Copie anonyme - n°anonymat :

P6-00034 Maths 2S

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appro

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq 1$

$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$ donc :

$x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ et comme $\lim_{n \to +\infty} x - \frac{1}{n} = x$, par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

2- Soit $n \geq 1$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$ donc :

$- \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq - \frac{n}{2}$ d'où :

$n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$ et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, par comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = +\infty$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie I :

3-a) Soit $x \in [-1,1]$

$\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ et comme $\sin(\arcsin(x)) = x$:

$|\cos(\arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$

et comme $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et que cos est positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$\forall x \in [-1,1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

b) ▷ Comme sin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$, d'après le théorème de la bijection, arcsin est continue sur $[-1,1]$

▷ $\forall x \in]-1,1[, \sin'(x) = \cos(x)$

et comme $]-1,1[\subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cos ne s'annule pas sur $]-1,1[$

Donc, $\forall x \in]-1,1[, \sin'(x) \neq 0$

Ainsi, d'après le théorème de dérivation des applications réciproques, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ d'où d'après Q3-a) :

$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4-a) ▷ $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$ et arcsin est continue sur $[0,1]$ (d'après Q3-b)

Donc, par composition, b est continue sur $[0,1]$

▷ $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]0,1[$ et arcsin est dérivable sur $]0,1[$ donc b est dérivable sur $]0,1[$ et :

$$\forall x \in]0,1[, \quad b'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arcsin'(\sqrt{x})$$

d'où d'après Q3-b) :

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\forall x \in]0,1[, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

b) ▷ $\cancel{\forall x \in]0,1[, \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} > 0}$

~~Donc, b est strictement croissante sur $]0,1[$~~

▷ $\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) = - \dfrac{\left(1/2\sqrt{x(1-x)}\right)(1-x-x)}{x(1-x)}$

$$g'(x) = - \frac{1-2x}{2\,(x(1-x))^{3/2}}$$

$\forall x \in]0,1[,\ 1-2x \geq 0 \iff 1 \geq 2x$

$\iff \frac{1}{2} \geq x$

Et ;

$\forall x \in]0,1[,\ 2(x(1-x))^{3/2} \geq 0$

Donc, $\begin{cases} \forall x \in]0,\frac{1}{2}[,\ g'(x) < 0 \\ \forall x \in]\frac{1}{2},1[,\ g'(x) > 0 \end{cases}$

~~Donc, G est concave sur $]0,\frac{1}{2}[$ et convexe sur $]\frac{1}{2},1[$.~~

~~▷ La tangente de G au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est donnée par :~~

$\cancel{y = g(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) + G(\frac{1}{2})}$

$\cancel{= 2x - 1 + 2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})}$

Donc, g est strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2},1[$.

g atteint donc un minimum sur $]0,1[$ en $\frac{1}{2}$ et :

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$

$= 2$

▷ $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$

Ainsi, le graphe de g est donnée par :

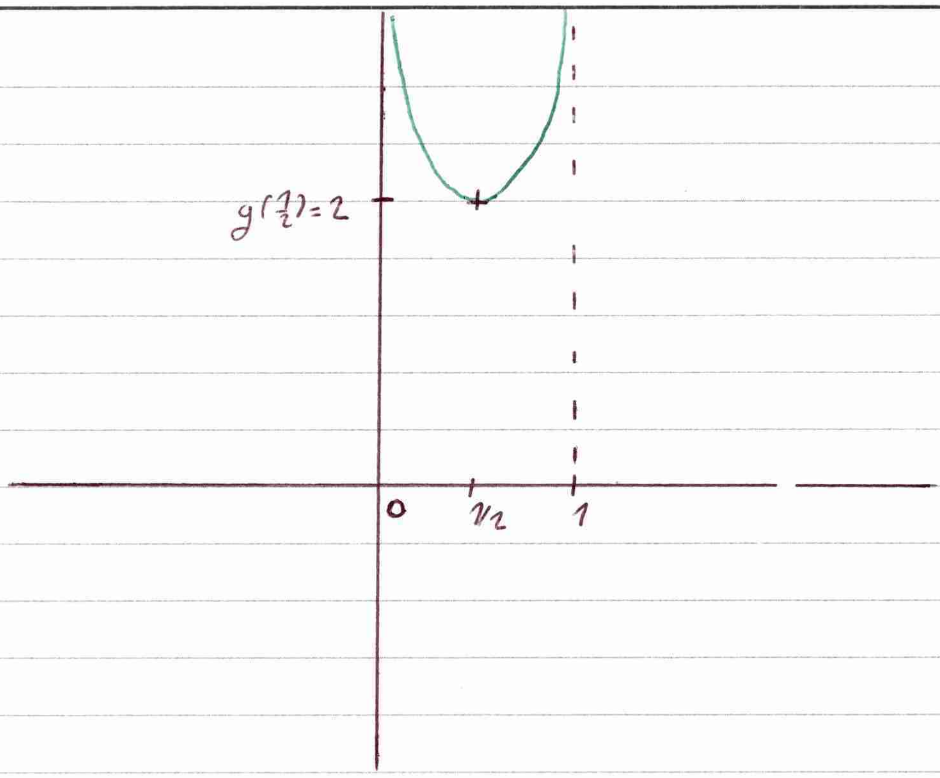
Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths 2 appro

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code



5-a) ▷ g est positive sur $]0,1[$ donc :

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$

▷ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1

▷ on étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$

Soit $(a, A) \in]0,1[^2 \,/\, a < A$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\int_a^A f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} [G(t)]_a^A$

$= \frac{1}{\pi} (G(A) - G(a))$

On a, $\begin{cases} \sin(0) = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \arcsin(0) = 0 \\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Comme G est continue en 0 et en 1, on a :

$\begin{cases} \lim_{A \to 1} G(A) = G(1) = 2\arcsin(1) = \pi \\ \lim_{a \to 0} G(a) = G(0) = 2\arcsin(0) = 0 \end{cases}$

Ainsi, en faisant tendre respectivement A vers 1 et a vers 0, on en déduit :

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} G(1)$

$= \frac{1}{\pi} \times \pi$

$= 1$

Donc, f est une densité de probabilité

6) On étudie l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

et en effectuant le changement de variable affine

$$\begin{cases} u = 1-x \\ du = -dx \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-u}{u}}\, du$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{u} - 1\right)^{1/2} du.$$

J'admets la suite du calcul

6-2) $U(\Omega) = [0,1]$ donc :

$V(\Omega) =]0,1[$

▷ $\forall t \in]0,1[$,

$$F_V(t) = P(\sin^2(\tfrac{\pi}{2}U) \leq t)$$

et comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$= P(|\sin(\tfrac{\pi}{2}U)| \leq \sqrt{t})$$

et comme $(\frac{\pi}{2}U)(\Omega) = [0, \frac{\pi}{2}]$ et que sin est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$= P(\sin(\tfrac{\pi}{2}U) \leq \sqrt{t})$$

et comme arcsin est bijective de $[0,1]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$= P(\tfrac{\pi}{2}U \leq \arcsin(\sqrt{t}))$$

$$= P(U \leq \tfrac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}))$$

et comme $\forall t \in]0,1[$, $\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}) \in]0,1[$:

$$F_V(t) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t})$$

▷ $\forall t \leq 0$, $F_V(t) = 0$

▷ $\forall t \geq 1$, $F_V(t) = 1$

▷ F_V est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et sur $]1, +\infty[$

$$\lim_{t \to 0^+} F_V(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(0)$$

$$= 0$$

$$= \lim_{t \to 0^-} F_V(t)$$

$$\lim_{t \to 1^-} F_V(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= 1$$

$$= \lim_{t \to 1^+} F_V(t)$$

Donc, F_V est continue en 0 et en 1 donc sur $\mathbb{R}$

▷ D'autre part, F_V est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1

Ainsi, V est une variable aléatoire dont une densité est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_V(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} g(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f_V(t) = f(t)$$

Ainsi, V suit la loi arcsin

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

6-6)
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def arcsinus():
    U = rd.rand()
    V = np.sin((np.pi)/2)*U)**2
    return V
```

7- $\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ donc :

$\frac{2}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq \frac{1}{2}$

Comme g est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$, g est strictement décroissante sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$

Donc, $\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $g(\frac{k}{n}) \geq g(t)$

Comme ces fonctions sont continues sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, par croissance de l'intégration :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g\left(\frac{k}{n}\right) dt \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\, dt$$ soit :

$$g\left(\frac{k}{n}\right) \geq \left[G(t)\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$$ donc :

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\frac{n}{\sqrt{k(n-k)}} \geq G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right)$$

et comme $n \geq 4$ et $\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right)$$

▷ D'autre part,

comme $\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

Donc, $0 \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{n-4}{n}$ et comme $n \geq 4$, $\frac{n-4}{n} \geq 0$

Donc, $\forall t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $g(\frac{k}{n}) \leq g(t)$

(car g est strictement décroissante sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$)

Ainsi, comme ces fonctions sont continues sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, par croissance de l'intégration :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(t)\, dt \text{ soit :}$$

$$\frac{n}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$ et comme $n \geq 4$:

~~et comme~~ $\cancel{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\;}}}$

P/

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq n\left(G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

Ainsi, on peut conclure :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

▷ Supposons que $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n-1$

Alors $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{1}{n}$

Et, $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{n-2}{n} \\ \frac{1}{2} \leq \frac{n+2}{2n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1 \end{cases}$

Comme g est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, x[$ (d'après Q4-6)), les deux inégalités établies précédemment sont inversées

8 - Posons $(a_n)_{n \geq 1} = (n^{1/2}x - 1)_{n \geq 1}$

▷ On a, $\forall n \geq \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor + 1$, $a_n \geq \frac{1}{x} \times x$

≥ 1

Et, $\forall n \geq \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor + 1$, $a_n \leq \lfloor n^{1/2} x \rfloor$

$\leq \lfloor n x \rfloor$

▷ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$= 0$

▷ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^{1/2} x - 1$

$= +\infty$

Donc, la suite $(n^{1/2}x-1)_{n\geq 1}$ convient

▷ comme $\forall k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}-1$

En sommant l'inégalité établie en q7 pour k allant de a_n à $\lfloor nx \rfloor$, on obtient :

$$\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \left(G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \left(G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)$$

Soit par télescopage :

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n - 1}{n}\right)$$

comme d'après le résultat préliminaire : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} = x$

Et d'après ce qui précède, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - 1}{n} = 0$

Comme G est continue en 0 et en x, on obtient par encadrement :

$$G(x) - G(0) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G(x) - G(0)$$

et comme $G(0) = 0$, on peut conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro 2

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 2 :

9- Soit $i \in \mathbb{N}^*$

$X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc :
$(X_i+1)(\Omega) = \{0, 2\}$ donc :

$Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = -1)$ donc :
$= \theta$

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 0)$
$= 1 - \theta$

Ainsi, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1-\theta)$

▷ Soit $n \geq 1$
D'après le lemme des coalitions, $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépen-dantes. Elles sont de plus de même loi $\mathcal{B}(1-\theta)$

Donc, par stabilité de la loi binomiale :

$\forall n \geq 1$, $\frac{1}{2}(S_n + n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-\theta)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10. $[S_1 = -1]$ et $[S_2 = -1]$ ne sont ~~pas des évènements impossibles donc :~~

~~$\mathbb{P}(S_1 = -1)$~~ $\mathbb{P}(S_2 = \cdot\ ) \neq 0$

$\forall n \geq 1,\ S_n = S_{n-1} + X_n$ donc S_n et S_{n-1} ne sont pas

indépendantes.

Ainsi, les variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ ne sont pas mutuellement indépendantes

11. ▷ $(\theta - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ d'où :

$\theta^2 - \theta + \frac{1}{4} \geq 0$ d'où :

$\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$ donc :

$\sqrt{\theta(1-\theta)} \leq \frac{1}{2}$.

▷ Soit $n \geq 1$

$Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, admettent une espérance $1-\theta$ et une variance $\theta(1-\theta) > 0$

D'après le théorème limite central,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \left(\frac{1}{2}(\bar{S}_n + 1) - (1-\theta)\right) \xrightarrow{loi} N$$

où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

14/

Donc, $\forall x \geq 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-x \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\frac{1}{2}(\bar{S}_n+1)-(1-\theta)\right) \leq x\right)$$

$$= \mathbb{P}(-x \leq N \leq x)$$
$$= \Phi(x) - \Phi(-x)$$
$$= 2\Phi(x) - 1$$

En particulier, pour $t_\alpha \geq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-t_\alpha \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\frac{1}{2}(\bar{S}_n+1)-(1-\theta)\right) \leq t_\alpha\right)$$

$$= 2\Phi(t_\alpha) - 1$$

$$= 1-\alpha$$

or, $\left[-t_\alpha \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\frac{1}{2}(\bar{S}_n+1)-(1-\theta)\right) \leq t_\alpha\right]$

$$= \left[-\sqrt{\theta(1-\theta)}\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}(\bar{S}_n+1) - 1 + \theta \leq \sqrt{\theta(1-\theta)}\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$$

et comme $\sqrt{\theta(1-\theta)} \leq \frac{1}{2}$

$$\subset \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}(\bar{S}_n+1) - 1 + \theta \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\subset \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right]$$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right)$

$$\geq 1-\alpha.$$

$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)$ est une fonction indépendante de θ du

n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi

Donc, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)$ est un estimateur de θ

De même, $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)$ est un estimateur de θ

Donc, on peut conclure :

$$\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique d'estimation du paramètre θ au niveau de confiance $1-\alpha$.

(12-a) Soit $h \in \mathbb{N}$

$\forall i \in [\![1, 2h+1]\!]$, $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc :

comme $2h+1$ est impair, S_{2h+1} ne peut pas s'annuler car il y a un nombre différent de -1 et de 1.

Donc, $\forall h \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_{2h+1} = 0) = 0$

b) Soit $h \in \mathbb{N}$

$[S_{2h} = 0]$ est réalisé si h X_i (pour $i \in [\![1, 2h]\!]$) prennent

la valeur -1 et les h autres X_i prennent la valeur 1

Parmi les $2h$ X_i, il y a $\binom{2h}{h}$ façons de choisir

h X_i prenant la valeur -1 (de probabilité $1-\theta$), et

il reste 1 façon pour que les h autres X_i prennent la valeur 1 (de probabilité θ)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_{2k}=0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k$

13- $\mathbb{P}(L_n = n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in [\![0,n-1]\!]} ([S_{2k}=0] \cup [S_{2k} \neq 0]) \cap [S_{2n}=0] \right)$

$= \mathbb{P}\left(S_{2n}=0 \right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in [\![0,n-1]\!]} ([S_{2k}=0] \cup [S_{2k}\neq 0]) \right)$

et comme $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $[S_{2k}=0] \cup [S_{2k} \neq 0] = \Omega$

$\bigcap_{k \in [\![0,n-1]\!]} ([S_{2k}=0] \cup [S_{2k} \neq 0]) = \Omega$

$= \mathbb{P}(S_{2n}=0)$ et d'après q12-b) :

$\mathbb{P}(L_n = n) = \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n$

14-a) $[L_n = k]$ est réalisé si $[S_{2k}=0]$ et si

$\forall i \in [\![2k+1, 2n]\!]$, $[S_i \neq 0]$ (par définition de L_n)

Donc, $[L_n = k] = [S_{2k}=0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

14-b)

15- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'après q14-a)

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0] \mid [S_{2k} = 0]) \times \mathbb{P}(S_{2k} = 0)$$

d'où d'après q12-b) et q14-b) :

$$= \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k}$$

Δ d'après q13- :

$$\mathbb{P}(L_n = n) = \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n \times 1$$

$$= \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n \times p_{n-n}$$

Donc, on peut conclure :

$\forall n \geq 1$, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k}$$

16-a) Soit $\omega \in \Omega$

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $S_i(\omega) \in [\![-i, i]\!]$
$\in [\![-r, r]\!]$

~~Donc, $\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\} \subset [\![-r, r]\!]$~~

Donc, en notant $i_0 = \min\limits_{i \in [\![1,r]\!]} (S_i(\omega))$

$i_1 = \max\limits_{i \in [\![1,r]\!]} (S_i(\omega))$

où i_0 et i_1 sont nécessairement des entiers, on obtient :

$\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\} = [\![i_0, i_1]\!]$

Donc, $\forall \omega \in \Omega$, l'ensemble $\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers

6) Soit $\omega \in \Omega$

$\omega \in D_n$

$\iff \forall k \in [\![1, 2n]\!], \ S_k(\omega) \neq 0$ donc :

$\iff \forall k \in [\![1, 2n]\!], \ S_k(\omega) > 0$ ou $S_k(\omega) < 0$ donc :

$\iff \omega \in \left[\bigcap\limits_{k=1}^{2n} (S_k > 0)\right] \cup \left[\bigcap\limits_{k=1}^{2n} (S_k < 0)\right]$ d'où :

$D_n = D_n^+ \cup D_n^-$ donc :

$\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(D_n^+ \cup D_n^-)$ et comme D_n^+ et D_n^- sont incompatibles :

$\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(D_n^+) + \mathbb{P}(D_n^-)$

17.

$\mathbb{P}(D_n^+) = \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{2n} (S_k > 0)\right]$

$\{(S_{2n} = 2r) \mid r \in [\![-n, n]\!]\}$ est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D_n^+) = \sum_{r=-n}^{n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n} (S_k > 0)\right) \cap (S_{2n} = 2r)\right)$$

et comme $\forall r \in [\![-n, 0]\!]$, $\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n} (S_k > 0)\right) \cap (S_{2n} = 2r)\right) = 0$:

$$= \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} (S_k > 0)\right) \cap (S_{2n} = 2r)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n,r})$$

$$\mathbb{P}(D_n^+) = \sum_{r=1}^{n} a_{n,r}$$

19- ~~Soit $r \in \mathbb{N}^*$~~

~~Posons, $\forall n \geq 1$, $A(n)$: " $a_{n,r} = \frac{1}{4n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$ "~~

~~$*$ $a_{1,r} = \frac{1}{4} a_{0,r-1} + \frac{1}{2} a_{0,r} + \frac{1}{4} a_{0,r+1}$ (Q18-c))~~

~~$= \frac{1}{4} a_{0,r-1}$ et comme $a_{0,r-1} = 0$~~

~~car $\bigcap_{k=1}^{-1} (S_k > 0) = 0$~~

~~$= 0$~~

~~$= \frac{1}{4}\left(\binom{1}{r} - \binom{1}{r+1}\right)$ car $r \geq 1$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths appro 2

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

20- $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P(D_n^+) = \sum_{r=1}^{n} a_{n,r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right)$$

Donc, par télescopage ....

$$P(D_n) = \frac{1}{2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 3 :

11-a)

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n,p):
    L=0
    S=0
    for i in range (1, 2*n+1):
        T= [S, 2*rd.binomial(i, 1-p) - i,] //
    L = max (T==0)
    return L
```

on remplit une matrice ligne T par des simulations de $S_1, \dots, S_{2n}$ (d'après la loi établie en 9.9-)

b) on peut conjecturer que $\frac{L_n}{n} \xrightarrow{loi} U$ où $U \hookrightarrow B(\frac{1}{2})$

(car $\frac{L_n}{n}$, au voisinage de $+\infty$, prend les valeurs 0 et 1 de manière équiprobable)

22-a) D'après q20.

$\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\binom{2n+1}{n+1} \Big/ \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}\right)$

$= \ln\left(\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{4} \binom{2n+1}{n+1} \Big/ \binom{2n}{n}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(\frac{\binom{2n+1}{n+1}}{\binom{2n}{n}}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(\frac{(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2) + \ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$

Au voisinage de $+\infty$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$

donc :

$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{4n^2}\right)$

$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$

Comme $\frac{1}{4n^2} \geq 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge (série de Riemann), par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_{n+1} - u_n$ converge.

b) Notons S la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_{n+1} - u_n$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = S$

Donc, par téléscopage,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_1 = S$

D'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(c_n) = u_1 + 5$

et comme exp est continue en $u_1 + 5$:

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = e^{u_1 + 5}$$

Donc, la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est convergente.