Copie anonyme - n°anonymat :

P6-00034 Maths S

Code épreuve : 295 **Nombre de pages :** 27 **Session :** 2023

Épreuve de : Maths appro. EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1-a) $\forall t \in [k, k+1]$, $k \leq t \leq k+1$ donc :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

et comme ces fonctions sont continues sur $[k, k+1]$, par croissance de l'intégration :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt$$ soit :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k}$$

b) En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 1 à $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et donc d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$ soit :

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \leq S_n - \frac{1}{n}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) D'après Q1-b),

$\forall n \geq 2$, $\int_1^n \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt + 1$ soit :

$$[\ln(t)]_1^n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq [\ln(t)]_1^n + 1 \quad \text{d'où :}$$

$\forall n \geq 2$, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

d) $\forall n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ donc d'après Q1-c) :

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \end{cases}$

Donc, par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$

Ainsi, on peut conclure :

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

2-a) Le programme renvoie le premier k tel que $S_k \geq 50$

b)

3-a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$ et comme $t \leq x < 1$:

$$= \frac{1-t^n}{1-t}$$

b) Soit $n \geq 1$

Par linéarité de l'intégration :

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt}$$

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt \quad \text{soit :}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \quad \text{d'où :}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \left[-\ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \quad \text{soit :}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

c) $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq 1-t \leq 1$ d'où :

$$0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq t^n$$

et comme ces fonctions sont continues sur $[0, x]$, par croissance de l'intégration :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt \quad \text{d'où :}$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \quad \text{d'où :}$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x \in]0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$

d) En intégrant le résultat de q3-c) dans l'égalité établie en q3-b), on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Ainsi, on peut conclure :

La série $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Exercice 2 :

1-a) $Z_n(\Omega) = [0,1]$

Soit $x \in \mathbb{R}$

▷ Si $x < 0$

$F_n(x) = 0$

▷ Si $x > 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
Épreuve de : Maths appro. EMC		

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$F_n(x) = 1$

▷ Si $x \in [0,1]$

$F_n(x) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x)$

$= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x)$

$= 1 - \mathbb{P}([X_1 \geq x] \cap \dots \cap [X_n \geq x])$

et comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \geq x)$

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x))$

et comme $\forall k \in [1,n]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et que $x \in]0,1[$

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1-x)$

$F_n(x) = 1 - (1-x)^n$

Ainsi, la fonction F_n de Z_n est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6) ▷ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1], \quad F_n'(x) = \underset{\geqslant 0}{0}$

$\forall x \in [0,1], \quad F_n'(x) = \underset{\geqslant 0}{n(1-x)^{n-1}}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n'(x) \geqslant 0$

Donc, F_n est croissante sur $\mathbb{R}$

▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$

▷ F_n est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$

* $\forall x \in [0,1], \quad F_n(x) = 1 - \exp(n\ln(1-x))$

$\lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1-x) = \ln(1)$
$= 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} n\ln(1-x) = 0$

Et comme exp est continue en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \exp(n\ln(1-x)) = e^0$
$= 1$

Donc, $\lim_{x \to 0^+} F_n(x) = 1 - 1$

$= 0$

$= \lim_{x \to 0^-} F_n(x)$

Ainsi, F_n est continue 0

* $\lim_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ d'où :

$\lim_{x \to 1^-} n\ln(1-x) = -\infty$ donc par composition :

$\lim_{x \to 1^-} \exp(n\ln(1-x)) = 0$ donc :

$\lim_{x \to 1^-} F_n(x) = 1 - 0$

$= 1$

$= \lim_{x \to 1^+} F_n(x)$

Ainsi, F_n est continue en 1

Donc, F_n est continue sur $\mathbb{R}$

▷ F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Ainsi, la variable aléatoire Z_n est à densité

c) En dérivant la relation obtenue en Q1-a), une densité f_n de Z_n est donnée, pour x réel, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2- def VarZ(n):

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return np.min(random(n))
```

3- ~~$\forall x \in [0,1]$, $|1-x| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-x)^n = 0$ d'où:~~

~~$\forall x \in [0,1]$, lim~~

4-a) $\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) = X_n)$

$$= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq X_n)$$

$$= \mathbb{P}(Z_{n-1} \geq X_n)$$

$$= \mathbb{P}(Z_{n-1} - X_n \geq 0)$$

et comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, est indépendante de $X_1, \dots, X_{n-1}$ alors d'après le résultat admis:

$$= 1 - \int_{-\infty}^{0} g_{n-1}(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{-1}^{0} g_{n-1}(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{-1}^{0} 1 - (-x)^{n-1}\,dx$$

et par linéarité de l'intégration:

$$= 1 - 1 + \left[\frac{(-x)^n}{n}\right]_{-1}^{0}$$

$$\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$$

6) D'après le résultat précédent:

$\mathbb{P}(Z_n - X_n = 0) = \frac{1}{n}$ soit:

$$\mathbb{P}(T_n = 0) = \frac{1}{n}$$

$$\neq 0$$

Donc, T_n n'est pas à densité

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
Épreuve de : Maths appro - EMC		

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c)
```
import numpy random as rd
import numpy as np

def VarT(n) :
        z = var2(n)
        x = rd.random()
        return z - x
```

5 - a) l'ensemble des valeurs prises par T_{500} est infini et ne semble pas, être une suite indexée par n donc T_{500} ne semble pas être discrette.

6) D'après q 4-a), $P(T_{500}=0) = \frac{1}{500}$
Donc, 2000/500 est le nombre de fois où T_{500} prend la valeur 0
or, $\frac{20000}{500} \simeq 50$ et comme le rectangle le plus à droite semble être de hauteur 50, alors le résultat est cohérent avec le résultat de q 4-a)

Problème

Préliminaire

1- D'après le résultat admis :

$\dim(E^*) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R})$ et comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$
$= \dim(E)$

2-a) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (car $\varphi : E \to \mathbb{R}$) donc :

$\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(\mathbb{R})$
≤ 1

Ainsi $\mathrm{rg}(\varphi) \in \{0, 1\}$

b) ▷ Si $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$

Alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}}\}$

Donc, $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$

▷ Si $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$

Alors $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc :

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$

Ainsi, φ est surjective

c) $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset E$ et d'après la formule du rang, et comme $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ d'après q 2-b) :

$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\varphi)$
$= n - 1$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

Partie I :

3-a) ▷ $g : E \to \mathbb{R}$

▷ Soit $(\lambda, P_0, P_1) \in \mathbb{R} \times E \times E$.

$g(\lambda P_0 + P_1) = \int_0^1 (\lambda P_0 + P_1)(t)\,dt$

et par linéarité de l'intégration :

$= \lambda \int_0^1 P_0(t)\,dt + \int_0^1 P_1(t)\,dt$

$g(\lambda P_0 + P_1) = \lambda g(P_0) + g(P_1)$

Donc, $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Ainsi, $g \in E^*$

b) ~~Soit $P \in \text{Ker}(g)$~~

~~Alors $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$~~

$g(X^p) = \int_0^1 t^p\,dt$

$= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$

$g(X^p) = \frac{1}{p+1}$

$\neq 0$

Ainsi, g est un élément de E^* non nul

Donc, d'après q2-, $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}_p[X]) - 1$

$= p+1-1$

$\dim(\text{Ker}(g)) = p$

c) Soit $k \in [\![1,p]\!]$

$g(q_k) = \int_0^1 t^k - \frac{1}{k+1}\, dt$

$= [\frac{t^{k+1}}{k+1}]_0^1 - (1-0)\frac{1}{k+1}$

$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}$

$g(q_k) = 0$

Ainsi, $q_k \in \ker(g)$ (et ceci pour tout $k \in [\![1,p]\!]$)

▷ $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\deg(q_k) = k$

et $\underset{>0}{\deg(q_1) = 1}$

Donc, $0 < \deg(q_1) < \deg(q_2) < \dots < \deg(q_p)$

Ainsi, $(q_1, \dots, q_p)$ est une famille de polynomes de $\ker(g)$ à degrés échelonnés

Donc, $(q_1, \dots, q_p)$ est une famille libre de $\ker(g)$ contenant $p = \dim(\ker(g))$ éléments (q 3-b)) donc $(q_1, \dots, q_p)$ est une base de $\ker(g)$.

4-a) ▷ $f : E \to \mathbb{R}$

▷ Soit $(\lambda, P_0, P_1) \in \mathbb{R} \times E \times E$.

$f(\lambda P_0 + P_1) = (\lambda P_0 + P_1)(0)$

$= \lambda P_0(0) + P_1(0)$

$= \lambda f(P_0) + f(P_1)$

Donc, $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Ainsi, $f \in E^*$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro. EMC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) Soit $P_2 = X^p + 1$

Alors, $f(P_2) = 0 + 1$
$= 1$
$\neq 0$

Donc, f est non nulle

Ainsi, d'après q2-c), $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_p[X]) - 1$
$= p+1-1$
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p$

▷ $\forall k \in [\![1,p]\!], f(X^k) = 0^k$
$= 0$

Donc, $(X, X^2, \dots, X^p)$ est une famille de $\mathrm{Ker}(f)$
comme elle est à degrés échelonnés cette famille est libre
De plus, elle contient p éléments et d'après ce qui précède, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p$

Donc, $(X, \dots, X^p)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$

D'où, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^p)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5-a) D'après q2-c), $\begin{cases} \dim(Ker(f)) = n-1 \\ \dim(Ker(g)) = n-1 \end{cases}$

Ainsi, $Ker(f) \subset Ker(g)$ et $\dim(Ker(f)) = \dim(Ker(g))$

Donc, $\dim(Ker(f)) = \dim(Ker(g))$

b) Comme f est non nul, $\exists x_0 \in E \,/\, f(x_0) \neq 0$

Donc, $\exists x_0 \in E \,/\, x_0 \notin Ker(f)$.

c) ▷ $\begin{cases} Ker(f) \subset E \\ Vect(x_0) \subset E \end{cases}$ donc $Ker(f) + Vect(x_0) \subset E$

▷ Soit $x \in Ker(f) \cap Vect(x_0)$

Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, x = \lambda x_0$ et $f(x) = 0$

Comme f est linéaire, $f(\lambda x_0) = 0$ d'où :

$\lambda f(x_0) = 0$ et comme d'après q5-b), $f(x_0) \neq 0$

$\lambda = 0$

Donc, $x = 0_E$

Ainsi, $Ker(f) \cap Vect(x_0) = \{0_E\}$

Donc, $Ker(f)$ et $Vect(x_0)$ sont en somme directe.

▷ D'autre part, comme $x_0 \neq 0_E$, $\dim(Vect(x_0)) = 1$ d'où :

$$\dim(\ker(f) \oplus \mathrm{Vect}(x_0)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Vect}(x_0))$$

$$= n-1+1$$

$$= n$$

$$= \dim(E)$$

Ainsi, $\ker(f) \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = E$.

d) Soit $x \in E$

D'après q5-c) : $\exists (\lambda, a) \in \mathbb{R} \times \ker(f) \mid x = a + \lambda x_0$

Comme f et g sont linéaires, on a :

$$h(x) = g(x_0) f(\lambda x_0 + a) - f(x_0) g(\lambda x_0 + a)$$

$$= \lambda (g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(x_0)) + g(x_0) f(a) - f(x_0) g(a)$$

et comme $g(a) = f(a) = 0$ (car $a \in \ker(f)$)

$$h(x) = 0$$

Ainsi, h est nulle

e) Comme $f(x_0) \neq 0$, d'après q5-d) :

$g = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} . f$ et en posant $\mu = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)}$:

$g = \mu . f$

D ~~Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$~~
~~Alors $\exists x \in E \mid y = g(x)$ soit :~~

~~$y = \mu f(x)$ et comme f est linéaire :~~
~~$y = f(\mu x)$ donc :~~

~~$y \in \mathrm{Im}(f)$~~

~~Donc, $Im(g) \subset Im(f)$ et d'après la formule du rang :~~

~~$rg(g) = dim(E) - dim(Ker(g))$ d'où d'après q5-a)~~

~~$= dim(E) - dim(Ker(f))$~~
~~$= rg(f)$~~

Donc, $Im(f) = Im(g)$

~~Donc, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists (x_1, x_2) \in E \mid y = g(x_1)$~~
~~$y = f(x_2)$~~

Ainsi, $g \in Vect(f)$

Partie - II

6-a) Comme $H \subset E$
$(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre de E
D'après le théorème de la base incomplète,
$\exists e_n \in E$ tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

b) $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$ donc cette définition est correcte

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i \in Ker(\varphi)$ donc :

$vect(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset Ker(\varphi)$ soit d'après q6-a) :

$H \subset Ker(\varphi)$ donc :

$dim(H) \leq dim(Ker(\varphi))$ soit :

$n-1 \leq dim(Ker(\varphi))$

supposons que $dim(Ker(\varphi)) = n$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro. EMC		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

Alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = E$ or $\underbrace{\varphi(e_n) = 1}_{\neq 0}$ ce qui est absurde

Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n-1$
$= \dim(H)$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$

7- ▷ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$

Alors $f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$ soit :

$(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc :

$x \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)$ d'où :

$\mathrm{Ker}(f) \subset \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)$

▷ Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i(x) = 0$ d'où :

$(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc :

$f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$ d'où :

$\bigcap_{i=1}^{p} Ker(f_i) \subset Ker(f)$

Ainsi, on a démontré que :

$$Ker(f) = \bigcap_{i=1}^{p} Ker(f_i)$$

8-a) $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$

Comme f est surjective, $\exists\, x \in E \,/\, f(x) = \varepsilon_1$

b) D'après le raisonnement de Q8-a),

$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \exists\, x_i \in E \,/\, f(x_i) = \varepsilon_i$

Procédons par récurrence forte.
Posons, $\forall\, j \in [\![1,p]\!]$, $A(j)$: " la famille $(f_1, \dots, f_j)$ est libre dans E^* "

▷ f_1 est non nulle donc (f_1) est libre dans E^*

▷ Soit $j \in [\![1,p-1]\!]$. Supposons que $A(1), \dots, A(j-1)$ sont vraies

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_j) \in \mathbb{R}^j$.

Supposons que $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i f_i = 0_{E^*}$

En évaluant cette relation en x_j, on a

$$(\lambda_1 f_1(x_j), \dots, \lambda_j f_j(x_j)) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

et comme $f(x_j) = \varepsilon_j$, alors $\forall i \in [\![1, j-1]\!]$, $f_i(x_j) = 0$

et $f_j(x_j) = 1$

Donc, $\lambda_j \times 1 = 0$ soit :

$\lambda_j = 0$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i f_i = 0$ donc par hypothèse de récurrence, comme $(f_1, \dots, f_{j-1})$ est libre :

$\forall i \in [\![1, j-1]\!]$, $\lambda_i = 0$

D'où, la famille $(f_1, \dots, f_j)$ est libre

Donc, $A(j+1)$ est vraie

* $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $(f_1, \dots, f_j)$ est libre.

Ainsi, en particulier, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

9-a) Comme f n'est pas surjective

$rg(f) < \dim(\mathbb{R}^p)$ d'où :

$n < p$.

b) $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ donc :

d'après le théorème de la base incomplète : il existe $(e_{n+1}, \dots, e_p) \in \mathbb{R}^{p-n}$ tel que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$.

▷ Si $m = p-1$

Alors $Im(f) = H$ où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$

▷ Si $m \leqslant p-2$

Alors en posant $H = Im(f) \oplus Vect(e_{m+1}, \dots, e_{p-1})$, H est

un hyperplan de $\mathbb{R}^p$

Ainsi, dans tous les cas, $Im(f)$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$

c) Comme H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$, il existe φ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^p$ telle que $H = Ker(\varphi)$ (d'après q6-)

Ainsi, d'après q9-b):

$$Im(f) \subset Ker(\varphi) \quad \text{où } \dim(Ker(\varphi)) = p-1$$

▷ Supposons que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans $\mathbb{R}^{p*}$

On a, $\forall i \in [\![1, p]\!], \forall x \in E, \ \varphi \circ f_i(x) = 0$

Donc, $\forall i \in [\![1, p]\!], \ \varphi \circ f_i = 0_{L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}$

Ainsi, $Vect(f_1, \dots, f_p) \subset Ker(\varphi)$

Comme $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, génératrice de $Vect(f_1, \dots, f_p)$ et contient p éléments, alors:

$\dim(Vect(f_1, \dots, f_p)) = p$ donc :

$$p \leqslant \dim(Ker(\varphi)) \leqslant p-1$$ ce qui est absurde.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths appro - EMC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc, la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^*.

10. a)

b) Comme f est surjective, $Im(f) = \mathbb{R}^p$ (*)

D'après q7. :

$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = \dim(\ker(f))$ et comme $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^p)$ d'après la formule du rang :

$= \dim(E) - rg(f)$ donc d'après (*) :

$= n - \dim(\mathbb{R}^p)$ soit :

$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = n - p$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie - III

11 - a) ▷ Comme $\langle .,. \rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ alors $f_a : E \to \mathbb{R}$

▷ Soit (λ, x_1, x_2)

Par bilinéarité de $\langle .,. \rangle$

$$f_a(\lambda x_1 + x_2) = \langle a, \lambda x_1 + x_2 \rangle$$

$$= \lambda \langle a, x_1 \rangle + \langle a, x_2 \rangle$$

$$= \lambda f_a(x_1) + f_a(x_2)$$

Donc, $f_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Donc, $f_a \in E^*$

b) ▷ Soit $x \in Ker(f_a)$

Alors $\langle a, x \rangle = 0$ d'où :

$x \in Vect(a)^\perp$ donc :

$Ker(f_a) \subset Vect(a)^\perp$

▷ Soit $x \in Vect(a)^\perp$

Alors, $\langle a, x \rangle = 0$ d'où :

$x \in Ker(f_a)$ donc :

$Vect(a)^\perp \subset Ker(f_a)$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f_a) = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$

c) supposons que $f_a = 0_{E^*}$

Alors $\forall x \in E$, $\langle a, x\rangle = 0$

Donc, $a \in E^{\perp} = \{0_E\}$

Donc, $a = 0_E$

II-a) Soit $(\lambda, a_0, a_1) \in \lambda \times E^2$

$$\Phi(\lambda a_0 + a_1) = f_{\lambda a_0 + a_1}$$

Montrons que $f_{\lambda a_0 + a_1} = \lambda f_{a_0} + f_{a_1}$

$\forall x \in E$, $f_{\lambda a_0 + a_1}(x) = \langle \lambda a_0 + a_1, x\rangle$

$= \lambda \langle a_0, x\rangle + \langle a_1, x\rangle$

$\forall x \in E$, $f_{\lambda a_0 + a_1}(x) = \lambda f_{a_0}(x) + f_{a_1}(x)$ donc :

$$f_{\lambda a_0 + a_1} = \lambda f_{a_0} + f_{a_1}$$

Donc :

$\Phi(\lambda a_0 + a_1) = f_{\lambda a_0 + a_1}$

$= \lambda f_{a_0} + f_{a_1}$ (d'après ce qui précède

$= \lambda \Phi(a_0) + \Phi(a_1)$

Donc, Φ est linéaire

6) Soit $a \in E$

Alors $\Phi(a) = 0 \Rightarrow f_a = 0$

Donc, d'après q11-c),

$a = 0_E$

Donc, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$

Ainsi, Φ est injective

or, d'après q1-, $\dim(E) = \dim(E^*)$

Donc, Φ est bijective

Ainsi, Φ est un isomorphisme de E sur E^*

c) Comme Φ est un isomorphisme de E sur E^*,

$\forall \varphi \in E^*, \exists! \, a \in E \mid \varphi = \Phi(a)$ soit :

$\varphi = f_a$ soit :

$\forall x \in E, \varphi(x) = f_a(x)$ d'où :

$\forall x \in E, \varphi(x) = (a, x)$.

13-a) ▷ $\langle \cdot, \cdot \rangle : (M_p(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$

Soit (λ, A_0, B_0, B_1)

▷ $\langle A_0, B_0 \rangle = \mathrm{Tr}({}^tA_0 B_0)$
$= \mathrm{Tr}({}^t({}^tA_0 B_0))$
$= \mathrm{Tr}({}^tB_0 \, {}^t({}^tA_0))$
$= \mathrm{Tr}({}^tB_0 A_0)$
$= \langle B_0, A_0 \rangle$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EML.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est symétrique

▷ $\langle A_0, \lambda B_0 + B_1 \rangle = Tr({}^tA_0(\lambda B_0 + B_1))$

et comme tr est linéaire :

$= \lambda Tr({}^tA_0 B_0) + Tr({}^tA_0 B_1)$

$= \lambda \langle A_0, B_0 \rangle + \langle A_0, B_1 \rangle$

Par symétrie, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est billinéaire

▷ ${}^tA_0 A_0 = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} a_{j,k}\right)_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}$

$\langle A_0, A_0 \rangle = Tr({}^tA_0 A_0)$

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}^2$

$\geqslant 0$

▷ supposons que $\langle A_0, A_0 \rangle = 0$

Alors $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}^2 = 0$

or, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $a_{i,k}^2 \geqslant 0$

Donc, $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{i,k}^2 = 0$ soit :
$$a_{i,k} = 0$$

Donc, $A_0 = 0_p$.

Ainsi, $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $M_p(\mathbb{R})$

6) Ici $E = M_p(\mathbb{R})$

Supposons que $\varphi \in E^*$, c'est-à-dire que φ est une forme linéaire de E.

D'après q(2-c), comme d'après q(3-a) $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors :

$\exists A_0 \in M_p(\mathbb{R}) \mid \forall M \in E$, $\varphi(M) = \langle A_0, M \rangle$ soit :

$$\varphi(M) = Tr({}^tA_0 M)$$

Ainsi, en posant $A = {}^tA_0$, on peut conclure :

Il existe une matrice A dans $M_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $M_p(\mathbb{R})$ on a :

$$\varphi(M) = Tr(AM)$$

Exercice 1 :

3-. $\forall x \in]0,1[$, $F_n(x) = 1 - (1-x)^n$ donc, comme $|1-x|<1$

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

$= F(x)$

Montrons que $F(x)$ est une fonction de répartition :

F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 0$
≥ 0

Donc, F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, en posant Z la variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

$$Z_n \xrightarrow{(L)} Z$$

~~Exercice 1 :~~

~~2-6) Comme~~ $\cancel{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n(n1)}$