$.

Bilan : $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+$

toutes les valeurs propres de H_n sont positives.

5). De la même manière, en évaluant la forme quadratique associée à G_n en une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ quelconque, on aurait

d'emblée, $q_{G_n}(X) = {}^t X G_n X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j U_{i+j-1}$

Puis, en posant $P : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i x^{i-\frac{1}{2}}$ alors le même calcul que précédemment donnerait

$${}^tX G_n X = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\,dx$$

On en déduit alors de même que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^tX G_n X \geq 0$$

Donc d'après ce que l'on a montré, $Sp(G_n) \subset \mathbb{R}_+$

autrement dit, toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+$

~~6) admis~~

~~7)~~

~~6) $H_2 = \big| \ u_0$~~

6) $G_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & u_3 \end{pmatrix}$

Or λ est valeur propre de G_2 si et seulement si

$$\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)(u_3 - \lambda) - \frac{1}{9} = 0$$

Soit $\lambda \in Sp(G_2)$ alors $\lambda \geq 0$ et
(d'après 5).

$$\frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda u_3 - \lambda - \frac{1}{9} = 0$$

Donc $\frac{1}{2}\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}u_3 - 1\right)\lambda - \frac{1}{9} = 0$.

Supposons que $u_3 < \frac{2}{9}$.

alors

$$\frac{1}{2}\lambda^2 + \left(\frac{1}{2}u_3 - 1\right)\lambda - \frac{1}{9} < \frac{1}{2}\lambda^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{9} - 1\right)}_{= -\frac{8}{9}}\lambda - \frac{1}{9}$$

N'aboutit pas.

7) Soit $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$t^n e^{-t^\theta} - \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}}$$

$$= e^{n\ln(t)} e^{-t^\theta} - e^{\frac{n}{\theta}\ln\left(\frac{n}{\theta}\right)} e^{-\frac{n}{\theta}}$$

$$= e^{n\ln(t) - t^\theta} - e^{\frac{n}{\theta}\left(\ln\left(\frac{n}{\theta}\right) - 1\right)}$$

Soit $f_n : t \mapsto n\ln(t) - t^\theta - \frac{n}{\theta}\ln\left(\frac{n}{\theta}\right) - 1$

$$f_n'(t) = \frac{n}{t} - \theta t^{\theta - 1}$$

$$f_n'(t) \geq 0 \iff n - \theta t^\theta \geq 0$$

$$\iff t \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$ par croissance de $t \mapsto \sqrt[\theta]{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc

$$\begin{array}{c|ccccc} t & 0 & & \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} & & +\infty \\ \hline f & & \nearrow & 0 & \searrow & \end{array}$$

En effet,

$$f_n\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) = n\ln\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) - \frac{n}{\theta}$$

$$- \frac{n}{\theta}\left(\ln\left(\frac{n}{\theta}\right) - 1\right) = 0.$$

Donc $\forall t > 0$,

$$n\ln(t) - t^\theta \leq -\frac{n}{\theta}\left(\ln\left(\frac{n}{\theta}\right) - 1\right)$$

Donc par croissance de exp sur $\mathbb{R}$,

$$e^{n\ln(t) - t^\theta} \leq e^{-\frac{n}{\theta}\left(\ln\left(\frac{n}{\theta}\right) - 1\right)}$$

et donc $\forall t > 0$,

$$t^n e^{-t^\theta} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}}$$

Ce qui reste vrai si $t=0$ par positivité de exp et des fonction puissance sur $\mathbb{R}_+$

7b). Comme $\int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt$ converge,

par théorème de transfert,

$E\left(e^{X^\theta}\right)$ existe.

N'aboutit pas.

8). admis

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 26	**Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

II / 2)

9) Soit $n \in \mathbb{N}$.

~~Notons~~

les 2 intégrales sont impropres seulement en $+\infty$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\cancel{|t^{n+2} e^{-t} \sin(t)| \leq t}$

$t^2 . |t^n e^{-t} \sin(t)| = t^n e^{-t} |\sin(t)| . t^2$
$\leq t^n e^{-t} . t^2$

On $t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc par encadrement,

$t^2 |t^n e^{-t} \sin(t)| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Donc $|t^n e^{-t} \sin(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or d'après le critère de Riemann,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc par théorème de comparaison d'intégrales à termes positifs $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t)\,dt$ converge absolument

donc converge.

De même, $|t^n e^{-t} \cos(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\,dt$ converge

10). $S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t)\,dt$ or $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall A \in \mathbb{R}$, par intégration par parties

~~donc~~ $\int_0^A e^{-t} \sin(t)\,dt = \left[-e^{-t} \sin(t)\right]_0^A + \int_0^A e^{-t} \cos(t)\,dt$

donc par opération sur les limites,

lorsque $A \to +\infty$,

$S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t)\,dt$ ~~= Ic~~

or $\int_0^A e^{-t} \cos(t)\,dt = \left[-e^{-t} \cos(t)\right]_0^A - \int_0^A e^{-t} \sin(t)\,dt$

donc lorsque $A \to +\infty$,

$S_0 = 1 - S_0$

Donc $2 S_0 = 1$

donc $S_0 = \frac{1}{2}$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\cancel{S_{n+1} + T_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} (\sin(t) + \cos(t))\, dt}$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, par intégration par parties,

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\, dt = \left[-\cos(t)\, t^{n+1} e^{-t} \right]_0^A + \int_0^A \cos(t)\left((n+1) t^n e^{-t} - t^{n+1} e^{-t}\right) dt$$

en passant à la limite, par croissance comparée,

$$S_{n+1} = \cancel{\mp} \int_0^{+\infty} \left((n+1) t^n e^{-t} \cos(t) - t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\right) dt$$

Donc $S_{n+1} = \cancel{A} + (n+1) T_n - T_{n+1}$

Donc $S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1) T_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Soit $A \in \mathbb{R}$, par intégration par parties,

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\, dt = \left[\sin(t)\, t^{n+1} e^{-t} \right]_0^A - \int_0^A \left((n+1) t^n e^{-t} \sin(t) - t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\right) dt$$

en passant à la limite, et par linéarité de l'intégrale,

$T_{n+1} = -(n+1) S_n + S_{n+1}$.

Donc $S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n$

12) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1) M V_n = (n+1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1) M V_n = \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} S_n + T_n \\ -S_n + T_n \end{pmatrix}$$

Or d'après 11), $\forall n \in \mathbb{N}$,

~~$(n+1)(S_n+T_n) = (n+1$~~

$$(n+1)(S_n+T_n) = S_{n+1} + T_{n+1} + S_{n+1} - T_{n+1}$$
$$= 2 S_{n+1}$$

et $(n+1)(-S_n+T_n) = -S_{n+1} + T_{n+1} + S_{n+1} + T_{n+1}$
$$= 2 T_{n+1}$$

Donc $(n+1) M V_n = \begin{pmatrix} S_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix}$

$$= V_{n+1}$$

et ceci pour tout entier naturel n

13). $\forall n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: " $V_n = n! M^n V_0$ "
Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation : $n=0$.

~~$V_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d'après 10)~~

$0! M^0 V_0 = V_0$

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ soit vraie

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 26	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Alors d'après 12),

$$V_{n+1} = (n+1) M V_n$$

$$= (n+1) M (n! M^n V_0) \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= (n+1)! M^{n+1} V_0$$

P_{n+1} est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = n! M^n V_0$

14) $M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2 . M^2$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} I_2 \quad \text{avec } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a alors montré

$$M.M^3 = -\frac{1}{4} I_2$$

Donc M est inversible et $M^{-1} = -4M^3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, notons $A(n)$: " $S_{4n+3} = 0$ ".
Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation : $n = 0$.

$$V_3 = 3!\, M^3 V_0$$

$$= 6 \cdot \left(-\frac{1}{4} M^{-1}\right) V_0$$

or $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $V_3 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d'après 1a)

$$= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, $S_3 = 0$ $A(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que

$A(n)$ est vraie :

alors ~~$V_{n+1} = V_n\, n!$~~

~~$V_{n+1} = (n+1)!$~~

$$V_{4(n+1)+3} = V_{4n+7}$$

$$\cancel{= n!}$$

$$= (4n+7)!\, M^{4n+7} V_0$$

$$= (4n+7)!\, M^4 M^{4n+3} V_0$$

Or par hypothèse de récurrence $S_{4n+3} = 0$ donc $M^{4n+3} V_0$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$.

Or $M^4 = -\frac{1}{4} I_2$ donc

$$V_{4(n+1)+3} = (4n+7)! \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Donc $S_{n+1} = 0$.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \; S_{4n+3} = 0$

15). $\varphi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^{\frac{1}{4}}$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Donc le changement de variable $x = t^4$ est licite et de fait $dx = 4t^3$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n g(x) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} \cancel{\sin(x^{\frac{1}{4}})}\, \sin(x^{\frac{1}{4}})\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{4n} e^{-t} \sin(t)\, 4t^3\, dt$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} t^{4n+3} e^{-t} \sin(t)$$

~~= 4~~

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = 4\, S_{4n+3} = 0 \qquad (14)$$

16) D'après 15), en posant $g_1 = g$ et $g_2 = 0$ la fonction nulle, g_1 et g sont bien positives distinctes et continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} x^n g_2(x)dx$ existent et valent ~~0~~ 0.

g_1 est effectivement continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

17). La solution n'est alors pas unique * car

* avec $J = \mathbb{R}_+$

On a trouver deux variables aléatoires à densité distinctes (car de densité distinctes) telles que ces deux variables admettent des moments de tout ordre.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 26	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III.

III 1). 18) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$V_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n f(x)\,dx.$$

Supposons que $V_n = 0$.

Alors d'après le théorème de l'intégrale nulle, comme $x \mapsto x^n f(x)$ est positive sur $[0,1]$ (car f est une densité) et continue (par hypothèse sur f)

alors $\forall x \in [0,1]$, $x^n f(x) = 0$

Donc $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = 0$.

Donc comme f est continue $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$.

N'aboutit pas.

19) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} U_{i+k} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} x^{i+k} f(x)\,dx$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u_{i+k}=\int_0^1 x^i f(x)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-x)^k\,dx$$

$$=\int_0^1 \underbrace{x^i f(x)(1-x)^j}_{\geqslant 0}\,dx$$

$$\geqslant 0$$

On admet l'inégalité stricte.

20) On est dans le même cas que la question 8) donc

$$u_3 \geqslant \frac{2}{9}$$

Or $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{12-9}{54}=\frac{3}{54}>0$

Donc $\underline{u_3>\frac{1}{6}}$

On admet $u_3<\frac{1}{3}$.

21). admis.

~~21~~ 2)

22). Soit $n\in\mathbb{N}$,

$\underline{\Delta_{n,0}=u_n}$

car $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{0}{k}u_{n+k-0}=u_n$

27) Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit $j \in [\![0, n]\!]$.

$$\Delta_{m+1, j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} U_{m+1+k-j-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \left(\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} \right) U_{m+k-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k-1} U_{m+k-j}$$

$$+ \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} U_{m+k-j}$$

Car $\binom{j}{j+1} = 0$. et $\binom{j}{-1} = 0$.

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \binom{j}{k} U_{m+(k+1)-j}$$

$$+ \Delta_{m,j}$$

$$= - \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} U_{m+1+k-j}$$

$$+ \Delta_{m,j}$$

$$= \underline{\Delta_{m,j} - \Delta_{m+1,j}}$$

Ceci est vrai $\forall m \in \mathbb{N}$ et $\forall j \in [\![0, n]\!]$.

24).

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
    N = len(U) - 1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range(0, N+1):
        Delta[k,0] = U[k]
        if ((Delta[k,0] <= 0) and (info == -1)):
            info = k
        for j in range(1, N+1):
            Delta[k,j] =
            if ((Delta[k,j] <= 0) and (info == -1)):
                info = k
    return (info, Delta)
```

25). admis

IV 3).

26) admis.

27a). admis

27b). $E(|Z_n - x|) = E\left(\left|\frac{Y_n}{n} - x\right|\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| P(Y_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\left(\frac{k - xn}{n}\right)^2} P(Y_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{(k - xn)^2} P(Y_n = k)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 26

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$E(|Z_n - x|) = \sum_{k=0}^{n} |k - x| \, P(Z_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{(k-x)^2} \, P(Z_n = k)$$

On $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\sum$

$$E(|Z_n - x|) = E\left(\left|\frac{Y_n}{n} - x\right|\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| P(Y_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2} \, P(Y_n = k)$$

Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$P(Y_n = k) \in [0,1]$

et $\sum_{k=0}^{n} P(Y_n = k) = 1$

Donc $E(|Z_n - x|) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P(Y_n = k)}$

Donc

$$E(|Z_n - x|) \le \sqrt{E((Z_n - x)^2)}$$

Donc avec 3.a) on conclue :

$$|h(x) - E(h(Z_n))| \le k\sqrt{E((Z_n - x)^2)}$$

~~on admet le reste de la partie~~

III) 4).

32). Soit $I = [-1,1]$.

alors exp est de classe C^2 sur I
et en particulier $|\exp|$ est continue donc
comme I est un fermé, d'après
le théorème de compacité, $|\exp|$
~~att~~ a un maximum sur $[-1,1]$ atteint
en un point $b \in I$.

Donc d'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$\left|\exp(x) - \frac{\exp(0)}{0!} - \frac{x-0}{1!}\exp'(0)\right| \le \frac{e^b |x-0|^2}{2!}$$

Donc $\cancel{0 \le}$ $e^x - 1 - x \le \frac{e^b}{2} x^2$

en posant $C = \frac{e^b}{2} > 0$

on a bien : $\exists C > 0 \mid \forall x \in [-1,1]$,
$e^x - 1 - x \le C x^2$.

D'autre part, exp est convexe sur $[-1,1]$

donc au dessus de sa tangente en 0 :

$\forall x \in [-1,1]$, $e^{x} \geq 1 \cdot (x-0) + 1$

donc $e^{x} - 1 - x \geq 0$.

Bilan : $\exists C > 0 \mid \forall x \in [-1,1]$,

$0 \leq e^{x} - 1 - x \leq C x^2$

33) a) admis

33) b). Soit $i \in \{1,2\}$ Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

1er cas : $i = 1$.

$\partial_1 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2)$

or $F_k(\alpha_1, \alpha_2) F_1(\alpha_1, \alpha_2) =$

N'aboutit pas.

33 c) Soit $(i, \alpha_1, \alpha_2) \in \{1,2\} \times \mathbb{R}^2$.

$\partial_i F_k(\alpha_1, \alpha_2) = F_{k+i}(\alpha_1, \alpha_2) - F_k(\alpha_1, \alpha_2) F_i(\alpha_1, \alpha_2)$

$$= \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \left(\int_0^1 t^{k+i} e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} - F_k(\alpha_1, \alpha_2) \int_0^1 t^i e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt \right.$$

$$= \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \left(\int_0^1 t^i e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} (t^k - F_k(\alpha_1, \alpha_2)) dt \right)$$

N'aboutit pas

$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 G(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial_1 R_0(\alpha_1, \alpha_2)}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} - u_1$$

$$\partial_2 G(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial_2 R_0(\alpha_1, \alpha_2)}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} - u_2$$

N'aboutit pas

34) c). $\forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

$${}^t X \nabla^2 X > 0.$$

Donc Soit $\lambda \in Sp(\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2))$.
alors $\exists X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} /$

$$\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) X = \lambda X$$

Donc $\underbrace{{}^t X \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) X}_{\substack{> 0 \\ \text{d'après } 34.b)}} = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{> 0 \text{ car } X \neq 0}$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{{}^t X \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) X}{\|X\|^2} > 0$$

Donc les valeurs propres de $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ sont strictement positives.

34) d) On admet que (α_1, α_2) est un point critique de G.
Alors ~~d'après~~ comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, d'après la condition nécessaire de

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 26 | Session : 2023

Épreuve de : Maths.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

second ordre, d'après 34)c), alors G admet un minimum local en (α_1, α_2).

31). Comme l'inégalité de la 30) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut faire tendre n vers $+\infty$ et par conservation des inégalités larges par passage à la limite,

$$0 \leq \int_0^1 h^2(x)\,dx \leq 0$$

Car $h^2(x) \geq 0$.

Donc $\int_0^1 h^2(x)\,dx = 0$

Or $\forall x \in [0,1]$, $h^2(x) \geq 0$

Donc d'après le théorème de l'intégrale nulle, $h^2(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$

donc $h(x) = 0$

donc $f_1(x) = f_2(x)$ sur $[0,1]$.

Donc $f_1 = f_2$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On conclut alors qu'il y a une unicité des solutions à densité de classe C^1 pour le problème $\mathcal{M}^+(J)$ avec $J = [0,1]$.

26). h' est continue sur $[0,1]$ donc elle admet un maximum d'après le théorème de compacité sur $[0,1]$ que l'on note k.

Ainsi : $\forall x \in [0,1]$, $|h'(x)| \leq k$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|h(x) - h(y)| \leq k|x-y|$