Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 30	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques BTL Lyon

E3-00015 Maths S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k ; k+1]$

donc $\forall t \in [k ; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

ces fonctions sont continues sur $[k ; k+1]$ donc par croissance de l'intégrale sur des bornes croissantes, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$$

b) Par sommation pour $k \in [\![1 ; n-1]\!]$ $(n \geq 2)$ dans la 1) a)

on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$

d'après la Relation de Chasles

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$

donc d'après l'énoncé, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\forall n \geq 2$, $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq S_n - \frac{1}{n}$

c) $\int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln(|t|)]_1^n = \ln n$

donc d'après le 1) b) on a : $\forall n \geq 2$,

$\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \ln n$ (*)

d) $\forall n \geq 2$, $\ln n > 0$

donc en divisant par $\ln n$ dans (*),

on a : $1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$ (car $\lim_{n \to +\infty} n \ln n = \lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$)

donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$

donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

2) a) rang(50) signifie que le programme tourne jusqu'à ce que S_n soit supérieur ou égal à 50 !

b) ~~Si l'on fait l'appel~~ rang(5~~0) alors~~ ~~pour~~ ~~k ≥ 50~~,

$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ or, $\ln n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ donc pour un n assez grand,

on a : $S_n \geq 50$

si l'on fait l'appel rang(50) alors on a : $S_n = \ln n$ pour n assez grand !

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0; x]$

$x \in]0; 1[$, $t \neq 1$

donc somme géométrique licite

ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}$

b) $t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$ est continue sur $[0;x]$ (fonction polynomiale)

donc par passage à l'intégrale et d'après la 3) a), on a :

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$$

d'où par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \left[-\ln(|1-t|)\right]_0^x = -\ln(1-x)$$

$$\int_0^x t^{k-1}\,dt = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \frac{x^k}{k}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

c) $\forall t \in [0;x]$, $x \in]0;1[$, $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$

ces fonctions sont continues sur $[0;x]$ d'où par croissance de l'intégrale sur des bornes croissantes, on a :

$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \text{car } x < 1$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 30	**Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques EDT Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

suite Ex 1 : donc par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0 \quad (\times)$$

d) x est indépendante de n donc en faisant tendre n vers $+\infty$ ~~on a~~ : dans la 3)b)

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ car $(\times)$

donc $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Exercice 2 :

1) a) ~~$\forall x$~~ $Z_n(\Omega) =]0;1[$

~~donc~~ $\forall x<0$, $F_n(x) = 0$

$\forall x \geq 1$, $F_n(x) = 1$

F_n est la fonction de répartition de Z_n

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall x \in [0;1]$, ~~$P(Z_n \leq x)$~~

$\leq$

$1 - F_n(x) = P(Z_n > x)$
$= P(\min(X_1, ..., X_n) > x)$
$= P(X_1 > x) \cap ... \cap (X_n > x)$
$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right)$
$= \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \leq x))$, les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes de
$= (1-x)^n$ $0 < x < 1$ même loi et à densité $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$

donc $\forall x \in [0;1]$, $F_n(x) = 1 - (1-x)^n$.

b) F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1 (X)

F_n est continue sur $]-\infty; 0[$ $]1; +\infty[$ en tant que fonction constante (nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$)

F_n est continue sur $[0;1]$ en tant que fonction polynomiale

et $\lim_{x \to 0^+} F_n(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 - (1-x)^n = 1 - 1 = 0$
$= F_n(0)$

donc F_n est continue à ~~gauche~~ droite en 0

6/30

et $\lim\limits_{x \to 1^-} F_n(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1-(1-x)^n$

$= 1 - 0 = 1 = F_n(1)$

donc F_n est continue à ~~droite~~ gauche en 1

donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (*)

donc Z_n est à densité d'après (*) et (**)

c) $\forall x < 0$, $F_n'(x) = 0$

$\forall x > 1$, $F_n'(x) = \cancel{1}\ 0$

$\forall x \in [0;1]$, $F_n'(x) = n(1-x)^{n-1}$

donc F_n' et f_n coïncident sur ~~R~~ $\mathbb{R}$

or, F_n' est une densité de Z_n par le cours

donc $f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de Z_n

2) ~~return min(np.rand()~~

return np.min(rd.rand(n))

3) $\forall x \in]0;1]$, $|1-x| < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-x)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-(1-x)^n = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

donc $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ (Variable nulle)

4) a) Considérons $Z_{n-1} = \inf(X_1, \dots, X_{n-1})$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_n = X_n)$

$= P(\inf(X_1, \dots, X_n) = X_n)$

$= \cancel{P(X_1 \geq X_n \cap \dots \cap X_n \geq X_{n-1})}$

$\boxed{\cancel{X_n > X_n}} = \cancel{\emptyset}$ $[X_n \geq X_n] = \Omega$ (événement certain)

$= P(X_1 \geq X_n \cap \dots \cap X_{n-1} \geq X_n)$ $(P(X_1 \geq X_n) \cap \dots \cap (X_n \geq X_n))$
$= (P(X_1 \geq X_n) \cap \dots \cap (X_{n-1} \geq X_n)$

$= \cancel{P(\inf(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq X_n)}$

$= \cancel{P(Z_{n-1} - X_n \geq 0)}$

$= P(\inf(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq X_n)$

$= P(Z_{n-1} - U \geq 0)$ car $X_n \sim \mathcal{U}([0,1])$
et $U \sim \mathcal{U}([0,1[)$

or, d'après l'énoncé

$P(Z_{n-1} - U \geq 0) = \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Conclusion, $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

c) $P(Z_n - X_n = 0) = \frac{1}{n} \neq 0$, $T_n = Z_n - X_n$

donc $P(T_n = 0) = \frac{1}{n} \neq 0$, T_n n'est donc pas à densité

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 30	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Exercice 2 :

c) def Var T

```
from numpy import as np
from random import as rd
~~from numpy import ...~~

return (np.Var2(n) - rd.rand(n))
```

Var2(n) étant la fonction Python qui simule Z_n dans la 3) b)

5) a) Non, T_{500} n'est pas discrète car après lecture ~~que~~ de la figure 1, on remarque que $T_{500}(\Omega)$ n'est pas dénombrable.

b) Oui elle l'est car $P(T_n=0)=\frac{1}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ lorsque n est assez grand. (Beaucoup de valeurs ~~de~~ seront alors proches de 0)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Problème : Préliminaires :

1) $\dim(E^*) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R})$

or, $\dim(\mathbb{R}) = 1$

donc $\dim(E^*) = \dim(E)$.

2) a) $\varphi \in E^*$, donc φ est une forme linéaire de E sur $\mathbb{R}$

si $\varphi = 0$ alors $rg(\varphi) = 0$

~~si φ est non nulle, $Im(\varphi)$ $rg(\varphi)$~~ $= \dim(E)$ ~~$- \dim(\ker(\varphi))$~~ $=$ ~~$n - (n-1)$~~ $= 1$

~~d'après le théorème du rang comme on travaille en dimension finie~~

si $\varphi \neq 0_E$ alors $rg(\varphi) \neq 0$

or, $E = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$)

donc nécessairement $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}$

donc $rg(\varphi) = 1$

si $\varphi \neq 0$, ~~alors $Im(\varphi) = \mathbb{R}$ donc $rg(\varphi) = 1$~~

donc les rangs possibles de φ sont 0 ou 1.

b) si $rg(\varphi) = 0$ alors $\varphi = 0_E$

donc φ est nulle

si $rg(\varphi) = 1$ alors on a : $rg(\varphi) = \cancel{rg(\mathbb{K})}$ $\dim(\mathbb{K})$

et $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}$ comme $Im(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$

donc $Im(\varphi) = \mathbb{R}$

donc φ est surjective

φ est donc soit surjective soit nulle.

c) $\varphi \neq 0_E$, $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E

donc φ est une forme linéaire surjective

et $Im(\varphi) = \mathbb{R}$ cf (2-b)

donc d'après le théorème du rang comme E

est de dimension finie, on a :

$\dim(\ker(\varphi)) = n - 1$, donc $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E

Partie I :

3)a) $E = \mathbb{R}_p[X]$

$P \in \mathbb{R}_p[X]$

~~donc $\exists (\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$,~~

~~$P(t) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k t^k$~~

~~donc par linéarité de l'intégrale, on a :~~

~~$g(P) =$~~

donc par linéarité de l'intégrale, on a :

$$g(P) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_k}{k+1} \in \mathbb{R}$$

Soient $(P_1, P_2) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\lambda P_1 + P_2) &= \int_0^1 (\lambda P_1 + P_2)(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 P_1(t) dt + \int_0^1 P_2(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda g(P_1) + g(P_2) \end{aligned}$$

donc g est une forme linéaire de E sur $\mathbb{R}$

donc $g \in E^*$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques ENS Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Partie I :

b) ~~$\text{si } g(P)=0$ alors $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$~~

~~donc supposons que $\exists t_0 \in [0;1]$, $P(t_0) \neq 0$~~

~~alors alors $\sum_{k=0}$~~

si $g(P)=0$ alors $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$

supposons $P(t) \leq 0$ alors comme ~~F~~ P est continue sur $[0;1]$

et $\int_0^1 P(t)dt = 0$

alors on a : $P(t)=0$ donc f admet une infinité de racines

donc P est le polynôme nul

Absurde car $P \in E$ et donc $\deg(P) \geq 1$

On obtient le même résultat si on suppose que $P(t) \geq 0$

D'où une contradiction donc $g(P) \neq 0$

donc d'après la 2-c), $\dim(\ker(g)) = p$.

c) soit $k \in [\![1;p]\!]$,

$$g(Q_k) = \int_0^1 t^k - \frac{1}{k+1}\,dt$$
$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0$$

donc $Q_k \in \ker(\varphi)$

et la famille $(x, \dots, x^p)$ est une famille de polynômes non nuls à degrés échelonnés

elle est donc libre et de cardinal $p = \dim(\ker(\varphi))$

c'est donc une base de $\ker(\varphi)$.

4) a) $f(P) = P(0) \in \mathbb{K}$

~~$\forall$~~ soient $(P_1, P_2) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(0)$$
$$= \lambda P_1(0) + P_2(0)$$
$$= \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

donc $f \in E^*$.

b) Soit $P \in \ker(f)$,

alors $P(0) = 0$, $P \in E$, $\ker(f) \subset \text{Vect}(X, \dots, X^p)$
et $\dim(\ker(f)) = p = \text{Card}(\text{Vect}(X, \dots, X^p))$ car f non nulle donc $\ker(f)$ est un hyperplan de E

donc $\ker(f) = \text{Vect}(X, \dots, X^p)$.

5) a) $\ker f \subset \ker g$ (*)

f et g sont deux éléments de E^*, non nuls

~~car~~ donc leurs noyaux sont des hyperplans de E

(**) donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g)) = n - 1$ c/ énoncé

donc d'après (*) et (**), on a :

$\ker f = \ker g$.

b) $\dim \ker f = n - 1$

or, $\dim(E) = n$ donc d'après le théorème du rang (on est en dimension finie), on a :

$\text{rg}(f) = 1$

donc $\exists x_0 \in E \mid x_0 \in \text{Im}(f)$, donc il existe un vecteur x_0 de E qui n'appartient pas à ~~Vect(f)~~ $\ker(f)$

c) $x_0 \neq 0_E$

donc $\dim(\mathrm{Vect}(x_0)) + \dim(\ker f))$

$= n - 1 + 1 = n = \dim(E)$

soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Vect}(x_0)$

alors $f(x) = 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda x_0$

alors $f(x) = 0_E$ donc $\lambda f(x_0) = 0_E$

or, $f(x_0) \neq 0_E$ car f non nul d'après l'énoncé

donc $\lambda = 0$ donc $x = 0_E$

donc $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

donc $E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$

d) soit $x \in E$, $\exists! (y, z) \in \ker f \times \mathrm{Vect}(x_0)$

$x = y + z$

alors $\forall x \in E$, ~~f~~ $h(x) = g(x_0) f(x) - f(x_0) g(x)$

$= g(x_0) f(y+z) - f(x_0) g(z+y)$

f est linéaire $= g(x_0) f(y) + g(x_0) f(z) - f(x_0) g(x)$

or, $y \in \ker f = \ker g$ cf (5-a) $- f(x_0) g(y)$

donc $f(y) = g(y) = 0$

donc $h(x) = g(x_0) f(z) - f(x_0) g(z)$

or, $z \in \mathrm{Vect}(x_0)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ z = \lambda x_0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 30 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Partie I

Suite 5) d)

donc $h(x) = g(x_0) f(\lambda x_0) - f(x_0) g(\lambda x_0)$

car f est linéaire $= \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0) = 0_E$

donc $\forall x \in E$, $h(x) = 0$ donc $h = 0_E$

e) comme $h = 0$ on a :

$g(x_0) f = f(x_0) g$

$g(x_0) \neq 0$ alors $f = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g$

en posant $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ on a : $f = \lambda g$.

f et g sont donc colinéaires.

Partie II :

6) a) $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H

H est un hyperplan de E

donc $E = H \oplus \text{Vect}(e_n)$, $e_n \neq 0$ d'où l'existence de e_n

donc la concaténation d'une base de $\text{Vect}(e_n)$ et d'une base de H forme une base de E

donc $\exists e_n \in E$, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

b) φ est une forme linéaire non nulle

donc ~~dim~~ $\dim \ker(\varphi) = n-1$

donc $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$ (H hyperplan)

et $\varphi(e_n) = \cancel{1}\ \lambda \neq 0$ car $\varphi \neq 0_E$

en prenant $\lambda = 1$, on a : $\varphi(e_n) = 1$

la définition est donc correcte.

H est un hyperplan de E, φ est non nulle

donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ donc $rg(\varphi) = 1$ et d'après le théorème du rang, comme on est en dimension finie, on a :

$$\dim(\ker(\varphi)) = n-1 = \dim(H))$$

soit $x \in$ ~~H~~ E, $x \in \ker$ ~~(φ)~~ H

$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de ~~H~~ E

$$\begin{aligned}
x \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(x) = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = 0 \text{ car } \varphi \text{ est linéaire} \\
&\iff \lambda_n e_n + 0 = 0 \quad \text{car } \varphi(e_i) = 0 \text{ pour } i \in [\![1;n-1]\!] \\
&\iff \lambda_n e_n = 0 \\
&\iff \lambda_n = 0 \text{ car } e_n \neq 0_E \\
&\iff x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}) \\
&\iff x \in H
\end{aligned}$$

donc $\ker(\varphi) = H$.

7) Soit $x \in \ker(f)$

$f(x) = 0_E$ alors $f_1(x) = 0_E, \ldots, f_p(x) = 0_E$

alors $x \in \ker\left(\bigcap_{i=1}^{p} f_i\right)$

soit $x \in \ker\left(\bigcap_{i=1}^{p} f_i\right)$

alors $\forall i \in [\![1;p]\!], f_i(x) = 0_E$

donc par définition de f on a: $f(x) = 0_E$

donc $x \in \ker f$

donc par double inclusion, $\ker f = \ker\left(\bigcap_{i=1}^{p} f_i\right)$

8) a) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}$

f est surjective donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^p$
(pour $p=1$)

$\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p = \mathrm{Im}(\varphi)$ donc comme f est surjective

ε_1 admet un antécédent x par f.

b) Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ |

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0_E$

donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) = 0_E$

or, d'après la question 8)a) on a: $f(x) = \varepsilon_1$

~~donc~~ ε_1

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 30 | Session : 2023

Épreuve de : Maths ETI Lyon

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite 8) b) f est surjective donc ~~ker(φ)~~ $\dim(\ker(\varphi)) = n-s$

et donc d'après le 8.a)

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x) = 0_E$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i = 0_E \quad \text{cf } (8.a)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Car la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est libre

donc la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans E^*

9) a) f n'est pas surjective donc $\operatorname{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}^p$

donc $m = \operatorname{rg}(\varphi) \neq$ ~~n~~ p.

b) Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de $\operatorname{Im} f$

alors d'après le théorème de la base incomplète,

il existe $p-m$ vecteurs $(e_{m+1}, \ldots, e_p)$ ~~tel~~ de $\mathbb{R}^p$

telles que $B = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$

donc ~~Ker~~ Im f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$

(*) donc $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^p$ donc $rg(f) \leq p$

Supposons que ~~Im f~~ $p = rg(f)$

alors $m = p$ donc cela veut dire que

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$ car on a une inclusion avec (*) et l'égalité des dimensions dans (**)

or, f n'est pas surjective donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^p$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^p \\ x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{pmatrix}$$

Contradiction donc $rg(f) \neq p$

donc $rg(f) \leq p-1$

Notons H un hyperplan de $\mathbb{R}^p$, $\dim(H) = p-1$

donc $\mathrm{Im}(f) \subset H$.

c) Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0$, on va considérer que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre

donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i = 0$

Soit $(e_1, \_\_, e_{p-1})$ une base de H alors $(e_1, \_\_, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ d'après la question 9)c)

Notons $f_i(e_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \in [\![1; p-1]\!] \\ 1 \text{ si } i = p \end{cases}$ d'après la question 6) (Unicité)

~~alors on a $f_p(e_p)$~~ donc $\ker(f_i) = H$

or, $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f_i) = H$ cf (9.c)

donc si $\forall i \in [\![1; p]\!]$, $\alpha_i = 0$ alors en prenant $x \in \mathbb{R}^p$
$\Rightarrow x = \sum_{i=1} \lambda_i e_i \in \underset{= \ker(f_i)}{H}$

on a : $x = 0_E$

donc $\ker(f_i) = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$,

Absurde, donc $\exists i_0 \in [\![1; p]\!]$, $\alpha_{i_0} \neq 0$

donc il existe $(\alpha_1, \_\_, \alpha_p)$ non tous nuls tels que :

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0_E$ donc la famille $(f_1, \_\_, f_p)$ est liée

10) a) $(f_1, \_\_, f_p)$ est libre dans E^*

~~donc~~ ~~lx~~

or, on a montré ~~que~~ dans la question 9) a) que :

f n'est pas surjective $\Longrightarrow$ $(f_1, \_\_, f_p)$ ~~dans~~ est liée dans E^*

donc par contraposée

$(f_1, \_\_, f_p)$ est libre dans $E^* \Longrightarrow f$ est surjective donc f est bien surjective

b) $\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$

donc $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = \dim(\ker(f))$ $(*)$

or, f est surjective donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$

donc $rg(f) = p$ or, $\dim(E^*) = n$

donc d'après le théorème du rang (on est en dimension finie), on a :

$\dim(\ker(f)) = n - p$ donc d'après $(*)$, on a :

$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = n - p$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths ENS Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III :

1) a) $\forall x \in E$, $f_a(x) = \langle a ; x \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle ; \rangle$ est un produit scalaire

De plus, f_a est ~~linéaire~~ linéaire

car $\langle ; \rangle$ est un produit scalaire sur E donc linéaire par rapport à l'une de ses variables

donc $f_a \in E^{*}$.

b) ~~Soit~~ $x \in \ker(f_a)$,

$\Leftrightarrow f_a(x) = 0_E \Leftrightarrow \langle a ; x \rangle = 0_E$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$

donc $\ker(f_a) = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$, $a \neq 0_E$, car $a \in E$ et $\dim E = n \geq 1$

c) Si f_a est l'application nulle

car $\forall x \in E$, $f_a(x) = 0_E$

donc $\langle a ; x \rangle = 0_E$

donc $a \in E^\perp = \{0_E\}$, $x \in E$

donc $a = 0_E$

si $f_a = 0_E$ alors $a = 0_E$

12) ~~f_a est linéaire~~

$\forall (a, b) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\phi(\lambda a + b) = f_{\lambda a + b}(x)$, $x \in E$

$= \cancel{\lambda} \langle \lambda a ; x \rangle + \langle b ; x \rangle$

$= \cancel{\lambda} f_{\lambda a}(x) + f_b(x)$, le produit scalaire est linéaire

$= \lambda \phi(a) + \phi(b)$

donc ϕ est linéaire.

b) ϕ est linéaire, or, $f_a \in E^*$

donc $\phi \in E^*$

et $\dim(E) = \dim(E^*)$ cf (1 - Partie I)

soit $a \in \ker(\phi)$ alors $\phi(a) = 0_E$
alors $f_a = 0_E$

donc d'après la 11) c), on a : $a = 0_E$

donc $\ker(\phi) = \{0\}$

donc ~~com~~ ϕ est injective et $\dim(E) = \dim(E^*)$

De plus, on est en dimension finie

donc ϕ est bien un isomorphisme de E sur E^*.

c) Soit $\varphi \in E^*$, supposons qu'ils existent $(a, a') \in E^2$

tels que $\varphi(x) = \langle a ; x \rangle$
$\varphi(x) = \langle a', x \rangle$, $x \in E$

alors $\langle a ; x \rangle - \langle a', x \rangle = 0_E$

alors ~~⟺~~ $\langle a - a', x \rangle = 0_E$ par bilinéarité du produit scalaire

alors $(a - a') \in E^{\perp} = \{0_E\}$

donc $a - a' = 0$
donc $a = a'$

il existe donc un unique $a \in E$ tel que :

$\forall \varphi \in E^*, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a ; x \rangle$

13) a) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}}$

$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}}$

Notons $C_{ij} = ({}^tAB)_{i,j \in [\![1;p]\!]^2}$

par produit matriciel, on a :

~~$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$~~

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{jk}$$

or, $tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ki} b_{ki} \in \mathbb{R}$

Soient $(A_1, A_2) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $\langle \lambda A_1 + A_2 ; B \rangle = tr({}^t(\lambda A_1 + A_2) B)$

par linéarité de la transposée $= tr((\lambda {}^tA_1 + {}^tA_2) B)$

par linéarité de la trace $= \lambda tr({}^tA_1 B) + tr({}^tA_2 B)$

$= \lambda \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$

donc $\langle ; \rangle$ est linéaire par rapport à ses variables

et symétrique donc bilinéaire

en effet, par commutativité du produit de deux réels, on a $tr({}^tBA) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p}$ ~~$a_{ki} b_{ki}$~~ $b_{ki} a_{ki} = tr({}^tAB)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 30 | Session : 2023

Épreuve de : Maths EM Lyon.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Suite Partie III :

Suite 13) a)

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$, $tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (a_{ki})^2 \geq 0$

$tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (a_{ki})^2 = 0$

or, il s'agit d'une somme de termes positifs ou nuls donc chacun des termes est nul

donc $(a_{ki})^2 = 0$ donc $a_{ki} = 0$ donc $A = 0_{M_p(\mathbb{R})}$

donc $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire sur $M_p(\mathbb{R})$

13) b) si $\varphi : E \longmapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire

Notons pour ${}^tA \in M_p(\mathbb{R})$, $\phi({}^tA) = f_{{}^tA}$ $(A \in M_p(\mathbb{R}))$

où $\forall M \in \mathbb{R}$, $f_{{}^tA}(M) = \langle \varphi({}^tA), M \rangle = \langle {}^tA, M \rangle$
$= tr({}^tAM)$.

$f_{{}^tA}$ est linéaire car $<;>$ est un produit scalaire
donc ϕ est linéaire aussi

Montrons que ϕ est un isomorphisme de E sur E^*

on travaille en dimension finie, car $<;>$ est un produit scalaire ($E = M_p(\mathbb{R})$), $M_p(\mathbb{R})$ est un espace euclidien donc de dimension finie

alors soit ${}^tA \in \ker(\phi)$ alors $\phi({}^tA) = 0_E$

$\Rightarrow <A; M> = 0_E$

$\Rightarrow A \in \cancel{M} E^{\perp} = \{0_E\}$

$\Rightarrow {}^tA = 0_{M_p(\mathbb{R})}$

donc $\ker(\phi) = \{0\}$, de plus $\dim(E) = \dim(E^*)$
donc ϕ est un isomorphisme de E sur E^*

Donc en utilisant de manière licite le résultat de la question 1(2c)

on peut dire que si $\varphi : E \longmapsto \mathbb{R}$ ($\varphi \in E^*$)

alors $\exists A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in E$,

$\varphi(M) = <{}^tA; M> = tr(AM)$