Copie anonyme - n°anonymat : 935626

E1-00029 935626 Maths E

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 12 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Appliquées EMLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1.

1. a) $\forall x \in]0;+\infty[$ f est dérivable comme fraction de dénominateur jamais nul et $x \mapsto e^{-x}$ fonction usuelle. Donc $\forall x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}}$$

Comme $x^2 > 0$ $\forall x \in]0;+\infty[$ le signe dépend du numérateur

$-e^{-x}(x+1) > 0 \iff -e^{-x} > 0$ (avec $x+1 \neq 0$)

$\iff e^{-x} < 0$ ce qui n'est pas possible.

Ainsi $\forall x \in]0;+\infty[$ $\boxed{f'(x) < 0}$

On obtient le tableau suivant

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

CALCUL DES LIMITES :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1 b). On raisonne par récurrence

Initialisation : pour $n=0$ $u_0=1>0$ donc $u_0 \in]0;+\infty[$ et u_1 est bien définie et est positive

Hérédité : on suppose que pour un certain n entier donné $u_n>0$ et est correctement défini. Montrons que u_{n+1} est correctement défini et strictement positif

On sait que $u_{n+1}=f(u_n)$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n>0$ donc u_{n+1} est bien définie et est strictement positive car $\forall x$ $]0;+\infty[$ $f(x)>0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est correctement défini et est strictement positif.

2. a)

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u<a:
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n.
```

b) fonc_1 (10**6) donne 6 implique que le plus petit entier n tel que $u_n > 10**6$ est 6. Par conséquent $u_6 > 10**6$.

De manière analogue $u_5 > 10**(-6)$

2 c). def un(n):

```
def un(n):
    u=1
    for i in range(1;n+1):
        u=exp(-u)/u
    return u.
```

---

3. a) $\forall x \in [0;+\infty[$ g est derivable et continue comme somme de fonction dérivable et continues

$g'(x) = -e^{-x} - 2x$

$-e^{-x} - 2x > 0 \iff \cancel{-2x > e^{-x}} \quad e^{-x} + 2x < 0$

Ce qui n'a pas de sens pour $x \in [0;+\infty[$

$\forall x \in [0;+\infty[\; g'(x) < 0$

g est strictement monotone et continue sur $[0;+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]\lim_{x \mapsto 0} g(x), \lim_{x \mapsto +\infty} g(x)[$.

Or $\lim_{x \mapsto 0} e^{-x} - x^2 = e^0 = 1$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} e^{-x} - x^2 = -\infty$

On retrouve donc l'intervalle donné, autrement dit $]-\infty; 1]$ car de plus $g(0) = 1$ car g est définie en 0.

3 b) $\forall x \in]0;+\infty[\; f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \frac{e^{-x}}{x} - x = 0$

$\iff \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0 \iff e^{-x} - x^2 = 0 \quad (\text{car } x^2 \neq 0)$

$\iff g(x) = 0$.

Or $0 \in]-\infty; 1]$ donc d'après le théorème de la bijection $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$, ce qui implique que $f(x) = x$ admet une unique solution notée α.

4 a) $u_0 = 1$

$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{e}$

$u_2 = f(u_1) = \frac{e^{-\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} = e \times e^{-\frac{1}{e}} = e^{1-\frac{1}{e}}$

Or comme $e \approx 2,7$ $\quad 1 - \frac{1}{e} > 0$ et $e^{1-\frac{1}{e}} > 1$.

On a $u_2 > u_0$

5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $h(x) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \dfrac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = \underline{\dfrac{x e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}}}$

b. $x \mapsto h(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonction continue sur $]0;+\infty[$. De plus ~~par croissances~~ $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = 0 = h(0)$. h est continue en 0. Ainsi $x \mapsto h(x)$ <u>est continue sur $[0;+\infty[$</u>

<u>REPRISE QUESTION 3 c)</u>

Supposons $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On a, par décroissance de f

$f\left(\frac{1}{e}\right) > f(\alpha) > f(1)$

$\Leftrightarrow 1 > \dfrac{e}{e^{\frac{1}{e}}} > \alpha > \frac{1}{e}$

On peut en conclure <u>que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$</u>

Copie anonyme - n°anonymat : 935626

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 12	Session : 2023

Épreuve de : Maths Appliquées ENLTON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 2

PARTIE I.

1 a) $A-2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si on pose C_1 C_2 C_3 les 3 colonnes de cette matrice, on s'apercoit que $C_1 = C_2 = C_3$ donc $A-2I$ est de rang 1.

b). Comme $rg(A-2I) = 1 \neq 3$ alors $A-2I$ n'est pas inversible et 2 est valeur propre de A. D'après le théorème du rang $\dim(E_2) = 2$

c) Calcul du sous espace propre associé à la valeur propre 2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non nul.

$X \in E_2(A) \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 2x \\ x + 3y + z = 2y \\ x + y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -y - z$ et $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y \text{ et } z \text{ réels} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~ne sont~~ est une base de E_2 car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) La matrice A peut avoir une seule autre valeur propre que 2 car $\dim(E_2) = 2$ et non 3.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. a) Les coordonnées de MU représentent la somme de chacun des coefficients pour chacune des ~~colonnes~~ lignes de M. avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

b). Ainsi, comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$AU = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$ et 5 est une valeur propre de A car U est non nul.

et $E_5(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base du sous espace propre associé.

3. ~~D'après la formule du changement de base~~,
D'après le lemme de concaténation $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une famille libre de vecteurs propre et comme $\dim(E_2) + \dim(E_5) = 3$ et que $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$. A est diagonalisable et d'après la formule du changement de base $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

PARTIE II.

4. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et comme $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ le système (S) peut s'écrire $X' = AX$. On trouve alors $X' = PDP^{-1}X$ qui peut s'écrire $P^{-1}X' = DP^{-1}X$. On pose $Y = P^{-1}X$. Le système devient $Y' = DY$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On obtient le système suivant :

$\begin{cases} a' = 2a \\ b' = 2b \\ c' = 5c \end{cases}$ et l'ensemble des solutions est $\begin{cases} a = K_1 e^{2t} \\ b = K_2 e^{2t} \\ c = K_3 e^{5t} \end{cases}$ K_1, K_2, K_3 réels

Comme $Y = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PY$ et on obtient.

$\begin{cases} x = -K_1 e^{2t} - K_2 e^{2t} + K_3 e^{5t} \\ y = K_1 e^{2t} + K_3 e^{5t} \\ z = K_2 e^{2t} + K_3 e^{5t} \end{cases}$

que l'on peut écrire

$$t \mapsto K_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + K_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + K_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

5 a) D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique solution X_0 telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b). On obtient le système suivant

$$\begin{cases} -K_1 e^{2\times 0} - K_2 e^{2\times 0} + K_3 e^{5\times 0} = 1 \\ K_1 e^{2\times 0} + K_3 e^{5 0} = -1 \\ K_2 e^{2\times 0} + K_3 e^{5\times 0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -K_1 - K_2 + K_3 = 1 \\ K_1 + K_3 = -1 \\ K_2 + K_3 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} -K_1 - K_2 = 1 \\ K_2 = -2 \\ K_2 + K_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = -1 \\ K_2 = -2 \\ K_3 = 2 \end{cases}}$$

$$\cancel{X_0(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{2t} + 2e^{5t} \\ -e^{2t} + 2e^{5t} \\ -2e^{2t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -K_1 - K_2 + K_3 = 1 \\ -K_2 + 2K_3 = 0 \\ K_2 + K_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -K_1 - K_2 + K_3 = 1 \\ -K_2 + 2K_3 = 0 \\ 3K_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_2 = K_3 = 0 \\ K_1 = -1 \end{cases}$$

et $\boxed{X_0(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}}$

PARTIE III

6. Avec la méthode du déterminant on obtient : (car $B - \lambda I$ ne doit pas être inversible)

$(-1-\lambda) \times (3-\lambda) - (-4) \times 1 = 0 \iff -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0$

donc $\lambda = 1$ est valeur propre de B.

7. Calcul du sous-espace propre associé à 1 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ colonne réelle non nulle.

~~Est~~ $X \in E_1(B) \Leftrightarrow BX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4y = x \\ x + 3y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$

$E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \text{ réel} \right\}$

$\dim E_1(B) \neq 2$ donc B n'est pas diagonalisable.

8. a) Verifions que $\mathcal{B}$ soit libre

Soit γ et β réels. Résolvons $\gamma v_1 + \beta v_2 = 0$.

On obtient

$\begin{cases} 2\gamma - \beta = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 = \beta \end{cases}$

La famille et libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Card}(\mathcal{B})$ C'est une base de $\mathbb{R}^2$

b. Soit $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(v_1) = v_1$

$B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(v_2) = v_1 + v_2$

On obtient $T = \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \\ \end{array}$
$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}$

9. (Σ) s'écrit aussi $X' = BX$. ou encore $X' = QTQ^{-1}X \Leftrightarrow Q^{-1}X' = TQ^{-1}X$

En posant $Y = Q^{-1}X$ le système se réecrit $Y' = TY$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On obtient $\begin{cases} a' = a + b \\ b' = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ b = K_1 e^{1t} \end{cases}$ avec K_1 réel.

Non abouti.

Copie anonyme - n°anonymat : 935626

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 12	Session : 2023

Épreuve de : Maths Appliquées ENLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 3

PARTIE I

1. a) $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

1 b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\cancel{f(0)}}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

La fonction n'est pas dérivable en 0.

c) On cherche x tel que $h(x)=0$ avec $x \in \mathbb{R}^+$

$h(0)=0$ donc 0 est un antécédent.

$x\ln(x)=0 \iff x=1$ ou $x=0$

les antécédents de 0 par h sont 1 et 0.

2. g est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de fonctions dérivables

Soit $x \in]0;1]$

$g(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$

et $g'(x) = -\left(1\ln(x) + (-x)\times\frac{1}{x} - \left((-1)\ln(1-x) + (1-x)\times\left(\frac{-1}{1-x}\right)\right)\right)$

$= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 = \ln(1-x) - \ln(x)$.

$g'(x)>0 \iff \ln(1-x) > \ln(x) \iff (1-x) > x$ par stricte croissance de $\ln$

~~ce qui n'est pas possible sur le domaine de définition~~ $\boxed{\frac{1}{2} > x}$

~~$g'(x)<0$ sur $]0,1]$~~

En 0 : $g(x) = -h(0) - h(1-0) = 0$ et $g'(x)=0$

On obtient

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	

$g(\frac{1}{2}) = \ln(2)$

PARTIE II

Soit $n \in \mathbb{N}$

3) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ donc U est à valeurs dans un ensemble fini et

$H(U) = -\sum_{i=1}^{n} h(P(X=x_i)) = -\sum_{i=1}^{n} h(\frac{1}{n}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}) = -\ln(\frac{1}{n})$

$= -(\ln(1) - \ln(n)) = \underline{\ln(n)}$

4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$H(X)$ existe et $H(X) = -\Big(h(P(X=1)) + h(P(X=0))\Big) = -h(1-p) - h(p)$

$= g(p)$

Comme $g(\frac{1}{2}) = -h(\frac{1}{2}) - h(\frac{1}{2}) = -2h(\frac{1}{2}) = -2\times\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2)$

$\underline{H(X) = \ln(2)}$ que pour $p = \frac{1}{2}$ et $\underline{H(X) \leq \ln(2)}$ car g admet un maximum égal à $\ln(2)$

5. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_2)$

a) $\underline{X_1 + X_2(\Omega) = [\![0,2]\!]}$ car $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$

b) $p = P(Z=1)$

Or $[Z=1] = [X_1=1]\cap[X_2=0] \cup [X_1=0]\cap[X_2=1]$

$P(Z=1) = P(X_1=1)\times P(X_2=0) + P(X_1=0)\times P(X_2=1)$ car l'union est disjointe et les évènements sont indépendants.

On trouve ainsi $\underline{p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)}$

c) $p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$

$\Leftrightarrow \quad 2p = 2p_1(1-p_2) + 2p_2(1-p_1)$

$\Leftrightarrow \quad -2p = -2p_1(1-p_2) - 2p_2(1-p_1)$

$\Leftrightarrow \quad 1-2p = 1 - 2p_1(1-p_2) - 2p_2(1-p_1) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2$

Or $(1-2p_1)(1-2p_2) = (1-2p_2-2p_1+4p_1p_2)$

On retrouve $1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$

6. a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Donc S_n compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Ainsi $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

b) On raisonne par récurrence.

Initialisation $n=1$ $[Z_1 = 1] \Leftrightarrow$ « S_1 est impair » $P(X_1=1) = p$

On a bien $1-2P(Z_1=1) = (1-2p)^1$

Hérédité. On suppose que pour un certain n entier donné $1-2P(Z_n=1) = (1-2p)^n$. Avons nous $1-2P(Z_{n+1}=1) = (1-2p)^{n+1}$?

on admet le résultat. On a alors $P(Z_n=1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$

c). $H(Z_n)$ existe (support fini) et $H(Z_n) = -h(P(Z_n=0)) - h(P(Z_n=1))$

$= \frac{(1-2p)^n-1}{2} \times \ln\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right) - h\left(1-\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)\right) = \frac{(1-2p)^n-1}{2}\ln\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right) - \left(\frac{1-(1-(1-2p)^n}{2}\right) \times \ln\left(\frac{1-(1-(1-2p)^n}{2}\right)$ non abouti, on admet le résultat.

PARTIE III

7. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ donc elle admet une densité tel que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t))\,dt = \int_a^b h\left(\frac{1}{b-a}\right)dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)dt = \frac{1}{b-a} - \ln(b-a)\int_a^b 1\,dt$$

$$= -\frac{\ln(b-a)}{b-a}[t]_a^b\,dt = -\ln(b-a).$$

L'intégrale converge (la convergence absolue se confond avec la convergence simple car la fonction intégrée est positive.

Par conséquent, U admet une entropie

b) $H(U) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\,dt = \ln(b-a)$ d'après la question précédente.

8. a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, elle admet une espérance, autrement dit $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge, or $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} 0\,dt$

Ainsi $\int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$ car $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

b) Soit $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda e^{-\lambda t})\,dt = \int_{0}^{+\infty} h(\lambda e^{-\lambda t})\,dt = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda e^{-\lambda t})\,dt$

$= \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}(\ln(\lambda) + \ln(e^{-\lambda t})) = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda) - \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \times \lambda t$

$= \ln(\lambda) \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} - \lambda \times E(X) = \ln(\lambda) - 1$. $\left(\text{car } \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} = 1\right)$

L'intégrale converge donc X admet une entropie et

$\boxed{H(X) = -\ln(\lambda) + 1}$

9. a) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ donc $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt$. Or $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens. Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = \sigma^2 + m^2.}$