Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 40	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

G7-00085 Maths E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) On a

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \end{matrix} \\
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

où chaque coefficient ~~contient~~ ~~m_i~~ $a_{i,j}$ contient le nombre d'arêtes qu'il y a entre i et j.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) a)

On cherche les chaînes de longueur 3 qui relient le sommet 2 et 3.

il y a :

2 — 1 — 0 — 3

2 — 3 — 4 — 3

2 — 3 — 0 — 3

donc il y en a 3

2) b)

```
B = f(A, 3)
n = B[2, 3]
print(n)
```

(ou B = [3, 2] car le graphe et non orienté

3) a)

On a $D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & \cancel{1} & \cancel{2}\ 2\cancel{3} & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\ \cancel{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

3) b)

On a

$$L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} - A$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) c) L est symétrique, donc L est diagonalisable.

4)

On a

$${}^tX = (a \quad b \quad c \quad d \quad e)$$

donc ${}^tXL \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$

donc $\cancel{\exists!\,(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \in \mathbb{R}^5}$ $\exists!\, p \in \mathbb{R}$ / ${}^tXLX = (p)$

par produit de lignes avec colonnes

3/

donc

$$\boxed{{}^tXLX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$$

4)b)

On a

${}^tXL = (a\ b\ c\ d\ e)L = (\cancel{2a - b - c}$

$= (2a-b-c \quad -a+2b-c \quad -b+2c-d \quad -a-c+3d-e \quad -d-e)$

donc $\boxed{{}^tXLX = (2a-b-c \quad -a+2b-c \quad -b+2c-d \quad -a-c+3d-e \quad -d-e)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}}$

$= (2a-b-c)a + b(-a+2b-c) + c(-b+2c-d) + d(a-c+3d-e$

$+ e(-d-e)$

$= 2a^2 - ab - ac - ba + 2b^2 - cb - cb + 2c^2 - cd + da - dc + 3d^2 - de$

$- ed - e^2$

Or on a $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 = \dots = C$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Emplacement QR Code

G7 00085 00874

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $C = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 + d^2 - 2ad + a^2$
$+ e^2 - d2ed + d^2$

et par identification :

${}^tXLX - C = 0$

d'où :

$$\boxed{{}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2}$$

4)c)

X est vecteur propre de L et λ une ~~vecteur~~ valeur propre associée :

Donc

$LX = \lambda X$ (α)

donc

$$
\begin{aligned}
{}^tXLX &= {}^tX(\lambda X) \quad \text{d'après } (*) \\
&= \lambda\, {}^tXX \\
&= \lambda (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \\
&= \lambda (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

on a donc

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 = \lambda (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

~~donc~~ or X est vecteur propre de L donc les coefficients a, b, c, d, e ne peuvent pas tous être nuls.

donc on peut diviser par $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

on a $\boxed{\lambda = \dfrac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq 0}$

par positivité de la fonction carrée ~~fact on a égalité si et seulement si~~

~~a = b = c~~

$$\boxed{\text{d'où} \quad \lambda \geq 0}$$

4)d)

On a $LU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0U$ en sommant les lignes de L.

~~donc~~ Or $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc 0 est valeur propre de L et U est un vecteur propre associé.

Or $\underbrace{0 \leq \lambda_1}_{\text{d'après 4)c)}} \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$

donc

$$\boxed{\lambda_1 = 0}$$

5)a) d'après 3)b)

L est symétrique, donc diagonalisable.

donc on a à fortiori.

$$\sum_{\lambda\in Sp(L)} \dim E_\lambda(L) = 5$$

~~et L admet 5 valeurs propres~~

~~donc~~ $\cancel{\forall \lambda \in Sp(L) \quad \dim E_\lambda(L) = 1}$

donc

U ~~est~~ est le seul vecteur engendre $E_0(L)$ (démonstration page 9)

d'où : $\boxed{E_0(L) = \mathrm{Vect}(U).}$ (K)

donc $X \in \mathrm{Vect}(U) \iff X \in E_0(L)$ ~~par é~~ par (K)

$\iff LX = 0$ car $E_0(L) = \{X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}) / LX = 0\}$

5)b)

~~on a~~ $\cancel{\lambda_1 = 0}$ ~~et~~ $\cancel{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5}$

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc on a en fait $\cancel{0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \lambda_5}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~car L admet 5 valeurs propres distinctes, et~~

mon résultat précédent est faux. Je recommence.

5b)

On a $LX = 0 \iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ d = e \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a - b - e = 0 \\ 2b - a - \cancel{e} = 0 \\ 2c - e - b = 0 \\ a - c + 2e \\ d = e \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = b + e - c \\ b + e = 2c \\ d = e \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = b = c = d = e \end{cases}$

d'où $\boxed{LX = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}(U)}$ car U vérifie $a = b = c = d = e$

5)b)

donc

0 est valeur ~~probre~~ propre

et U est ~~donc U~~ une base de $E_0(L)$ d'après 5)a) et parce que

U est non nul et ~~génère~~ est génératrice [par définition du vect]

~~donc~~

Or $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$

et la valeur propre la plus petite est 0, et $\dim E_0(L) = 1$

alors

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (ça aurait été le cas si $\dim E_0(L) \geq 2$)

d'où

$$\boxed{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5}$$

donc $\boxed{\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0, \lambda_5 > 0}$

Exercice 2 :

~~2) Soit $x \in \mathbb{R}$.~~

1) Si on prend $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt$

on a

en effet $|g(t)| < \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ avec $0 < 1 \leq \sqrt{2\pi}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \in]0,1[$

et donc d'après l'inégalité des accroissements finis, g étant la dérivée de f

On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} |x - y|$

donc f est ici $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$-contractante.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (K)

par définition, f ne tend pas vers $\pm\infty$ ~~sur~~ en chaque point fini

Car elle est ~~m~~ absolument majorée par un nombre.

De plus, la formule (K) est valable pour $x \in \mathbb{R}$, et $y \in \mathbb{R}$.

donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

3)

avec (*),

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Supposons par l'absurde qu'il en existe deux

par exemple, $f(x) = x$ et $f(y) = y$ ou $y \neq x$

donc

on a ~~$|x-y|$~~

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

$$\Leftrightarrow |x-y| \leqslant k|x-y|$$

$$\Leftrightarrow k \geqslant 1 \quad \text{car } x \neq y$$

ce qui est absurde $\left[\text{car } 0 < k < 1\right]$

donc $\boxed{f(x) = x \text{ admet au plus une solution.}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

G200803 520087

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ "

I : $n = 0$

on a $u_1 - u_0 \leq k^0 |u_1 - u_0|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$

Or on a ~~$\forall x \in$~~ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

donc en posant $x = u_{n+1}$ et $y = u_n$

on a d'après (*) :

$$|f_{n+1}(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k|u_{n+1} - u_n| \leq k k^n |u_1 - u_0|$$

par $\mathcal{P}(n)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d'où :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k^{n+1} |u_1 - u_0|$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

$\boxed{\underline{C} : \text{Par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|}$

4)b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

On a $|u_{n+1} - u_n| \geq 0$

par positivité de la valeur absolue.

~~donc~~ donc $0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$

Or $\sum_{n \geq 0} k^n |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \sum_{n \geq 0} k^n$ converge comme

série géométrique convergente (avec $0 < k < 1$ donc $|k| < 1$)

donc par théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n| \text{ converge.}}$$

et donc $\sum_{n\geq 0} u_{n+1} - u_n$ converge.

Or $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge

et $\forall N \geq 0$,

$$\sum_{n\geq 0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$$ (somme télescopique)

et $\sum_{n\geq 0} u_{n+1} - u_n$ converge.

donc par égalité,

u_n converge vers un réel a, avec a vérifiant :

$$\boxed{a = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) + u_0}$$

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \geq 1$ soit $i \in [n, n+p-1]$

On a $|u_{i+1} - u_i| \leq k^i |u_1 - u_0|$ d'après 4) a) ($i \in [n, n+p-1]$ donc $i \in \mathbb{N}$)

donc en sommant de n à $n+p-1$, (avec $n \leq n+p-1$ car $p \geq 1$)

$$\boxed{\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i |u_1 - u_0|}$$

5) b) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \geq 1$,

On a

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| = |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+2} - u_{n+1}| + |u_{n+3} - u_{n+2}|$$

$$+ \dots + |u_{n+p} - u_{n+p-1}|$$

j'admets que $\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i-1} - u_i| = |u_{n+p} - u_n|$

On a

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} k^i |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \sum_{k=0}^{n-n+p-1} k^{i+n} \quad \text{par changement d'indice}$$

$$= |u_1 - u_0| \sum_{k=0}^{p-1} k^n k^i$$

$$= k^n |u_1 - u_0| \left(\frac{1 - k^p}{1 - k} \right)$$

par somme géométrique.

donc on a : $\boxed{|u_{n+p} - u_n| \leq k^n \times \frac{1 - k^p}{1-k} |u_1 - u_0|}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5)c) en faisant ~~tendre~~ $p \to +\infty$ dans l'inégalité de 5)b) on a

$\lim_{p \to +\infty} u_{n+p} = a$ par hypothèse

et $\lim_{p \to +\infty} k^p = 0$ car $0 < k < 1$

d'où : $\left[|a - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| \right]$

6) a) Soit $t \in \mathbb{R}$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$ et $f''(t) = \frac{-e^t(1+e^t)^2 + 2e^{t}e^{t}}{(1+e^t)^4}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc

$$f''(t) = \frac{e^t\left(2e^t - (1+e^t)^2\right)}{(1+e^t)^4}$$

$$= \frac{e^t\left(2e^t - 1 - 2e^t - e^{2t}\right)}{(1+e^t)^4}$$

$$= \boxed{\frac{-e^t\left(e^{2t}+1\right)}{(1+e^t)^4}}$$

6) b) Soit $t \in \mathbb{R}^*$

On a

$\underline{f''(t) < 0}$ par positivité de exp sur $\mathbb{R}$

donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations f'	$\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t)$ $\searrow$	$\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)$

Or $f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2} \sim -\frac{e^t}{e^{2t}} = -\frac{1}{e^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

donc $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

et on a

j'admets : $|f'(t)| \leq \frac{1}{4}$

6)c) Soit $t \in \mathbb{R}$,
On a $|f'(t)| \leq \frac{1}{4}$

par l'inégalité des accroissements finis, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|$$

donc $\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4}\text{- contractante.}}$

6)d) On a $u_0 = 0$ et f est $\frac{1}{4}$ contractante.

or ~~donc~~ d'après 3) on a une unique solution à $f(x) = x$

donc si (u_n) converge vers un réel l, alors d'après 4)b), on a

$$\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) + u_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k \quad \text{car } \underline{u_0 = 0}$$

donc $\left[(u_n) \text{ converge vers } \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k \right]$

6)e)

```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1,n+1):
        u = 1 / ~~np.exp(1+~~(1+ np.exp(u))
    return u
```

6)f)

d'après 5)c) appliqué à l'exemple de la question 6, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a - u_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \underbrace{|u_1|}_{=\frac{1}{2}}$$

donc $|a - u_n| \leq \dfrac{1}{3 \times 4^{n-1}} \times \dfrac{1}{2}$

$\left[\text{Or } \overset{\text{on cherche a telque}}{} |a - u_n| \leq 10^{-3} \right]$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2023
Épreuve de :		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc il faut que

$$10^{-3} \geq \frac{1}{3 \times 4^{n-1}} \times \frac{1}{2}$$

donc $4^{n-1} \geq \frac{10^3}{3} \times \frac{1}{2}$

$$4^n \times \frac{1}{4} \geq \frac{10^3}{3 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^n \geq \frac{2 \times 10^3}{3} = \frac{2000}{3}$$

d'où : $\boxed{|u_n - a| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 4^n \geq \frac{2000}{3}}$

6) g) def

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~def seuil(n):~~
~~u = 0~~

```
def approx( ):
    u = 0
    c = 0
    while np.abs(u - a) >= 10 ** (-3):
        c = c + 1
        u = suite(c)
    return u
```

Exercice 3 :

1) a) Si $a = b$.

on a $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

on a $A - \lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow (a - \lambda)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = a$

donc si $a = b$, A possède uniquement $\boxed{a}$ comme valeur propre.

1)b) Si $a = b$

alors A admet qu'une seule valeur propre.

Supposons que A est diagonalisable,

alors il existe P inversible et D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Or $D = aI$ car a est l'unique valeur propre

donc $A = P(aI)P^{-1} = aPP^{-1} = aI$ ce qui est absurde.

donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2)a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $a \neq b$ (λ valeur propre de A) $\Leftrightarrow$

~~on a~~ $\Leftrightarrow$ ($A - \lambda I$ non inversible) $\Leftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\lambda = a}$ ou $\underline{\lambda = b}$

donc $\boxed{Sp(A) = \{a, b\}}$

2)b) On a $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

or $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ~~est valeur propre~~ vecteur propre de A

et on a
$$A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b-a\\b(b-a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\b(b-a)\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$$

or $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ car $1\neq 0$ ~~donc~~ (~~et b~~ ou $b\neq a$ .... mais ici le critère "$1\neq 0$" suffit)

donc $\boxed{\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} \text{ est } \underline{\text{le}} \text{ vecteur propre associé à } E_b(A)}$

2|c)

~~On a~~ La famille B est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires ($b-a\neq 0$)

et génératrice car $\dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(B)$

donc B est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

on a note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

on a donc $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(b-a)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 258 — **Nombre de pages :** — **Session :** 2023 **Épreuve de :** Mathématiques appliqués **Consignes** • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$$ la matrice de passage de B vers la base canonique.

2)d) On note

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$ diagonale, constitué des valeurs propres

et on a $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix}$

et $AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b-a \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix}$

on a bien $\boxed{AP = PD}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

on a $AP = PD$

~~donc~~ $\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ (P^{-1} e inversible)

$\boxed{\text{et donc on a bien } \forall : A \text{ est diagonalisable.}}$

3)a)

Soit $n \in \mathbb{N}^* = X(\Omega) = Y(\Omega)$. La famille $(X = i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.

On a $(X = Y) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = i \cap Y = \cancel{X})$

donc par incompatibilité des évènements $[X = i \cap Y = i]$ on a :

$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = \cancel{X})$ (formule des probabilités totales)

$= \boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) P(X = i)}$ car $X = i$ donc $Y = i$ ~~par ind~~ car X et Y sont indépendantes.

3)b) $\boxed{X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } Y \text{ aussi.}}$

Donc on a :

$$P(X=Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \cancel{\otimes}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{1}{\frac{3}{\cancel{4}}} = \frac{1}{3}$$

d'où : $P(X=Y) = \frac{1}{3}$

4)a) on a $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$

or $A(a,b)$ n'est pas diagonalisable $\Leftrightarrow a = b$ (d'après 1)b)

donc pour que A(X, Y) ne soit pas diagonalisable, il faut que $X = Y$

or $P(X=Y) = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\text{donc } p = \frac{1}{3}}$$

4)b)

1 - i représente la fréquence d'occurrence de $P(X=Y)$, après la lecture ~~de~~ du script.

donc i représente l'évènement contraire, à savoir $P(X \neq Y)$

or $P(X=Y) = \frac{1}{3}$

donc par système complet d'évènements $(X=Y, X\neq Y)$

$$\boxed{\text{on } i \text{ qui devient proche de } \cancel{1}\, \frac{2}{3} = P(X\neq Y)}$$

Problème :

1) Soit $n \in \mathbb{R}$,

- f est continue positive sur $\mathbb{R}$ comme fonction nulle sur $]-\infty, 1[$ et comme ~~produit~~ quotient de fonctions continues et positives sur $[1, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et $c > 1$.

- Montrons que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

f est nulle sur $]-\infty, 1[$, donc sous réserve de convergence :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{[1,+\infty[} f(t)dt$$

Soit $A>1$,

On a $\int_1^A f(t)dt = \int_1^A \frac{c}{x^{1+c}} dx$

$$= c \int_1^A x^{-(1+c)} dx$$

$$= \cancel{c} \left[-\frac{x^{-(1+c)+1}}{\cancel{c}} \right]_1^A$$

$$= -A^{-c} + 1 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1 \text{ car } \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{A^c} = 0$$

donc $\boxed{f \text{ est une densité.}}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a $F(x) = P(X \leq x)$

Si $x < 1$, $F(x) = 0$ or f est nulle sur $]-\infty, 1[$

Si $x > 1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} f(t)dt \quad f \text{ est nulle sur }]-\infty, 1[$$

$$= \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{1+c}} dt$$

$$= \cancel{c}\left[-\frac{t^{-c}}{\cancel{c}}\right]_{1}^{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^c}$$

d'où, en posant $F(1) = 0$, on a

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3) a) Soit $t > 1$,

• $x \geq 1$.

On a $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P(X>t \cap X \leq tx)}{P(X>t)}$

$= \dfrac{P(t \leq X \leq tx)}{P(X>t)}$

$= \dfrac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$

si $x < 1$,

On a $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P(X>t \cap X \leq tx)}{P(X>t)}$

$= 0$ car si $x < 1$

$(t < X \leq tx) = \emptyset$

3)b) ~~Soit~~ Soit ~~$x \geq 1$~~ $x \in \mathbb{R}$, soit $t > 1$,

On a $P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) = P_{(X>t)}\left(X \leq tx\right)$

$$\underset{(x \geq 1)}{=} \frac{\cancel{\int_x^{tx}} 1 - \frac{1}{(tx)^c} - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)}{\frac{1}{t^c}}$$

$$= \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{t^c x^c}}{\frac{1}{t^c}}$$

$$= \frac{\cancel{t^c}}{\cancel{t^c}} - \frac{1 t^c}{t^c x^c}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^c}$$

~~si $x < 1$~~

et $P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) \underset{x<1}{=} 0$ d'après 3)a)

d'où : $\boxed{\frac{X}{t} \text{ conditionné à } (X>t) \text{ est la loi de } X.}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 998	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4)

On a ~~G~~ ~~cf(t)~~ $c = g(1)$ et g est nulle sur $]-\infty, 1[$.

donc $\left[G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt \right.$ (g est une densité donc $\int_{-\infty}^{1} g(t)$ existe)

$= \int_{-\infty}^{1} 0\,dt$ car g est nulle

$\underline{= 0}$

5)a) Soit $n \geqslant 1$, $t > 1$

~~On a $\frac{G(tn) - G(t)}{1 - G(t)} = \frac{P(Y \leq tn) - P(Y \leq t)}{P(Y > t)}$~~

~~$= \frac{P(t < Y < tn)}{}$~~

~~On~~ $\frac{Y}{t}$ sachant ~~x~~ $Y > t$ suit la même loi que Y donc

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

elles ont les mêmes fonctions de répartitions.

On a donc
$$G(x) = P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right)$$
$$= \frac{P(\cancel{Yx} > t \cap Y \leq \cancel{xt} tx)}{\underbrace{P(Y>t)}_{>0}} \quad t \cancel{x} > 1$$
$$= \frac{P(t < Y < tx)}{1 - G(t)}$$
$$= \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

car $G(tx) - G(t) = \int_t^{tx} g(t)\,dt$

5) b) Soit $x > 1$, soit $t > 1$.

G est une fonction de répartition, donc elle ~~de~~ c'est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 1. Or 1 n'est pas à étudier. donc G est effectivement de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

35/

On a :

$$G'(x) = \cancel{tG(tx)(1-G(t))} \frac{1}{1-G(t)} \times tG(tx) \quad \text{car } t \text{ est fixé}$$

d'où : $\boxed{G'(x) = \dfrac{tG(tx)}{1-G(t)}}$

5)c) Soit $t>1$,

On a $G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = \dfrac{G(t^2) - G(t)}{1-G(t)} + \dfrac{t\,G'(t^2)}{c \times (1-G(t))}$

$$= \frac{1}{1-G(t)} \times \left(G(t^2) - G(t) + \frac{t}{c} G'(t^2) \right)$$

Or $G(t^2) = 1 - \dfrac{1}{t^{2c}}$

donc $\cancel{t}\,G'(t^2) = 2t\,g(t^2) = \dfrac{2tc}{(t^2)^{1+c}}$

$$= \frac{2tc}{t^{2+2c}} = \frac{2c}{t^{1+2c}}$$

donc $\frac{t}{c} G'(t^2) = \dfrac{2}{t^{2c}}$

donc

$$G(t^2) + \frac{t}{c} G'(t^2) = 1 - \frac{1}{t^{2c}} + \frac{2}{t^{2c}}$$

$$= 1 + \frac{1}{t^{2c}}$$

Partie 3 :

8) a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a $H(x) = P(Z \leq x) = P(\ln(X) \leq x)$

$$= P(X \leq e^x)$$

$$= F(e^x)$$

8) b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

~~$x \geq 1$ donc~~

On a $F(e^x) = H(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{e^{cx}} & \text{si } e^x \geq 1 \\ 0 & \text{si } e^x < 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8) b) donc $\left[Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\cancel{d})(c) \right]$

8) c)

```
def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)    # le paramètre à renseigner est l'espérance
    return np.exp(Z)
```

car $Z = \ln(X)$ donc $X = \exp(Z)$

Exercice 2 :

4) c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

(u_n) converge vers un réel a. ~~et a vérifie~~

Or $u_{n+1} = f(u_n)$

donc a vérifie $a = f(a)$. Or, on avait démontré que

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

f admet au plus une seule (question 3).

[Donc elle en admet une, elle vaut a, et elle est unique.]

7)b) Problème:

Vérifions si G ~~vérifie~~ a une expression valable en 1^+.

On a $G(1) = 0$ d'après 4)

et $\lim_{t \to 1^+} 1 - \frac{1}{t^c} = 0$ donc

cette relation s'étend à $[1, +\infty[$.

6)d) ~~(h solution de E_2)~~

$(h - v)$ solution de $E2 \Leftrightarrow h - v + \frac{t}{c}(h' - v') = 0$

$\Leftrightarrow h \cancel{\;\;} + \frac{t}{c} h' = v$

car v est constante donc $v' = 0$

38/

Or v est solution de E_2

donc

$h - v$ est solution de E_2 d'après l'équivalence.