Copie anonyme - n°anonymat :

E8-00041 Maths E

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 26 **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 3 :

1) a) Si $a = b$, on a : $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont sur la diagonale.

Donc $Sp(A) = \{a\}$.

b) Supposons A diagonalisable. Il existe alors P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Or, $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a I_2$

Donc $A = P.aI_2.P^{-1} = aI_2$ or $A \neq aI_2$ donc A n'est pas diagonalisable si $a = b$

2) a) Si $a \neq b$: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

A étant triangulaire supérieure, $Sp(A) = \{a ; b\}$.

b) $\cdot\ A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\cdot\ A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\b^2-ab\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$

Or, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq 0$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} \neq 0$ (car $a \neq b$ donc $b-a \neq 0$)

Il vient : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre a de A.

$\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre b de A.

c) $a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a+b=0 \\ b^2-ab=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=-b \\ b^2+b^2=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=-b \\ 2b^2=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ donc <u>B est une famille libre</u>

De plus, $\left.\begin{array}{l}\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 2 \\ \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2\end{array}\right)$ alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} e_1 \\ \\ e_2 \end{array}$$

d) $\cdot\; AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^2-ab \end{pmatrix}$

Posons $\Delta = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\cdot\; P\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ (b-a)z & (b-a)t \end{pmatrix}$

Donc $AP = P\Delta \iff \begin{cases} a = x+z \\ b = y+t \\ (b-a)z = 0 \\ (b-a)t = b^2-ab \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ b = y+t \\ z = 0 \quad \text{car } b-a \neq 0 \\ (b-a)t = b^2-ab \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ b = y+t \\ z = 0 \\ (b-x)t = b^2-xb \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y + t \\ z = 0 \\ t = b \end{cases} \quad \text{car } (b-x) = (b-a) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = b \end{cases}$$

D'où : $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}$ (qui est bien diagonale)

P étant la matrice de passage, elle est inversible.

D'où : $AP = P\Delta \Leftrightarrow A = P\Delta P^{-1}$ ($\times P^{-1}$ à droite)

Δ étant diagonale et P inversible, $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable}}$ et semblable à Δ ($Sp(A) = Sp(\Delta) = \{a ; b\}$).

(A possédant 2 valeurs propres distinctes, on savait déjà qu'elle était diagonalisable)

3)a) $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$

$(X = Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(X = n) \cap (Y = n)]$ d'où :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\left([X = n] \cap [Y = n]\right)$$

$$\boxed{= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) P(Y = n) \quad \text{par indépendance}}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} (P(X=n))^2$ car X et Y suivent la même loi

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$j = n-1$
$\Leftrightarrow n = j+1$

$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

4) a) On l'a vu en 1) b), si $X=Y$, alors $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable

Il faudrait donc que $P(X=Y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (P(X=n))^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p = 0$

$\Leftrightarrow p \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j} = 0$

$$\iff p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 0$$

$$\iff p \times \frac{1}{p} = 0 \quad \text{(impossible, mon raisonnement n'aboutit pas)}$$

b) Pour de grandes valeurs de n, i est proche de 1

Exercice 1 :

1)
$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour construire A :
- on place "1" comme coefficient s'il existe une arête reliant le sommet i au sommet j, $\forall i \in \{0;1;2;3;4\}$ et $\forall j \in \{0;1;2;3;4\}$
- on place "0" sinon

A est bien symétrique, ce qui est cohérent pour un graphe non orienté.

2) a) Je calcule A^3 car cela me facilitera la tâche et confirmera le résultat.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où : $A^3 = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 2 & & & & 5 & \\ 3 & & & & & \\ 4 & & & & & \end{array}$

Il y a donc 5 chemins de longueur 3 reliant 2 et 3.

Ce sont :
- 2 – 1 – 0 – 3
- 2 – 1 – 2 – 3
- 2 – 3 – 2 – 3
- 2 – 3 – 0 – 3
- 2 – 3 – 4 – 3

b)
```
B = f(A, 3)          # A^3
n = B[2, 3]          # coefficient a_{2,3}
print(n)             # nombre de chemins trouvés en 2)a)
```

3)a)

sommet	1 (= n° 0)	2 (= n° 1)	3 (= n° 2)	4 (= n° 3)	5 (= n° 4)
degré	2	2	2	3	1

D'où : $D = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

b) $L = D - A = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2&-1&0&-1&0\\ -1&2&-1&0&0\\ 0&-1&2&-1&0\\ -1&0&-1&3&-1\\ 0&0&0&-1&1 \end{pmatrix}}$

CQFD

c) $\boxed{L \text{ étant symétrique réelle, il vient : } L \text{ est diagonalisable}}$

4) a) On a : $\cdot\ {}^tX = (a\ b\ c\ d\ e) \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$

$\cdot\ L \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$

$\cdot\ X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$

Donc par produit : $LX \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$

Il vient : ${}^tX . LX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

Via l'énoncé : $\boxed{{}^tXLX \in \mathbb{R}.}$

b) ${}^tXLX = {}^tX . \begin{pmatrix} 2&-1&0&-1&0\\ -1&2&-1&0&0\\ 0&-1&2&-1&0\\ -1&0&-1&3&-1\\ 0&0&0&-1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$$

$$= \Big((2a - b - d)a + (-a + 2b - c)b + (-b + 2c - d)c + (-a - c + 3d - e)d + (-d + e)e \Big)$$

$$= \Big(2a^2 - ab - ad - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - dc - ad - cd + 3d^2 - ed - ed + e^2 \Big)$$

$$= \Big(2a^2 - 2ab - 2ad + 2b^2 - 2bc + 2c^2 - 2cd + 3d^2 - 2ed + e^2 \Big) \quad (*)$$

Or, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 + d^2 - 2da + a^2 + e^2 - 2ed + d^2$$

$$= 2a^2 - 2ab - 2ad + 2b^2 - 2bc + 2c^2 - 2cd + 3d^2 - 2ed + e^2$$

$$= \boxed{(*)}$$

Donc l'égalité est vérifiée

c) $X \neq 0$

$$LX = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix} = \boxed{\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}}$$

car X est un vecteur propre de L associé à λ.

Donc $${}^tX L X = \lambda (a\ b\ c\ d\ e) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\lambda \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right)}$$

L'unique coefficient de ${}^tXLX$ étant une somme de carrés, alors ses valeurs propres sont positives ou nulles. De même

(Mon raisonnement n'aboutit pas)

d) $$LU = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 . U$$

Or, U étant <u>non nul</u>, c'est un vecteur propre de L associé à la valeur propre 0.

D'où : $\boxed{\lambda_1 = 0}$

5) a) $LX = 0 \iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 2d = 0 \\ e = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ 2a - 2c = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 + L_1 \\ -b - 2c + 3d = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \\ e = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2c - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ a = c \\ -b - 2c + 3d = 0 \\ e = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2c - b - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ a = c \\ \cancel{4c - 4d = 0} & L_4 \leftarrow -L_4 + L_1 \\ e = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2c - b - c = 0 \iff c - b = 0 \iff c = b \\ a = d = c \\ a = c \\ e = d = c \end{cases}$

D'où : $E_0(L) = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{vect}(U)$

Donc $\boxed{LX = 0 \iff X \in \text{Vect}(U)}$

b) On sait que $\lambda_1 = 0$

Or, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$

$\iff 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$

Mais $\dim(E_0(L)) = 1$ et L est diagonalisable.

Ainsi, $\dim(E_0(L)) + \dim(E_{\lambda_2}(L)) + \dim(E_{\lambda_3}(L)) + \dim(E_{\lambda_4}(L)) + \dim(E_{\lambda_5}(L)) = 5$

car $L \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. L possède alors d'autres valeurs propres strictement positives.

Donc, cela assure que : $\boxed{0 \leq \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5}$

Exercice 2 :

~~1) $x \longmapsto (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 de sorte que si on l'appelle f,~~

~~on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq f(x) \leq 1$~~

~~$\iff |f(x)| \leq 1$~~

Si l'on prend $f(x) = 0$, l'on a $f'(x) = 0$

donc en particulier, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$|f'(x)| \leq 1$

Cela assure par l'inégalité des accroissements finis que :

$\boxed{\exists K \in]0;1[, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

2) $(x,y) \longmapsto |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$

est positive ; elle est continue sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

3) On suppose que $f(x)=x$ admet plus qu'une solution.

On a : $|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$

$\Leftrightarrow |x-f(y)| \leqslant K|x-y|$

Cela est vrai quand $f(y)=y$, ce qui est absurde.

Il vient : $f(x)=x$ admet au plus une solution.

4) a) Procédons par récurrence. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : "$|u_{n+1}-u_n| \leqslant K^n|u_1-u_0|$"

On a $\cdot |u_1-u_0| = |f(u_0)-u_0|$

$\cdot K^0|u_1-u_0| = |u_1-u_0|$

donc $|u_1-u_0| \leqslant K^0|u_1-u_0|$

et P_0 est vraie

Supposons P_n vraie pour un certain entier n et montrons que :

$$|u_{n+2}-u_{n+1}| \leqslant K^{n+1}|u_1-u_0|$$

On a : $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$

f vérifie $(*)$ donc $|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K |u_{n+1} - u_n|$

Or, $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$ par hypothèse de récurrence

donc $K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$ car $K > 0$

Il vient, par transitivité : $|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$

donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$

CQFD

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|}$

b) On a : $0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$ car une valeur absolue est positive

donc, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n = 0$ car $K \in]0, 1[$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n |u_1 - u_0| = 0$ par produit

Il vient, par encadrement, $(|u_{n+1} - u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et

$\lim\limits_{n \to +\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_{n+1} = a$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge c)

5) a) On a : $|u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0|$ via 4)a)

Donc par sommation de séries convergentes à termes positifs :

$$\underline{\sum_{i=m}^{m+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=m}^{m+p-1} K^i |u_1 - u_0|} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \geq 1$$

b) On a $\sum_{i=m}^{m+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq |u_1 - u_0| \sum_{i=m}^{m+p-1} K^i$

donc (télescopage)

$$|\cancel{u_{m+1}} - u_m| + |\cancel{u_{m+2}} - \cancel{u_{m+1}}| + \dots + |u_{m+p-1+1} - \cancel{u_{m+p-1}}| \leq |u_1 - u_0| \times \frac{K^m - K^{(m+p-1)+1}}{1-K}$$

donc

$$|-u_m + u_{m+p}| \leq K^m \times \frac{1-K^p}{1-K} |u_1 - u_0|$$

via l'inégalité triangulaire

donc $\underline{|u_{m+p} - u_m| \leq K^m \times \frac{1-K^p}{1-K} |u_1 - u_0|}$

c) $\lim_{m \to +\infty} u_m = a = \cancel{\lim_{m \to +\infty} u_{m+p}}$

$\lim_{p \to 0} u_{m+p} = \lim_{p \to 0} u_m = a$

$\lim_{p \to 0} K^p = 1$ (Mon raisonnement n'aboutit pas)

6) a) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme l'inverse d'une telle fonction.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$$

$$f''(t) = -\frac{e^t(1+e^t)^2 - e^t \times 2e^t(1+e^t)}{(1+e^t)^4}$$

$$= -\frac{e^t(1+e^t)\left[(1+e^t) - 2e^t\right]}{(1+e^t)^4}$$

$$= -\frac{e^t\left((1+e^t) - 2e^t\right)}{(1+e^t)^3} \quad \text{car } (1+e^t) > 0$$

$$= -\frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$$

b) $\forall t \in \mathbb{R}$: · $(1+e^t)^3 > 0$
· $e^t > 0$

Donc f'' est du signe de $-(1-e^t)$

$-(1-e^t) \geq 0 \iff 1 - e^t \leq 0$

$\iff 1 \leq e^t$

$\iff t \geq 0$

D'où :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

$$f'(0) = -\frac{e^0}{(1+e^0)^2} = -\frac{1}{4}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

· $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$ donc par quotient : $\lim_{t \to -\infty} f'(t) = 0$

Et $f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{-e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} \sim_{+\infty} \frac{-e^t}{e^{2t}}$

$\sim_{+\infty} -\frac{1}{e^t}$

Or, $\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{e^t} = 0$ donc on a :

$$-\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0 \ (\leq \frac{1}{4})$$

d'où : $\boxed{|f'(t)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

c) D'après l'inégalité des accroissements finis et (*) :

On a : $|f(t) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |t-y|$

Cela assure que $\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4}\text{- contractante}}$

d) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

Or, on a vu que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \leq 0$ donc f est décroissante.

~~Donc $u_{n+1} = f(u_n)$~~

~~Procédons par récurrence :~~

On a :

t	$-\infty$	u_0 $(=0)$	u_1 $(=\frac{1}{2})$	$+\infty$
f	1 ↘	u_1 ↘	u_2 ↘	0

· $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 1$

· $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$

· (u_n) est minorée par 0.

Par récurrence, posons $\forall n \in \mathbb{N}$: P_n : " $u_{n+1} \leq u_n$ "

· $u_0 = 0$

· $u_1 = f(u_0) \in [0;1]$ d'après le tableau ci-dessus

donc

(Mon raisonnement n'aboutit pas : j'aurais sûrement dû trouver (u_n) décroissante et minorée donc converge via le théorème de la limite monotone)

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: P_n : " $u_n \geqslant u_{n+1}$ ".

On a $u_1 \geqslant u_2$ d'après le tableau ci-avant donc P_1 vrai

Supposons P_n vraie pour un certain n et montrons que $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.

On a $u_n \geqslant u_{n+1}$

donc $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$ via le tableau

donc $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ donc (u_n) est croissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers $a \geqslant 0$.

e) def suite(n) :
```
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

f) Pour que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près, il suffit que :

$\frac{K^n}{1-K} |u_1 - u_0| \leqslant 10^{-3}$ (avec $K = \frac{1}{4}$)

Donc $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} |u_1 - u_0| \leqslant 10^{-3} \iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \leqslant 10^{-3}$

$\iff \frac{4}{4^n \times 6} \leqslant 10^{-3}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 26 **Session :** 2023

Épreuve de : Math appli. E AHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{4^n \times 6} \leq \dfrac{1}{10^3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4^n \times 6}{4} \geq 10^3$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow 4^n \times 6 \geq 10^3 \times 4$

$\Leftrightarrow 4^n \geq \dfrac{10^3 \times 4}{6} \Leftrightarrow 4^n \geq \dfrac{10^3 \times 2}{3} \Leftrightarrow \boxed{4^n \geq \dfrac{2000}{3}}$

$\Leftrightarrow \exp(n \ln(4)) \geq \dfrac{10^3 \times 4}{6}$

$\Leftrightarrow n \ln(4) \geq \ln\left(\dfrac{10^3 \times 2}{3}\right)$ car $\dfrac{10^3 \times 4}{6} > 0$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{10^3 \times 2}{3}\right)}{\ln(4)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

g)
```
def approx(n):
    u = 0
    while 4**n < 2000/3:
        u = suite(n)
    return(u)
```

Problème :

I.

1) . $c > 0$ donc $c+1 > 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$

. f est continue sur $]-\infty; 1[$ (fonction nulle) et sur $]1; +\infty[$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

. f est à support sur $[1; +\infty[$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$

Et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = c\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+c}}\,dx$ qui converge car $1+c > 0$

Posons $X \geq 0$: $\int_1^X f(x)\,dx = c\int_1^X \frac{1}{x^{1+c}}\,dx$

$$= c\int_1^X x^{-c-1}\,dx$$

$$= c\left[\frac{x^{-c}}{-c}\right]_1^X$$

$$= -\left[\frac{1}{x^c}\right]_1^X = -\left(\frac{1}{X^c} - 1\right) = 1 - \frac{1}{X^c}$$

On $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X^c} = 0$ donc $\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge et vaut } 1.}$

$\boxed{\text{Finalement } f \text{ est une densité}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

· Si $x < 1$: $\boxed{F(x) = 0}$

· Si $x \geqslant 1$: $\cancel{\int_1^x}$ $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt$

$$= c \times \int_1^x \frac{1}{t^{1+c}}\,dt$$

$$= \cancel{c} \times \left[\frac{t^{-c}}{-\cancel{c}}\right]_1^x$$

$$= -\left[\frac{1}{t^c}\right]_1^x$$

$$= -\left(\frac{1}{x^c} - 1\right)$$

$$= \boxed{1 - \frac{1}{x^c}} = F(x)$$

3) a) $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P([X \leq tx] \cap [X>t])}{P(X>t)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

· Si $x \geq 1$: $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P(t < X \leq tx)}{P(X>t)}$

$$= \frac{F(tx) - F(x)}{1 - F(x)}$$

· Si $x < 1$: $P_{(X>t)}(X \leq tx) = 0$ car $(X \leq tx) \cap (X>t)$ est impossible

b) $P_{(X>t)}(X \leq tx) = P_{(X>t)}\left(\dfrac{X}{t} \leq x\right)$ car $t > 1$

Donc $P_{(X>t)}\left(\dfrac{X}{t} \leq x\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{F(tx) - F(x)}{1 - F(x)} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{\cancel{1} - \frac{1}{(tx)^c} - \cancel{1} + \frac{1}{x^c}}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{x^c}} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{\cancel{\frac{1}{x^c}}\left(1 - \frac{1}{t^c}\right)}{\cancel{\frac{1}{x^c}}} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t^c} \text{ si } x \geq 1 \text{ car } \dfrac{1}{x^c} > 0 \end{cases}$$ donc c'est la loi de X

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :** 26	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths appli. EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

II.

g est à support sur $[1, +\infty[$.

4) $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$

- Si $x < 1$: $G(x) = 0$
- Si $x \geq 1$: $G(x) = \int_{1}^{x} g(t)\,dt$

donc $G(1) = \int_1^1 g(t)dt$

$= 0$

~~5) a) $\forall x \geq 1$, G est l'unique primitive de g qui s'annule en 1.~~
~~Donc $G'(x) = g(x) =$~~

~~5) $\forall x \geq 1$, g est continue donc $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1)$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) a) $\forall x \geq 1$, $\forall t > 1$:

$$\frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)} = \frac{\int_1^{tx} g(t)\,dt - \int_1^t g(t)\,dt}{1 - \int_1^t g(t)\,dt}$$

$$= \frac{\cancel{G(t)}\left[-1 + \frac{G(tx)}{G(t)}\right]}{\cancel{G(t)}\left[-1 + \frac{1}{G(t)}\right]}$$

$$= \frac{\frac{G(tx)}{G(t)} - 1}{\frac{1}{G(t)} - 1}$$

$$= \frac{G(tx) - G(t)}{\cancel{G(t)}} \times \frac{\cancel{G(t)}}{1 - G(t)}$$

(je n'aboutis pas)

$=$

b) G est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ comme quotient de différence de telles fonctions

$$\forall x > 1, \forall t > 1 : G'(x) = \frac{\left(G'(tx) - G'(t)\right)\left(1 - G(t)\right) - \left(G(tx) - G(t)\right) \times -G'(t)}{(1 - G(t))^2}$$

$$= \frac{G'(tx) - G'(tx)G(t) - G'(t) + \cancel{G'(t)G(t)} + G(tx)G'(t) - \cancel{G(t)G'(t)}}{(1 - G(t))^2}$$

$$= \frac{G'(tx) - G'(tx)G(t) + G(tx)G'(t)}{(1 - G(t))^2}$$

$$= \frac{G'(tx)\left[1 - G(t)\right] + G(tx)G'(t)}{(1 - G(t))^2} =$$