

# Copie anonyme - n°anonymat :



A5-00007

Maths E

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de :

Mathématiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Exercice 1 :

1) La matrice d'adjacence  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 5}}$

se caractérise telle que  $a_{ij} = 1$  pour  $j \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$ ssi  
 $i-1$  et  $j-1$  deux jumeaux adjacents.

$$\text{on a } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) les chaînes  $\{2; 1; 0; 3\}; \{3; 4; 3; 2\}; \{3; 0; 3; 2\}$   
et  $\{2; 1; 2; 3\}$  sont les chaînes de longueur 3 reliant  
 $2 \leadsto 3$ . Il y en a 4.

b)  $B = f(A, 3)$   
 $m = B[2; 3]$   
print(m)

3) a) D'après le graphe,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Comme d'après ce qui précède,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

on vérifie en effet que  $D - A = L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) L est symétrique donc L est diagonalisable.

4) a)  ${}^t X L X$ , étant le produit matriciel d'une matrice colonne  $L X$  et d'une matrice ligne  ${}^t X$ , est une matrice de  $M_1(\mathbb{R})$  et la quantité  ${}^t X L X$  appartient à l'ensemble des réels (soit  $M_1(\mathbb{R})$ ).

b) D'abord,

$$LX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$$

Ensuite,  ${}^tX LX = (a \ b \ c \ d \ e) LX$

$$\Leftrightarrow {}^tX LX = 2a^2 - ba - da - ab + 2b^2 - cb - bc + 2c^2 - dc - ad - cd + 3d^2 - ed - ed + e^2$$

$$\Leftrightarrow {}^tX LX = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2dc + d^2 + e^2 - 2ed + d^2 + d^2 - 2ad + a^2$$

$$\Leftrightarrow {}^tX LX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (e-d)^2 + (d-a)^2$$

$$\Leftrightarrow {}^tX LX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

---

c) Si  $X$  vecteur propre de  $L$  associé à une valeur propre  $\lambda$ , alors :

$$LX = \lambda X$$

$$\Leftrightarrow {}^tX LX = \lambda {}^tX X.$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 = \lambda (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

Aussi, si cela est vrai, comme  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 0$

et  ${}^tX LX \geq 0$ ,  $\lambda$  ne peut être négatif.

Enfin, les valeurs propres de  $L$  sont donc positives ou nulles.

---

d) Par produit matriciel, en sommant les coefficients ligne par ligne, il vient:

$$L U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times U.$$

Or  $U$  n'est pas le vecteur nul et  $L U = 0 \times U$  donc

$U$  vecteur propre associé à la valeur propre  $0$  de  $L$  et

ainsi,  $\lambda_1 = 0$

5) a) Montrons que  $L$  est de rang 4, afin de montrer, d'après le Théorème du rang, que  $\dim(\ker(L)) = 1$  et donc que

$L X = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U)$  car  $U$  vecteur de  $\ker(L)$  de dimension 1 donc base de  $\ker(L)$ .

D'abord:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit,  $\text{rg}(L) \leq 4$ .

Montrons désormais que  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est libre.

# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 238

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de :

Mathématiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  scalaires,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_4 = \lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

donc,  $\text{rg}(L) = 4$  car quatre de ses colonnes sont linéaires

et 4 lignes. Dès lors  $\dim(\ker(L)) = 1$

et  $LX = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U)$  car  $U$  base de  $\ker(L)$ .

b)  $L$  étant diagonalisable, et  $E_0(L) = \text{Vect}(U)$ ,

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  et  $\lambda_5$  sont nécessairement différents de 0 car <sup>deux</sup> les  $(\lambda_i)_{i \in \{1, 3\}}$  sont égaux ssi ils sont

associé au même espace propre de dimension au moins 2.

La multiplicité de 0 est de 1 car  $\dim(E_0(L)) = 1$ .

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  et  $\lambda_5$  sont donc strictement positifs car différents de 0 et positifs d'après 4). c).

### Exercice 2:

1. D'après la seconde inégalité des accroissements finis, pour toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq K \text{ avec } K \in ]0; +\infty[$$

$$\text{On a } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

$$2) \text{ D'après (1), } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Autrement dit, pour  $n$  fixé dans  $\mathbb{R}$ ,

Veuillez m'excuser, j'ai oublié cette  
page.

IDEM  
(suite exercice 2 →)



# Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Emplacement  
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\forall \alpha > 0, \forall y \in ]n-\alpha; n+\alpha[ \cap \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  avec

$$\varepsilon = K |x - y|.$$

Dis lors, d'après la définition de la limite finie à

gauche et à droite en un point,  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$

3) Supposons que  $f(x) = x$  admette 2 solutions au moins,  $x'$  et  $y'$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , avec  $x' \neq y'$ .

On aurait alors d'après (\*):

$$|f(x') - f(y')| \leq K |x' - y'|$$

$$\Leftrightarrow |x' - y'| \leq K |x' - y'|$$

Or  $K \in ]0; 1[$ , donc

$$|x' - y'| \geq K |x' - y'|$$

Ceci est absurde, on a  $x' = y'$  et  $f(x) = x$  admet au plus une solution.

$$4) \text{ soit } \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

a) Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n): |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$  est vraie.

Initialisation:

Pour  $n=0$ , l'initialisation est immédiate car

$$|u_1 - u_0| \leq K^0 |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0|$$

La propriété est initialisée.

Hérédité:

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ .

On a l'hypothèse de récurrence suivante:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$$

$$\text{Or, } |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K |u_{n+1} - u_n|$$

étant donné que  $u_{n+2} = f(u_{n+1})$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

et que  $f$  est  $K$ -contractante.

$$\text{Donc } |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

La propriété est héréditaire.

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - v_n| \leq k^n |v_1 - v_0|$

b) Pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^N |v_{n+1} - v_n| \leq |v_1 - v_0| \sum_{n=0}^N k^n$$

Or  $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$  car  $k \in ]0; 1[$

Donc, par comparaison à une série convergente, la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$  converge absolument d'après ce qui précède.

Enfin, la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$  converge.

Ainsi, comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} - v_n$  converge, par télescopage,

$v_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  existe car la série est convergente

telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a \in \mathbb{R}$ .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc convergente.

c) Par unité de la limite, et comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$$

$$\Rightarrow a = f(a) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ et } f(u_n) = u_{n+1}.$$

De plus, en ayant vu que  $f(x) = x$  admettait au plus 1 solution,  $a$  est solution de l'équation.

Il vient que  $f(x) = x$  admet une unique solution.

5)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq 1, \forall i \in \llbracket n, n+p-1 \rrbracket,$

$$|u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0| \text{ d'après 4)a)}$$

$$\text{Donc } \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$$

en sommant car l'inégalité est respectée pour chaque terme.

b) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i \right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \text{ par télescopage.}$$

$$\text{D'autre part, } \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \times K^n \times \frac{1 - K^{n+p-1+1}}{1 - K}$$

12/28

# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Statistiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Enfin, } |u_{n+p} - u_n| \leq k^n \times \frac{1 - k^p}{1 - k} |u_1 - u_0|$$

comme  
c) Aussi, lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,  $\forall k \in ]0; 1[$   
et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n+p} = a$ , il vient par opération sur les limites :

$$|a - u_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |u_1 - u_0|$$

$$6) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$$

a)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  quotient de dérivat-  
-eur non-nul de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \frac{-e^t}{(1 + e^t)^2}$$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = \frac{-e^t(1 + e^t)^2 + 2e^{2t}(1 + e^t)}{(1 + e^t)^4}$$

$$= \frac{-e^t(1 + e^t) + 2e^{2t}}{(1 + e^t)^3} = \frac{e^t(e^t - 1)}{(1 + e^t)^3}$$

b) On a donc  $\forall t < 0, f''(t) < 0$   
 et  $\forall t > 0, f''(t) > 0$ .

Il vient le tableau de variation suivant :

|          |           |                |           |
|----------|-----------|----------------|-----------|
|          | $-\infty$ | $0$            | $+\infty$ |
| Var $f'$ | $0$       | $-\frac{1}{4}$ | $0$       |

$$f'(0) = -\frac{1}{4} \text{ et}$$

par opération sur les limites,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = 0$

$$\text{et } f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2} = -\frac{e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1}$$

$$= -\frac{1}{e^t + 2 + \frac{1}{e^t}}$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = 0$$

Enfin, d'après ce qui précède,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left| f'(t) \right| \leq \frac{1}{4}$$

c)  $f$  est définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et vérifie l'inégalité des accroissements finis avec un majorant de  $\frac{1}{4}$

Ainsi, d'après ce qui précède,  $f$  est  $\frac{1}{4}$ -contractante.

d) soit  $v_0 = 0$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$ .

La suite est convergente d'après la question 4) b).

En effet,  $v_0 = 0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est  $\frac{1}{4}$ -contractante et

$$v_{n+1} = f(v_n).$$

Ainsi, en passant du cas général au cas particulier,

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant toutes les conditions à sa convergence posée

en 4) b),  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente.

e) def suite (n):

$$v = 0$$

for k in range(1, n+1):

$$v = 1 / (1 + \exp(v))$$

return v

f) D'après la 5) c), dans ce cas, on a:

$$|a - v_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \left| \frac{1}{2} - 0 \right|$$

$$\Leftrightarrow |a - v_n| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{On a } 0 < \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{3 \times 4^n}{2} \geq 1000$$

strictement  
par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+$

$$(c) \quad 4^n \geq \frac{2000}{3}$$

En effet, un et une valeur approchée de  $a \approx 10^{-3}$  près  
dis que  $n$  vérifie  $4^n \geq \frac{2000}{3}$ .

g)

```
n = 0
while 4**n < 2000/3:
    n = n + 1
print(suite(n))
```

### Exercice 3:

Soient  $a$  et  $b$  et  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

a) a) Si  $a = b$ ,  $A$  étant triangulaire supérieure et  
ses valeurs propres étant ses coefficients diagonaux, on a  
 $A$  qui n'admet qu'une seule valeur propre  $a (= b)$ .

b) Si  $a \neq b$  et  $A$  diagonalisable, il existe  $P$   
invertible et  $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  telle que

$$A = P D P^{-1}.$$

Or  $D = a I_2$  avec  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc  $A = a P I_2 P^{-1} = a I_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$   
qui est absurde. Si  $a = b$ ,  $A$  non diagonalisable.



# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de :

Statistiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) Supposons  $a \neq b$ .

a)  $A$  étant triangulaire supérieure, les valeurs propres de  $A$  ont ses coefficients diagonaux  $a$  et  $b$ .

$$b) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b^2-ab \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$$

Pour  $a \neq b$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $A$  associés respectivement aux valeurs propres  $a$  et  $b$  car  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$  non nuls et

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$$

c) Comme  $b \neq a$ ,  $b-a \neq 0$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$  non colinéaires. Dès lors,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$  famille libre de deux vecteurs de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  de dimension 2.

Ainsi,  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$  base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

$$\text{On a } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$$

$$\text{d) Pour } D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\text{on a : } PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^2 - ab \end{pmatrix}$$

$$\text{et } AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^2 - ab \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc, pour } D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \underline{AP = PD}$$

$P$  est inversible car matrice de passage donc

$$AP = PD \quad (\Rightarrow) \quad A = PDP^{-1}$$

Ainsi,  $D$  est diagonale et  $P$  inversible,  $A$  est

diagonalisable.

3) Soit  $X$  et  $Y$  indépendantes telles que

$$X \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } Y \sim \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}\right).$$

a) On a  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Ainsi, } P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X=n] \cap [Y=n])$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) P(Y=n) \quad \left| \text{par indé-} \right.$$

pendence de  $X$  et  $Y$ .

$$\text{b) } P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

4) a)  $A(X, Y)$  n'est pas diagonalisablessi  $X=Y$   
d'après tout ce qui précède.

Ainsi,  $p = \frac{1}{3}$  est la probabilité que  $A(X, Y)$   
ne soit pas diagonalisable.

b) Pour de grandes valeurs de  $n$ ,  $[X=Y]$  se réalise assez de fois pour que la variable  $i$  soit proche de  $\frac{2}{3}$ .

Problème.

Partie 1: propriété d'une loi de probabilité.

Soit  $c > 0$ ,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{c}{n^{1+c}} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n < 1. \end{cases}$$

1)  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 1.

On a  $\int_{-\infty}^1 f(t) dt = 0$  car  $f$  s'annule sur  $]-\infty; 1[$ .

D'autre part,

$$\int_1^{+\infty} \frac{c}{n^{1+c}} dn = c \times \frac{1}{1+c-1} = 1$$

comme intégrale de Riemann avec  $c > 0$  et  $1+c > 1$ .

Ainsi,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ .

Enfin,  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$2) \forall x \in ]-\infty; 1[, F(x) = 0$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^c} & \text{si } x \geq 1. \end{cases} = \left[ -\frac{1}{t^c} \right]_1^x$$

$$3) \text{ Pour } t > 1.$$

$$a) \text{ Pour } x \geq 1,$$

$$P_{[X > t]}(X \leq tx) = \frac{P([X > t] \cap [X \leq tx])}{P(X > t)}$$

$$= \frac{P(t < X \leq tx)}{1 - P(X \leq t)}$$

$$= \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$$

Pour  $n < 1$ , avec  $t > 0$ ,

$$t > tn \text{ donc } P_{[X > t]}(X \leq tn) = 0.$$

b) Ainsi, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} P_{[X > t]}(X \leq tn) &= P_{[X > t]} \left( \frac{X}{t} \leq n \right) \\ &= \frac{P(t < X \leq tn)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P\left(1 < \frac{X}{t} \leq n\right)}{P\left(\frac{X}{t} > 1\right)} \end{aligned}$$

Or  $P\left(\frac{X}{t} > 1\right)$  sachant  $X > t$  est égale à 1.

$$\begin{aligned} \text{et ainsi, } \forall n \geq 1, P_{[X > t]}(X \leq tn) &= P\left(1 < \frac{X}{t} \leq n\right) \\ &= \int_0^n f(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{et } \forall n < 1, P_{[X > t]}(X \leq tn) = 0.$$

$\frac{X}{t}$  conditionnellement à  $[X > t]$  suit la loi de  $X$ .

Partie 2 : Réciproque de la propriété précédente.

4)  $Y$  est à densité,

$$\underline{G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = 0} \text{ car } g \text{ nulle sur } ]-\infty; 1[.$$

5) a) On a  $P(Y > t) > 0$  pour  $t > 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{[Y > t]} \left( \frac{Y}{t} \leq n \right) = P(Y \leq nt).$$

D'où,  $\forall x \geq 1, \forall t > 1, G(x) = P(Y \leq x)$

$$= P_{[Y > t]} \left( \frac{Y}{t} \leq x \right)$$

$$= \frac{P \left( \left[ \frac{Y}{t} \leq x \right] \cap [Y > t] \right)}{P(Y > t)}$$

$$= \frac{P \left( \frac{x}{t} < Y \leq tx \right)}{1 - P(Y \leq t)}$$

$$= \frac{G(tx) - G(x)}{1 - G(t)}$$

$$\underline{= \frac{G(tx) - G(x)}{1 - G(t)}} \quad |$$

b) Par régularité de la fonction de répartition,  $G$  est  $\mathcal{C}^1$  partout où  $g$  est continue.

En particulier,  $g$  continue sur  $]1; +\infty[$  donc

$G \in \mathcal{C}^1$  sur  $]1; +\infty[$ .

( $g$  n'est pas continue en 1 donc  $G$  non  $\mathcal{C}^1$  en 1)

Ainsi,

$$\forall n > 1, \forall t > 1, G'(n) = \frac{1}{1-G(t)} \times t G'(tn)$$

$$\Leftrightarrow G'(n) = \frac{t G'(tn)}{1-G(t)}$$

c) Lorsque  $n$  tend vers 1 à droite,

$$\text{comme } G'(n) = \frac{c}{n^{1+c}} \text{ pour } n > 1,$$

$$\text{On a } \forall t > 1, c = \frac{t G'(t)}{1-G(t)}$$

$$\Leftrightarrow c(1-G(t)) = t G'(t)$$

$$\Leftrightarrow c = t G'(t) + c G(t)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{t}{c} G'(t) + G(t)$$

6) a)  $y$  solution de  $(E_1)$  avec  $t \in ]1; +\infty[$

$$\text{soit } y + \frac{t}{c} y' = 0 \text{ avec } y(t) = \frac{z(t)}{t^c}$$

$$\text{On a } y'(t) = \frac{z'(t) t^c - c z(t) t^{c-1}}{t^{2c}}$$

$$= \frac{z'(t) t - c z(t)}{t^{c+1}}$$



# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement  
GR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : *Mathématiques appliquées.*

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \frac{z(t)}{t^c} + \frac{t}{c} \frac{z'(t) - c z(t)}{t^{c+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(t)}{t^c} - \frac{z(t)}{t^c} + \frac{z'(t)}{c+t^c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'(t)}{t^c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in ]1; +\infty[ , z'(t) = 0$$

$\Leftrightarrow$   $y$  solution de  $(E_1)$  avec  $z(t) = t^c g(t)$  ssi  
 $z$  est constante sur  $]1; +\infty[$ .

$$b) \forall t \in ]1; +\infty[ , K = t^c g(t)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{K}{t^c}$$

Ainsi, pour  $K$  constante réelle, toutes les solutions  $y$  de  $(E_1)$  sont de la forme, avec  $c$  paramètre :

$$y : t \longmapsto \frac{K}{t^c}$$

c)  $u : t \longmapsto 1$  est constante sur  $]1; +\infty[$   
 telle que  $\forall t \in ]1; +\infty[$ ,  $u'(t) = 0$

et que  $\forall t \in ]1; +\infty[$ ,  $u(t) + \frac{t}{c} u'(t) = 1$

d) Si  $h$  solution de  $(E_2)$ ,

$\forall t \in ]1; +\infty[$ ,  $h(t) + \frac{t}{c} h'(t) = 1$

$$\Leftrightarrow h(t) - u(t) + \frac{t}{c} h'(t) - \frac{t}{c} u'(t) = 0$$

$\Leftrightarrow$   $h - u$  solution de  $(E_1)$  car  $u$  constante

égale à 1 sur  $]1; +\infty[$ ,

Réciproquement, si  $h - u$  solution de  $E_2$ ,

$\forall t \in ]1; +\infty[$ ,  $(h - u)t + \frac{t}{c}(h - u)'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow h(t) - 1 + \frac{t}{c} h'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(t) + \frac{t}{c} h'(t) = 1$$

$\Leftrightarrow$   $h$  solution de  $(E_2)$

Enfin, l'équivalence est démontrée.

e) D'après ce qui précède, pour  
la solution de  $(E_2)$ , la solution de  $(E_1)$   
donc  $\forall t > 1$ ,  $(h-v)(t) = \frac{k}{t^c}$

$$\Leftrightarrow \forall t > 1, h(t) = 1 + \frac{k}{t^c}$$

f) a)  $G$  est solution de  $(E_2)$  donc

$$\forall t > 1, G(t) = 1 + \frac{k}{t^c} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Or,  $G(1) = 0$  donc  $k = -1$ .

$$\text{Dés lors, } \forall t > 1, G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

b) On retrouve bien  $G(1) = 0$  lorsque  
 $t \rightarrow 1$  et ainsi la relation s'étend à  
 $[1; +\infty[$ .

Y suit donc la loi de Pareto de paramètre  $c$ .

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto :

$$8) Z = \ln(X)$$

$$a) Z(\Omega) = \mathbb{R}_+ \text{ car } X(\Omega) = [1; +\infty[$$

$$\text{Ainsi, } \forall z \in \mathbb{R}_+, P(Z \leq z) = P(\ln(X) \leq z)$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq z) = P(X \leq e^z) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par stricte} \\ \text{croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P(Z \leq z) = F(e^z)} \quad \left| \quad \left( \forall z \in \mathbb{R}_+, P(Z \leq z) = 0 \right) \right.$$

$$b) \forall z \in \mathbb{R}_+, P(Z \leq z) = F(e^z)$$

$$= 1 - \frac{1}{(e^z)^c}$$

$$= \underline{1 - e^{-cz}}$$

$Z$  suit donc une loi exponentielle de paramètre  $c$ .

c) def simul  $X(c)$  :

$Z = \text{rd. exponential}(c)$   
return (np.exp(Z)).