Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 26

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques ESCP

V1-00318 Maths T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1 :

1) On a :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 = A + 2I$

2a) On a :

$A^2 - A - 2I = 0_3$ (d'après 1.)

Donc $P(x) = x^2 - x - 2$ est un polynôme annulateur de A.

En calculant le discriminant, on obtient :

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$, donc il y a deux valeurs propres possibles qui sont :

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $Sp(A) \subset \{-1, 2\}$.

2b) On a :

$P(X) = X^2 - X - 2$ (d'après 2a.)

D'où :

$A^2 - A - 2I = O_3$

$\Leftrightarrow A^2 - A = 2I \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 - A) = I$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$

3a) On a :

• $AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U$ (avec $U \neq O_3$)

Donc V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

• $AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1V$ (avec $V \neq O_3$)

Donc V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

- $AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1W$ (avec $W \neq 0_3$)

Donc W est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

Or, d'après 2a., on a bien $Sp(A) = \{-1, 2\}$

3b) On a :

- $AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $QD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $AQ = QD$.

3c) On a :

$QR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{3} R$.

3d) On a :

→ Q inversible (d'après 3c.)

→ D diagonale

→ $A = QDQ^{-1}$ (d'après 3b.)

Donc A est diagonalisable.

4a) On a par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$:

. Hypothèse de récurrence (H_n) :

" $A^n = QD^nQ^{-1}$ "

. Initialisation :

Si $n = 0$; $A^0 = I$ et $QD^0Q^{-1} = QQ^{-1} = I$

Donc H_0 est vraie.

. Hérédité :

Supposons que pour un certain rang n H_n soit vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie. On a :

$A^{n+1} = A^nA = QD^nQ^{-1}QDQ^{-1}$ (d'après H_n et 3b.)

$\Rightarrow A^{n+1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$

Donc H_{n+1} est vraie.

. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

4b) On a pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ car D est diagonale.

De plus, on a pour tout n de $\mathbb{N}$:

$A^n = Q D^n Q^{-1}$ (d'après 4a.)

$A^n = \frac{1}{3} Q D^n R$ (d'après 3c.)

D'où pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}$$

5) X_1 est la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le jeton après le premier déplacement.

D'où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}\right)$ car le jeton se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres sommets. (avec $X_1(\Omega) = \{2, 3\}$).

De plus, on a :

. $P(X_2=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

. $P(X_2=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

. $P(X_2=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

5b) D'après la formule des probabilités totales dans la partition $([X_n=2],[X_n=3])$, on a pour tout $n \geq 2$:

$$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=2)\,P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1) + P(X_n=3)\,P_{[X_n=3]}(X_{n+1}=1)$$

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} P(X_n=2) + \frac{1}{2} P(X_n=3)$$

5c) On a pour tout $n \geq 2$:

. $P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} P(X_n=1) + \frac{1}{2} P(X_n=3)$

. $P(X_{n+1}=3) = \frac{1}{2} P(X_n=2) + \frac{1}{2} P(X_n=1)$

De plus, on a pour tout $n \geq 2$:

$$L_n B = \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_n B = \begin{pmatrix} cP(X_n=2)+eP(X_n=3) & aP(X_n=1)+fP(X_n=3) & bP(X_n=1)+dP(X_n=2) \end{pmatrix}$$

Or, on sait que pour tout $n \geq 2$:

$L_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & P(X_{n+1}=2) & P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}$

D'où :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A$$

Donc B est bien proportionnelle à A telle que $L_{n+1} = L_n B$ pour tout $n \geq 2$.

5d) On a (par disjonction de cas) :

- Si $n = 0$; $L_1 = L_0 B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ (d'après 5a.)
- Si $n = 1$; $L_2 = L_1 B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ (d'après 5a.)

Donc la relation de 4c. reste vraie pour $n=0$ et $n=1$.

5e) On a par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}$:

- Hypothèse de récurrence (H_n) :

" $L_n = L_0 B^n$ "

- Initialisation :

Si $n = 0$; $L_0 B^0 = L_0 I = L_0$.

Donc H_0 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un certain rang n H_n soit vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie. On a :

$L_{n+1} = L_n B$ (d'après 4c.)

$\Rightarrow L_{n+1} = L_0 B^n B$ (d'après H_n)

$\Rightarrow L_{n+1} = L_0 B^{n+1}$

Donc H_{n+1} est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

5f) On a $B = \frac{1}{2} A$ (d'après 5c.)

D'où pour tout n de $\mathbb{N}$:

$L_n = L_0 B^n$ (d'après 5e.)

$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n L_0 A^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n (1 \quad 0 \quad 0)\,(2^n+2(-1)^n \quad 2^n-(-1)^n \quad 2^n-(-1)^n)$

$L_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n (2^n+2(-1)^n \quad 2^n-(-1)^n \quad 2^n-(-1)^n)$

Donc on a pour tout n de $\mathbb{N}$:

$P(X_n=1) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2^n+2(-1)^n\right)$, $P(X_n=2) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2^n-(-1)^n\right)$,

$P(X_n=3) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2^n-(-1)^n\right)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 26	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

EXERCICE 2 :

1) On a :

→ La positivité :

. $4x(1-x^2) \geqslant 0$ si $x \in [0,1]$.

. Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

→ La continuité :

. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ (continue à gauche en 0)

. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ (continue à droite en 0)

. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0$ (continue à gauche en 1)

. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$ (continue à droite en 1)

. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

→ La convergence :

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 4x(1-x^2)\,dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 4x\,dx - \int_0^1 4x^3\,dx$ par linéarité

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2[x^2]_0^1 - [x^4]_0^1 = 2-1 = 1$

• Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge vers 1.

f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2a) On a :

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2)\,dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 4x^2\,dx - \int_0^1 4x^4\,dx$ par linéarité

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$

Donc X possède une espérance et $E(X) = \frac{8}{15}$.

2b) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 4x^3(1-x^2)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 4x^3\,dx - \int_0^1 4x^5\,dx \text{ par linéarité}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \left[x^4\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^6}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Donc X possède un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = \frac{1}{3}$.

D'où d'après la formule de Koenig-Huygens :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2$ (d'après 2a.)

$$V(X) = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75-64}{225} = \frac{11}{225}.$$

3) On a pour tout x de $\mathbb{R}$ (par disjonction de cas) :

- Si $x < 0$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x 4t(1-t^2)\,dt$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 4\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x = \left[2t^2\right]_0^x - \left[t^4\right]_0^x$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 2x^2 - x^4 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = 1 - (1-x^2)^2$$

. Si $x > 1$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 1$

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4a) On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4b) On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$P(M > x) = P(U > x)P(V > x) = (1 - P(U \leq x))(1 - P(V \leq x))$

$P(M > x) = (1 - G(x))(1 - G(x))$ (d'après 4a.)

De plus, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$P(M \leq x) = P(U \leq x)P(V \leq x)$

D'où $F_M(x) = G(x)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 26	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4c) On a $F_M(x) = G(x)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (d'après 4b.).

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{(d'après 4a.)}$$

5a) On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = P(M \leq x^2)$

D'où $F_Z(x) = F_M(x^2)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (d'après 4b.)

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{(d'après 4c.)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5b) J'admets que X et Z suivent la même loi.

5c) On a :

```
U = rd.random()
V = rd.random()
M = np.min(U,V)
X = np.sqrt(M)
```
(d'après 5b.)

EXERCICE 3 :

1a) Comme $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$, on a :

$S(\Omega) = [\![0,4]\!]$

De plus, on a :

$[S=k]$	0	1	2	3	4
$P([S=k])$	1/16	1/8	5/16	1/4	1/4

1b) D'après le théorème de transfert, on a :

$E(S) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$ (d'après 1a.)

$E(S) = \frac{1+5+6+8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$

1c) On a :

$E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité

$E(S) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$

On obtient bien pareil qu'en 1b.

2a) Comme $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$, on a :

$T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$

2b) On a :

$P(T=0) = P(X=0)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=1) + P(X=0)P(Y=2)$
$+ P(Y=0)P(X=1) + P(Y=0)P(X=2)$

$P(T=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$

$P(T=0) = \frac{7}{16}$.

Donc on obtient :

$[T=k]$	0	1	2	4
$P([T=k])$	7/16	1/16	1/4	1/4

2c) D'après le théorème de transfert, on a :

$E(T) = 0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$ (d'après 2b.)

$E(T) = \frac{1+8+16}{16} = \frac{25}{16}$

2d) On a :

$E(T) = E(XY) = E(X)E(Y)$ par indépendance

$E(T) = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 26	Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques ESCP		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) On a :

T \ S	0	1	2	3	4	$P([T=k])$
0	$1/16$	$1/8$	$1/4$	0	0	$7/16$
1	0	0	$1/16$	0	0	$1/16$
2	0	0	0	$1/4$	0	$1/4$
4	0	0	0	0	$1/4$	$1/4$
$P([S=k])$	$1/16$	$1/8$	$5/16$	$1/4$	$1/4$	1

Donc on retrouve bien les lois marginales S et T (d'après 1a. et 2b.)

4) On a par exemple :

$P([T=0]\cap[S=0]) \neq P([T=0])P([S=0])$ (d'après 3.)

Donc S et T ne sont pas indépendantes.

5) On a d'après 3 :

$[ST=k]$	0	1	2	3	4	6	8	16
$P([ST=k])$	7/16	0	1/16	0	0	1/4	0	1/4

Donc d'après le théorème de transfert :

$E(ST) = 2 \times \frac{1}{16} + 6 \times \frac{1}{4} + 16 \times \frac{1}{4}$

$E(ST) = \frac{2+24+64}{16} = \frac{90}{16} = \frac{45}{8}$.

D'où d'après la formule de Huygens :

$Cov(ST) = E(ST) - E(S)\,E(T)$

$Cov(ST) = \frac{45}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{16}$ (d'après 1b. et 2c.)

$Cov(ST) = \frac{45}{8} - \frac{125}{32} = \frac{180-125}{32} = \frac{55}{32}$

EXERCICE 4 :

1a) On a par récurrence pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

- Hypothèse de récurrence (H_n) :

" $U_n > 0$ "

- Initialisation :

Si $n = 1$; $U_1 = \frac{1}{2} > 0$.

Donc H_1 est vraie.

- Hérédité :

Supposons que pour un certain rang n H_n soit vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie. On a :

$$U_n > 0 \quad (\text{d'après } H_n)$$

$$\Rightarrow \frac{U_n}{2(n+1)U_n + 1} > 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} > 0 \quad (\text{d'après l'énoncé})$$

Donc H_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie.

1b) On a :

```
def suite (n):
    u = 1/2
    for k in range (2,n+1):

        u = u/((2*(k+1)*u)+1)
    return u
```

2) On a :

• $u_2 = \dfrac{u_1}{4u_1+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}$

• $u_3 = \dfrac{u_2}{6u_2+1} = \dfrac{\frac{1}{6}}{2} = \dfrac{1}{12}$

3a) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$0 < u_{n+1} \quad \text{(d'après 1a.)}$$

De plus, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$2(n+1)u_n + 1 > 2(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2(n+1)u_n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$$

Or $u_{n+1} < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

D'où pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 26 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3b) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2(n+1)U_n+1} - U_n = \frac{U_n\left(1-2(n+1)U_n+1\right)}{2(n+1)U_n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n\left(2-2(n+1)\right)}{2(n+1)U_n+1}$$

Or, $U_n(2-2(n+1)) < 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ car $U_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ (d'après 1a.)

Donc $U_{n+1} < U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Ainsi, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car : théorème de convergence monotone

-> $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

-> $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 (d'après 3a.)

De plus, $0 < U_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ (d'après 3a.)

Or $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ (d'après le théorème d'encadrement)

4a) On a pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$v_{k+1} - v_k = \frac{1}{U_{k+1}} - \frac{1}{U_k}$

$v_{k+1} - v_k = \frac{2(k+1)U_k + 1}{U_k} - \frac{1}{U_k} = \frac{2(k+1)U_k}{U_k} = 2(k+1)$

4b) On a pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$v_{k+1} = v_k + 2(k+1)$ (d'après 4a.)

Comme le premier terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est v_1, cette suite est bien arithmétique de raison 2.

De plus, $v_{k+1} = v_k + 2(k+1)$ est la formule explicite de la suite.

4c) On a pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k = \sum_{k=1}^{n} 2(k+1) \quad \text{(d'après 4a.)}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+1} - v_1 = \sum_{k=1}^{n} 2(k+1) \quad \text{par téléscopie}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+1} - 2 = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 2 \quad \text{par linéarité}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+1} - 2 = \frac{2(n(n+1))}{2} + 2n$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+1} - 2 = n(n+1) + 2n$$

J'admets que $v_n = n(n+1)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

4d) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{v_n} \quad \text{(d'après l'énoncé)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{(d'après 4c.)}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ par inverse

C'est cohérent avec 3b.

5a) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$U_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) - bn}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n + a}{n(n+1)}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

D'où pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

5b) On a pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après 5a.)}$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = 1 - \frac{1}{N+1} \quad \text{par téléscopie}$$

5c) On a pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = 1 - \frac{1}{N+1} \quad \text{(d'après 5b.)}$$

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$ par différence.

Donc $\sum\limits_{N=1}^{+\infty} U_n = 1$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 26	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6a) D'après 5c., $\sum_{N=1}^{+\infty} U_n = 1$.

Donc U_n est une loi de probabilité, ce qui prouve que $P(X=n) = U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

6b) On a pour tout $n \geq 1$:

$$n+1 \leqslant t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt \leqslant \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1} dt \text{ par intégration}$$

$$\Leftrightarrow \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{n+1} [t]_{n+1}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

6c) On a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln(n+1) \quad \text{(d'après 6b.)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) - \ln(n+1) \quad \text{par sommation}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{N=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2) \quad \text{par téléscopage}$$

6d) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = \sum_{N=1}^{N} n\,U_n \quad \text{(d'après 6a.)}$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

Or on a par ailleurs pour tout $n \geq 1$:

$$E(X) \geq \ln(N+2) - \ln(2) \quad \text{(d'après 6c.)}$$

Mais comme $\lim\limits_{\to +\infty} \ln(N+2) - \ln(2) = +\infty$, on a

$\lim\limits_{N \to +\infty} E(X) = +\infty$ (d'après le théorème de comparaison)

Donc X ne possède pas d'espérance.