Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 31	Session : 2023

A5-00007 Maths E

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I : Transformation de Stein.

1. a) Pour $x \geqslant 0$, et $t \in [x ; +\infty[$,

On a $0 \leqslant \varphi(t)$ par définition d'une densité.

D'autre part, comme $x \geqslant 0$ et $t \in [x ; +\infty[$,

On a $0 \leqslant x \leqslant t$

Il vient $\boxed{0 \leqslant x\varphi(t) \leqslant t\varphi(t).}$

D'autre part, φ dérivable sur $\mathbb{R}$ comme densité de la loi normale.

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = -\frac{2t}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} = -t\varphi(t).$

Les fonctions intégrées étant continues sur $\mathbb{R}$ et les bornes dans le bon sens, on a par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant x \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt.$$

Nous sommes assurés de la convergence dans les deux cas : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$ $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,dt = 0.$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x(1-\Phi(x)) \leqslant \int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt$

On a remarqué que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = -t\varphi(t)$$

Donc $\quad 0 \leqslant x(1-\Phi(x)) \leqslant \left[-\varphi(t)\right]_x^{+\infty}$

$$\Rightarrow \underline{0 \leqslant x(1-\Phi(x)) \leqslant \varphi(x)}$$

b) Pour $x \leqslant 0$, et $t \in]-\infty ; x]$

$$t\varphi(t) \leqslant x\varphi(t) \leqslant 0$$

Par croissance de l'intégrale, les fonction étant continue, les bornes dans le bon sens, et les intégrales convergentes,

$$\int_{-\infty}^{x} t\varphi(t)\,dt \leqslant x\int_{-\infty}^{x}\varphi(t) \leqslant 0$$

$\Leftrightarrow \quad \left[-\varphi(t)\right]_{-\infty}^{x} \leqslant x\,\Phi(x) \leqslant 0$ d'après 1.b)

$\Leftrightarrow \quad \underline{-\varphi(x) \leqslant x\,\Phi(x) \leqslant 0.}$

c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $A < x$,

$\int_A^x \Phi(t)\,dt$ définie car Φ continue sur $\mathbb{R}$

$= \int_A^x \int_{-\infty}^{t} \varphi(u)\,du\,dt$

Pour $u' = 1$ et $u = t$

et pour $v = \int_{-\infty}^{t} \varphi(u)\,du$ et $v' = \varphi(t)$

On calcule $\left(\int_{-\infty}^{t} \varphi(u)\,du\right)'$ comme dérivée d'une fonction définie par une intégrale

On a donc $\int_{A}^{x} \int_{-\infty}^{t} \varphi(u)\,du$

$$= \left[t \int_{-\infty}^{t} \varphi(u)\,du \right]_A^x - \int_A^x t\,\varphi(t)\,dt$$

$$= x \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du - A \int_{-\infty}^{A} \varphi(u)\,du - \left[-\varphi(t) \right]_A^x$$

$$= x\,\Phi(x) - A \int_{-\infty}^{A} \varphi(u)\,du + \varphi(x) - \varphi(A)$$

Or, pour $x \leq 0$, $\quad -\varphi(x) \leq x\,\Phi(x) \leq 0$

Donc si on prend $A \leq 0$, sachant que A a pour dessein de tendre vers $-\infty$,

On a $\quad -\varphi(A) \leq A\,\Phi(A) \leq 0$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ (d'où $\lim\limits_{A \to +\infty} \varphi(A) = 0$

Donc $\lim\limits_{A \to -\infty} A \int_{-\infty}^{A} \varphi(u)\,du = 0$ par encadrement

Par le calcul, en faisant tendre A vers $-\infty$, il vient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt = x\,\Phi(x) + \varphi(x).}$$

De même, pour $A > x$, en faisant la même intégration par partie.

$$\int_x^A (1-\Phi(t))dt = \left[t(1-\Phi(t))\right]_x^A - \int_x^A t\,\varphi(t)\,dt$$

$$= -x(1-\Phi(x)) + A(1-\Phi(A)) - \left[-\varphi(t)\right]_x^A$$

$$= -x(1-\Phi(x)) + A(1-\Phi(A)) - \varphi(A) + \varphi(x)$$

De même,

Pour $x \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant x(1-\Phi(x)) \leqslant \varphi(x)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ Donc

$\lim\limits_{A \to +\infty} A(1-\Phi(A)) = 0$ (et $\lim\limits_{A \to +\infty} \varphi(A) = 0$

Ainsi, par passage à la limite, on a bien :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt = -x(1-\Phi(x)) + \varphi(x).}$$

2. a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que $h \in W$

Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad |h'(t)| \leqslant 1$.

h étant continue sur $[x;y]$ et dérivable sur

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$]x;y[$ comme fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

d'après la deuxième inégalité des accroissements finis, il vient que :

$$|h(x)-h(y)| \leqslant 1 \times |x-y|$$

$$\iff \boxed{|h(x)-h(y)| \leqslant |x-y|}$$

De même, pour $y=0$,

$$|h(x)-h(0)| \leqslant |x|$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$|h(x)|-|h(0)| \leqslant |h(x)-h(0)|$$

donc $\boxed{|h(x)| \leqslant |x| + |h(0)|}$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\forall A \leq x$, les fonctions étant $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_A^x |h'(t)\,\Phi(t)|\,dt \leq \int_A^x |h'(t)|\,\Phi(t)\,dt$$

$$\leq \int_A^x \Phi(t)\,dt$$

or, quand $A \longrightarrow +\infty$,

On a montré que $\int_{-\infty}^x \Phi(t)\,dt$ convergeait en 1.c)

Donc, par comparaison à une intégrale convergente,

$\boxed{\int_{-\infty}^x h'(t)\,\Phi(t)\,dt \text{ converge absolument donc converge.}}$

Par intégration par partie, pour

$u' = h'$ et $u = h$

et $v = \Phi$ et $v' = \varphi$,

les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ et les bornes dans le bon sens, et comme on s'est assuré de la convergence, par intégration par partie, il vient que

$$\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt = \left[h(t)\,\Phi(t)\right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} h(t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\boxed{= h(x)\,\Phi(x) - \int_{-\infty}^{x} h(t)\,\varphi(t)\,dt}$$

(D'après le même passage à la limite qu'en 1.c)

c) $-\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)\,(1-\Phi(t))\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$= -h(x)\,\Phi(x) + \int_{-\infty}^{x} h(t)\,\varphi(t)\,dt - h(x)\,(1-\Phi(x)) + \int_{x}^{+\infty} h(t)\,\varphi(t)\,dt$$

$= -h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\varphi(t)\,dt$ d'après la relation de Chasles

Or, $E(h(X))$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ existe

car $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\varphi(t)\,dt$ converge absolument

d'après ce qui précède.

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\varphi(t)\,dt = E(h(X)) = c_h$ d'après

le théorème du transfert.

Enfin, la somme demandée est bien égale

à $\boxed{c_h - h(x)}$

3. a) θ dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonction dérivable à dénominateur non nul, en effet : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) > 0$.

Ainsi, $$\theta'(x) = \frac{\varphi(x)^2 + x\varphi(x)\,\Phi(x)}{\varphi(x)^2}$$

$$\iff \theta'(x) = 1 + x\,\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$$

$$\iff \boxed{\theta'(x) = 1 + x\,\theta(x)}$$

θ' dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont telle que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\theta''(x) = \theta(x) + x + x^2\,\theta(x)$$

$$\iff \boxed{\theta''(x) = x + (1+x^2)\,\theta(x)}$$

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\theta(-x)\Phi(x) = \frac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)} \times \Phi(x)$$

$$= \frac{\Phi(x)}{\varphi(-x)} \times \Phi(-x)$$

Or φ est paire, et $\Phi(-x) = (1 - \Phi(x))$

d'où $\theta(-x)\,\Phi(x) = \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} \times \Phi(-x) = \boxed{\theta(x)(1-\Phi(x))}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) On a donc θ $\mathcal{C}^1$ d'après ce qui précède.

De plus, $\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))dt$ $\mathcal{C}^1$ comme fonction définie par une intégrale convergente, car on a admis que

$$\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))dt = -h(x)(1-\Phi(x)) + \int_x^{+\infty} h(t)\varphi(t)dt.$$

Donc $\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))dt$ $\mathcal{C}^1$ comme somme de fonction $\mathcal{C}^1$ aussi.

De même, $\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt = h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)dt$ $\mathcal{C}^1$ comme somme de fonction qui le sont.

Dès lors, f_h $\mathcal{C}^1$ comme somme et produit de fonction qui le sont.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_h'(x) = -(1+x\theta(x))\int_{-\infty}^{x} h'(t)\varphi(t)\,dt + (1+x\theta(x))\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$$
$$+\theta(-x)\left(h'(x)\Phi(x) + h(x)\varphi(x)\right)$$

Je n'aboutis pas au calcul :

On admet $\boxed{f_h'(x) - x f_h(x) = c_h - h(x)}$

On peut selon moi affirmer que f_h est $\mathcal{C}^2$ car

$$f_h'(x) = x f_h(x) + c_h - h(x)$$

Donc f_h' $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonction qui le sont, c_h étant une constante et $h \in W$.

$\boxed{\text{D'où } f_h \ \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car } f_h' \ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

c) On a $f_h'(x) - x f_h(x) = c_h - h(x)$

avec $c_h = E(h(N))$

Or, pour X admettant une espérance, avec $h \in W$,
Et où est X à valeur réelle
$E(h(X))$ existe, donc

$$f_h'(X) - X f_h(X) = E(h(N)) - h(X)$$

D'où, par linéarité de l'espérance et par égalité :

$$E\left(f_h'(X) - X f_h(X)\right) = E(h(N)) - E(h(X))$$

D'où $$\left| E(h(X)) - E(h(N)) \right| = \left| E\left(f_h'(X) - X f_h(X)\right)\right|$$

(Je ne comprends pas le passage à la valeur absolue, j'ai dû me tromper)

4. a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty}(1-\Phi(t))\,dt$$

$$= \theta(-x)\, x\, \Phi(x) + \theta(-x)\,\varphi(x) - x\,\theta(x)(1-\Phi(x)) + \theta(x)\,\varphi(x)$$

$$= \theta(-x)\, x\, \Phi(x) + \theta(-x)\,\varphi(x) - \theta(x)\, x(1-\Phi(x)) + \theta(x)\,\varphi(x)$$

Or $\theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$

D'où $$= \cancel{\theta(x)(1-\Phi(x))\, x} - \cancel{\theta(x)\, x(1-\Phi(x))} + \theta(-x)\varphi(x) + \theta(x)\varphi(x)$$

$$= \varphi(x)\left(\theta(x) + \theta(-x)\right)$$

Or $\theta(-x) = \dfrac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)} = \dfrac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)}$

Donc l'identité initiale est égale à :

$$= \varphi(x)\left(\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} - \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)}\right)$$

$$\boxed{= 1}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f_h(x)| \leq \theta(-x)\left|\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt\right| + \theta(x)\left|\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt\right|$$

par inégalité triangulaire

$$\leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} |h'(t)|\,\Phi(t)\,dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} |h'(t)|\,(1-\Phi(t))\,dt$$

par inégalité triangulaire sur les intégrales convergentes

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|h'(t)| \leq 1$ et comme toutes les fonctions sont positives

$$\leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt$$

$$= 1 \quad \text{d'après ce qui précède}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{|f_h(x)| \leq 1}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\theta''(-x) = -x + (1+x^2)\theta(-x)$ d'après 3.a)

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'identité proposée est égale à :

$$(-x + (1+x^2)\theta(-x)) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt + (x+(1+x^2)\theta(x)) \int_{x}^{+\infty} 1-\Phi(t)\,dt$$

$$= (-x + (1+x^2)\theta(-x))(x\Phi(x) + \varphi(x)) + (x+(1+x^2)\theta(x)) \times (-x(1-\Phi(x)) + \varphi(x))$$

$$= -x^2\Phi(x) \cancel{- x\varphi(x)} + \cancel{(1+x^2)\theta(-x)x\Phi(x)} + (1+x^2)\theta(-x)\varphi(x) - x^2(1-\Phi(x)) + \cancel{x\varphi(x)}$$

$$\cancel{- x(1+x^2)\theta(x)(1-\Phi(x))} + \varphi(x)(1+x^2)\theta(x) \quad \Big| \text{ car } \theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$$

$$= -x^2 \cancel{\Phi(x)} + (1+x^2)\theta(-x)\varphi(x) - x^2(\cancel{1-}\Phi(x)) + \varphi(x)(1+x^2)\theta(x)$$

$$= -x^2 + (1+x^2)\varphi(x)(\theta(-x) + \theta(x))$$

$$= -x^2 + (1+x^2)\cancel{\varphi(x)} \times \frac{1}{\cancel{\varphi(x)}}$$

$$\boxed{= 1}$$

CQFD !

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_h'(x) = c_h + x f_h(x) - h(x)$

f_h dérivable comme somme de fonction qui le sont

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_h''(x) = f_h(x) + x f_h'(x) - h'(x)$

$\Leftrightarrow f_h''(x) = -h'(x) + x f_h'(x) + f_h(x)$

On pour $x \in \mathbb{R}$, $\theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$

Donc $\theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt = -x \int_{-\infty}^{x} \Phi(t) h'(t)\,dt + (1+x^2)\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt$

De même $\theta''(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt = x \int_{x}^{+\infty} h(t)(1-\Phi(t))\,dt$

$+ (1+x^2)\theta(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

On $c_h = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt$.

$\theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

$= -x \int_{-\infty}^{x} \Phi(t) h'(t)\,dt + x \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

$+ (1+x^2)\left(\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt \right)$

$$= -x\int_{-\infty}^{x} \Phi(t) h'(t)\,dt + x\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt + (1+x^2) f_h(x)$$

$$= -x\int_{-\infty}^{x} \Phi(t) h'(t)\,dt + x\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt + x^2 f_h(x) + f_h(x)$$

Or, $x f_h'(x) = x\, C_h + x^2 f_h(x) - x\, h(x)$

On devrait montrer que

$$x\left(-\int_{-\infty}^{x} \Phi(t) h'(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt\right) = x\,C_h - x\,h(x)$$

en effectuant peut être un changement de variable

Ainsi, même si je n'aboutis pas complètement le calcul

$$\underline{f_h''(x) = -h'(x) + \Theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt + \Theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt}$$

(Mes excuses pour la propreté)

c) La fonction est dérivable, telle que sa dérivée pour x réelle soit la suivante :

$$\varphi(x) + \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}\varphi'(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi'(x)$$

$$= \varphi(x) + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\varphi(x) - \frac{x^2}{1+x^2}\varphi(x)$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(\varphi(x) + \cancel{x^2\varphi(x)} + \varphi(x) - \cancel{x^2\varphi(x)} - x^2\varphi(x)\right)$$

$$= \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)} \varphi(x)$$

Son signe dépend de $1 - x^2$, négatif sur $[-1;1]$ et positif sur $]-\infty;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2};+\infty[$.

Dès lors la fonction est décroissante sur $]-\infty;-\sqrt{2}]$ croissante sur $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$. telle que, pour g cette fonction :

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Var g		↘		↗	$g(\sqrt{2})$	↘	

Par croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$$g(\sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{1+2} \varphi(\sqrt{2})$$

Je me suis trompé.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 2 - Majoration uniforme de la distance de Kolmogorov :

On pose $d_X(x) = \left| F_X(x) - \Phi(x) \right|$

$$h_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}$$

et $$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 1 \\ 1 - 3t^2 + 2t^3 & \text{si } t \in [0;1]. \end{cases}$$

6. $h_x(X)$ suit une loi de bernoulli

de paramètre $1 - P(X < x) = p$

Ainsi, $E(h_x(X)) = 1 - P(X < x)$

$$= P(X \leq x)$$

$$\boxed{= F_X(x).}$$

L'existence est assurée par le fait que c'est une variable de Bernoulli

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. a)
```
def gamma(t):
    if t < 0:
        return 1
    elif t > 1:
        return 0
    else :
        return 1 - 3*t**(2) + 2*t**(3)
```

b)
```
import matplotlib as plt
import numpy as np .
X = np.linspace(-1, 2, 1000)
Y = [gamma(t) for t in X]
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

8. a) $1-3+2=0$ donc

$\lim_{t \to 1^-} \gamma(t) = \varphi(1) = 0$ et γ continue en 1

De plus, $1 - 3 \times 0 + 2 \times 0 = 1$

donc $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = \gamma(0) = 1$

Ainsi, γ continue par morceau sur $]-\infty;0[$, $[0;1]$ comme fonction polynomiale et $]1;+\infty[$ comme constante, et

γ continue en 0 et en 1.

$\underline{\gamma \text{ continue sur } \mathbb{R}.}$

De plus, γ dérivable par morceau sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ -6t + 6t^2 & \text{si } t \in [0;1] \end{cases}$$

D'où γ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et de 1 pour l'instant

b) $\forall t \in [0;1]$, $\quad 6t(t - 6) \leq 0$

D'où γ décroissante sur $[0;1]$ et constante sur $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$.

On a :

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Var γ	1	$\nearrow$ 1 $\searrow$	0	$\rightarrow$ 0

Dès lors, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) \in [0;1]}$

c) $\forall t \in [0;1[$, $\lim\limits_{t \to 1} \gamma'(t) = 0$ par le calcul. Ainsi, $\boxed{\gamma \text{ dérivable en } 1}$.

d) $\forall t \in \mathbb{R}$,

$t \mapsto 6t^2 - 6t$ admet comme dérivée sur $[0;1]$

$12t - 6 = 6(2t - 1)$. Ainsi,

$t \mapsto 6t^2 - 6t$ admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$

Donc $|\gamma'(t)| \leq \left| \frac{6}{4} - \frac{6}{2} \right| = \frac{3}{2}$ pour $t \in [0;1]$

Enfin, γ' étant nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0;1]$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \ |\gamma'(x)| \leqslant \frac{3}{2}$.

g. $\forall h \in W, \ |E(h(X)) - E(h(N))| \leqslant M_X$.

soit $t > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$,

$k_x(y) = \gamma\left(\frac{y-x}{t}\right)$.

a) $\forall t \in \mathbb{R}, \ \gamma(t) \geqslant 0$

Or, $\forall y > x$, $h_x(y) = 0$

Or pour $t > 0$, et $y > x$, $\frac{y-x}{t} \geqslant 0$

Donc pour $x < y$, $h_x(y) \leqslant k_x(y)$

D'autre part, pour $y \leqslant x$

$h_x(y) = 1$

Or $\frac{y-x}{t} \leqslant 0$ donc $\gamma\left(\frac{y-x}{t}\right) = 1$

D'où $h_x(y) \leqslant k_x(y)$

Dans tous les cas, $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \ h_x(y) \leqslant k_x(y)}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9. b) $\forall y \in \mathbb{R}$, $h_x(y) \leq k_x(y)$.

d'où $E(h_x(X)) - E(h_x(N)) \leq E(k_x(X)) - E(h_x(N))$

$\leq E(k_x(X)) - E(k_x(N)) + E(k_x(N)) - E(h_x(N))$

c) $E(k_x(N)) - E(h_x(N))$ d'après le théorème du transfert

$= \int_{-\infty}^{+\infty} k_x(t)\, \varphi(t)\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(t)\, \varphi(t)\, dt$

On rappelle que $k_x(t) = \gamma\left(\frac{y-x}{r}\right)$

donc $k_x(t) = 0$ si $y - x > t$

$\Leftrightarrow y > x + t$

D'autre part, si $y < x$, $k_x(t) = 1$

De même, si $t < x$, $h_x(t) = 1$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{x} k_x(t)\, \varphi(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} h_x(t)\, \varphi(t) = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a donc $\boxed{E(h_x(\cancel{N})) - E(h_x(N)) = \int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)\,du}$

car $h_x(u)\,\varphi(u) = 0$ si $t > x$

d) k_x $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

De plus, g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall u \in \mathbb{R},\ g'(u) = \frac{2t}{3} \times \frac{1}{t} \times \gamma'\left(\frac{y-u}{t}\right)$

$= \frac{2}{3} \times \gamma'\left(\frac{y-u}{t}\right)$

Or, $\forall t \in \mathbb{R},\ |\gamma'(t)| \leqslant \frac{2}{3}$

donc $\forall u \in \mathbb{R},\ |g'(u)| \leqslant \frac{2}{3} \leqslant 1$

g appartient donc à W.

On a que $E(h_x(\cancel{N})) - E(h_x(N)) \leqslant E(k_x(N)) - E(h_x(N))$

$= \int_x^{x+t} k_x(u)\,\varphi(u)\,du$

De plus, $|E(h(X)) - E(h(N))| \leq M_X$.

On n'aboutit pas

10.

Partie III - Estimation d'une densité.

11. a) En SQL :

SELECT salaire FROM stats.csv. (La bibliothèque pandas n'a pas été étudiée)

b)
```
a = float(input('a='))
n = len(echantillon.count())
h = 1 / np.sqrt(n)
C = 0
for i in range(n):
    if echantillon[i] >= a-h and <a+h :
        C += 1
print(C/(2*np.sqrt(n)))
```

12. C_n est la somme de n variables de Bernoulli Y_i

Prenant la valeur 1 si $X_i(\omega) \in]a-h_n ; a+h_n[$.

$Y_i = 1$ si $X_i \in]a-h_n ; a+h_n[$.

Dès lors, $P(Y_i = 1) = P(a-h_n < X_i < a+h_n)$

Les variables sont indépendantes et de même paramètres. Donc par stabilité de la loi binomiale,

$C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$

avec $p_n = P(a - h_n < X < a + h_n)$

$= F(a + h_n) - F(a - h_n)$

$E(f_n) = \frac{1}{2nh_n} E(C_n)$ par linéarité de ~~l'espe~~ l'espérance.

$$\underline{= \frac{1}{2h_n} \times (F(a+h_n) - F(a-h_n))}$$

13. a) F est dérivable en a comme fonction de répartition d'une variable à densité.

Aussi, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 0$.

$$\frac{F(a+h_n) - F(a-h_n)}{h_n - (-h_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} F'(a) = f(a)$$

Enfin, $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} E(f_n) = f(a)}$.

b) $V(f_n) = \frac{1}{4n^2h_n^2} V(C_n(\omega))$ d'où $V(f_n)$ existe

De plus, $nh_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $V(C_n(\omega))$ existe

Donc $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} V(f_n) = 0 \quad \text{par opération sur les limites.}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14. a) On admet que F est $\mathcal{C}^2$ en a :

D'après la formule de Taylor-Young,

~~Pour~~ n au voisinage de $+\infty$, comme $\lim_{n \to +\infty} h_n = 0$

$$F(a+h_n) = F(a) + f(a)(n-h_n) + \underbrace{f'(a)}_{0}\frac{(n-h_n)^2}{2} + o(h_n^2)$$

$$\text{et } F(a+h_n) = F(a) + f(a)(n+h_n) + \underbrace{f'(a)}_{0}\left(\frac{n+h_n}{2}\right)^2 + o(h_n^2)$$

D'où

$$p_n \underset{n \to +\infty}{=} 2h_n f(a) - \cancel{f(a)h_n} + \cancel{f(a)h_n}) + o(h_n^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_n \underset{n \to +\infty}{=} 2h_n f(a) + o(h_n^2)$$

Or $2h_n f(a) = \theta_n^2$

D'où

$$\boxed{p_n \underset{n \to +\infty}{=} 2h_n f(a) + o(h_n^2) \underset{n \to +\infty}{=} \theta_n^2 + o(h_n^2)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b/ Ainsi, $p_n \underset{+\infty}{\sim} 2h_n f(a)$ d'après la définition première de l'équivalence.

D'où $np_n \sim_{+\infty} 2nh_n f(a)$

Or $f(a) > 0$ et $nh_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$$\boxed{\text{Donc } np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ par équivalence}}$$

c) $\hat{f}_n = \frac{\theta_n \sqrt{n}}{f(a)} (f_n - f(a))$

Or, $\frac{\sigma_n}{\theta_n \sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right)$

$= \frac{C_n - np_n}{\theta_n \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n} p_n - \sqrt{n}\theta_n}{\theta_n}$

$= \frac{C_n - \cancel{np_n} + \cancel{np_n} - n\theta_n^2}{\theta_n \sqrt{n}}$

$= \frac{2nh_n f_n - n\theta_n^2}{\theta_n \sqrt{n}}$

$= \frac{\theta_n \sqrt{n}}{f(a)}\left(\frac{f(a)}{\theta_n \sqrt{n}}\left(\frac{2nh_n f_n - n\theta_n^2}{\theta_n \sqrt{n}}\right)\right)$

$= \frac{\theta_n \sqrt{n}}{f(a)}\left(\frac{f(a) \times (2nh_n f_n - n\theta_n^2)}{\theta_n^2 n}\right.$

$$= \frac{\theta_n \sqrt{n}}{f(a)} \left(\frac{f(a)\left(2 \cancel{n} h_n f_n\right)}{\sigma^2 \cancel{n}} - f(a) \right)$$

$$\boxed{= \frac{\theta_n \sqrt{n}}{f(a)} \left(f_n - f(a) \right) = \hat{f}_n}$$

car $f(a) = \dfrac{\theta^2}{2h_n}$; CQFD ! .

De plus, $\sigma_n = \sqrt{n p_n (1 - p_n)}$

Or $\quad p_n \sim_{+\infty} 2 h_n f(a)$

et $\quad \theta_n = \sqrt{2 h_n f(a)}$

<u>Ça n'aboutit pas.</u>

15.a) ——

b) ——

Partie IV - Convergence de la loi « uniforme ».

16. a) $f'(S_n)$ admet une espérance car S_n admet une espérance comme somme de variable admettant une espérance par linéarité.

De même, $f'(Y_k)$ admet une espérance.

De plus, d'après l'hypothèse de l'énoncé, $X^2 f'(Y_k)$ admet une espérance.

Dès lors,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k))$$

$$= E(f'(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k))$$

Or $Y_k = S_n - X_k = X_1 + \dots + X_{k-1} + X_{k+1} + \dots + X_n$

Donc d'après le lemme des coalitions,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k f'(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) E(f'(Y_k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k))$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k)) - \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(Y_k)) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Statistiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

L'identité initiale est donc égale à $E(f'(S_n))$.

~~b)~~ $\cancel{\sum_{k=1}^{n} E(X_k f(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(Y_k))}$

$\cancel{=}$

b) On admet

$$\sum_{k=1}^{n} E(X_k [f(S_n) - f(Y_k)])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(S_n))$$

Or $E(S_n f(S_n)) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k f(S_n))$

$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(S_n))$ par linéarité

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k [f(S_n) - f(Y_k)])$$

c) —

17. a) Pour a et b réels,

$$\int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb))\,dt$$

$$= b\int_0^1 f'(a)\,dt - \int_0^1 f'(a+tb)\,dt$$

$$= b f'(a) - \int_a^{a+b} f'(u)\,du$$

d'après le changement de variable $a+tb = u$, la fonction étant $\mathcal{C}^1$ bijective.

$$\boxed{= b f'(a) - (f(a+b) - f(a))}$$

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1$.

Ainsi, $|b f'(a) - (f(a+b) - f(a))|$

$$\leq \int_0^1 |b(f'(a) - f'(a+tb)\,dt|$$

c) —

18) a) d'après (R_3)

$d_{S_n}(n) \leq$ ———

b) On en déduit d'après l'énoncé que (S_n) converge en loi vers N. Le théorème limite central nous aurait permis d'obtenir un tel résultat.

19) a) $E(~~|X_k|~~) = E\left(\frac{|Z_k - p_n|}{\sigma_n}\right)$

$= \frac{1}{\sigma_n} E($

D'après le théorème du transfert,

$$E(|Y_k|) = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{k - p_n}{\sigma_n}\right| p_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sigma_n} p_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_n^2}{\sigma_n}$$

$$= \frac{p_n}{\sigma_n} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n p_n^2}{\sigma_n}$$

$$= \frac{2\sigma_n}{n} \text{ car } \sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$$