Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 34	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 - ESSEC

W4-00044 Maths 2E

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I - Matrice génératrice et systèmes différentiels associés.

1. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$

Soit $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$

La famille $([X_t = i])_{i \in [\![1,m]\!]}$ forme un système complet d'événement.

Par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}([X_t = i] \cap [X_{t+h} = j])$$

Donc pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et pour tout $(t, h) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])}$$

2.

$\times$ $X_{t+h}(\Omega) = [\![1, n]\!]$ d'après l'énoncé

$\times$ $\mathbb{P}_{[X_t = i]}$ est une probabilité

Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h}=j]) = 1$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ Soit $h \in \mathbb{R}^+$ (Soit $j \in [\![1, n]\!]$)

Comme la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h}=j])$

est constante sur S_i il existe un réel $\alpha_{i,j}$ tel que

d'après (H4) $\mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h}=j]) = \alpha_{i,j}h \underset{h\to 0}{+} o(h)$

La somme est licite car cela ressemble à un développement limité

d'où :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h}=j]) = \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{i,j}h \underset{h\to 0}{+} o(h)\right)$$

$$\|$$

$$1$$

D'où par linéarité de la somme et formules de négligeabilité on obtient :

$$1 \underset{h\to 0}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right)h + o(h)$$

$\to$ il manque le $+1$ du résultat mais il ne figure pas dans la propriété (H4) qui semble être celle utile

D'où en partant du résultat de l'énoncé :

$$0 \underset{h \to 0}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + o(h)$$

Donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h \times \frac{1}{h} = 0$

car $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) \times h$ appartient donc à l'ensemble des fonctions - négligeables par rapport à h.

D'où $\displaystyle\lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0$

Donc comme $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}$ ne dépend pas de h.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0}$$

3. a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$ Soit $(t, h) \in (\mathbb{R}_+^2)$.

d'après 1.

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])$$

car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}([X_t = i]) \neq 0$ en effet f_i n'est pas la fonction nulle.

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_t = i]) \times \mathbb{P}_{[X_t = i]}([X_{t+h} = j])$$

non aboutie

3. b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$
Soit $t \geq 0$
Soit $h > 0$

d'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) \underset{h \to 0}{=} \mathbb{P}([X_t = j]) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} h + o(h)) \mathbb{P}([X_t = i])$$

d'où $$f_j(t+h) \underset{h \to 0}{=} f_j(t) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} h + o(h)) f_i(t)$$

ainsi $$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + o\left(\frac{h}{h}\right)$$

car $h > 0$

On a donc bien :

Pour tous $j \in [\![1, n]\!]$, $t \geq 0$ et $h > 0$

$$(*) \quad \boxed{\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + o(1)}$$

comme f_j est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h}$ admet une limite finie quand $h \to 0$ (car f_j est dérivable donc en t)

cette limite vaut $\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j}$ car $(*)$

$$\boxed{\text{D'où } f_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j}}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 34 | Session : 2023

Épreuve de : Maths 2 - ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3. c) Soit $t \in \mathbb{R}^+$

$\times \; L'_t = (f_1'(t) \; \ldots \; f_m'(t))$

$\times \; L_t = (f_1(t) \; \ldots \; f_m(t))$

$$L_t \times G = (f_1(t) \ldots f_m(t)) \times \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,j} & \alpha_{1,m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \alpha_{i,j} & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \ddots & \alpha_{m,m} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} f_i(t)\alpha_{i,1} \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{m} f_i(t)\alpha_{i,m}\right)$$

$$= (f_1'(t) \quad \ldots \quad f_m'(t)) \quad \underline{\text{d'après 3. b)}}$$

$$= L'_t$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } t \geq 0, \; L_t G = L'_t}$

4. $Z_{i,T}$ admet une esperance si et seulement si par théorème de transfert $\int_0^T f_i(t)\, g(t)\, dt$ converge absolument.

où g est ~~une~~ densité de U_T.

remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto f_i(t) g(t)$ est continue sur le segment $[0,T]$ en tant que produit de fonctions continues sur $[0,T]$

en effet f_i est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc continue sur $[0,T]$ et une densité uniforme est continue par morceaux sur $[0,T]$

Donc $\int_0^T f_i(t) g(t)\, dt$ est bien définie.

Donc $\mathbb{E}(Z_{i,T})$ existe

et $\mathbb{E}(Z_{i,T}) = \int_0^T f_i(t) g(t) dt = \int_0^T \frac{1}{T} f_i(t)\, dt$

$= \frac{1}{T}\int_0^T f_i(t)\, dt$

par définition de g car $\forall t \in [0,T],\ g(t) = \frac{1}{T}$

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{E}(Z_{i,T}) = \frac{1}{T}\int_0^T f_i(t)\, dt}$$

5. a) d'après 3. c)

$\forall t \geq 0, \ L'_t = L_t G$

ici comme $n = 2$ on a : Soit $t \geq 0$

$$\left(f_1'(t) \quad f_2'(t)\right) = \left(f_1(t) \quad f_2(t)\right) \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$$

$$= \left(-af_1(t) + bf_2(t) \quad af_1(t) - bf_2(t)\right)$$

Donc pour tout $t \geq 0$

$$\begin{cases} f_1'(t) = -a f_1(t) + b f_2(t) \\ f_2'(t) = a f_1(t) - b f_2(t) \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_1'(t) = -a f_1(t) + b f_2(t) \\ f_1'(t) + f_2'(t) = 0 \end{cases}$$

on remarque $f_1'(t) = -f_2'(t)$.

il est donc juste d'écrire $f_1(t) = -f_2(t) + b$ avec les opérations de primitives.

Donc pour tout $t \geq 0$

$$f_1'(t) = -a f_1(t) - b f_1(t) + b$$

Donc $\boxed{f_1'(t) + (a+b) f_1(t) = b}$

f_1 vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+$

$\boxed{y' + (a+b) y = b}$

5. b) on résout (E_1) : $f_1'(t) + (a+b)f_1(t) = b$

× on commence par résoudre l'homogène associée :

on note S_{H_1} l'ensemble des solutions :

$$S_{H_1} = \{ t \longmapsto \lambda \exp(-(a+b)t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

× Une solution particulière constante Soit $\mu \in \mathbb{R}$
on note $\Psi : u \longmapsto \mu$.

Ψ solution de (E_1) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \Psi'(t) + (a+b)\Psi(t) = b$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \; 0 + (a+b)\mu = b$

$\Leftrightarrow (a+b)\mu = b$

$\Leftrightarrow \mu = \frac{b}{a+b} = p.$

Donc

$$S_{E_1} = \{ t \longmapsto p + \lambda \exp(-(a+b)t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Précisons avec $f_1(0) = \alpha$.

D'où $p + \lambda \exp(0) = \alpha \Leftrightarrow \lambda = \alpha - p.$

on a donc : $\boxed{\forall t \geqslant 0, \; f_1(t) = p + (\alpha - p)e^{-(a+b)t}}$

comme $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_1(t) = -f_2(t) + b$

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \; f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t) \text{ où } q = 1 - p = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	**Nombre de pages :** 34
Session : 2023	
Épreuve de : Math 2 - ESSEC	

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5. c) /

5. d) $\boxed{e_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\,dt}$ mon abstie

6. a) $G + \frac{1}{6} I_3 = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

on remarque : $C_1 = C_2$.

$\boxed{\text{Donc } rg\left(G + \frac{1}{6} I_3\right) < 3}$

$\boxed{\text{Donc } \frac{1}{6} \text{ est valeur propre de } G}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

× $G + \frac{1}{10} I_3 = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

on remarque $C_1 + C_3 = 2C_2$

Donc $rg(G + \frac{1}{10} I_3) < 3$

Donc $\frac{1}{10}$ est valeur propre de G

× $G = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

On remarque $L_3 + L_2 = -L_1$

Donc $rg(G) < 3$

Donc 0 est valeur propre de G

6. b)

G admet 3 valeurs propres distinctes.

Donc <u>G diagonalisable</u>

il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale aux coefficients diagonaux qui sont les valeurs propres de G.

Tels que : $G = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$

<u>Donc on a bien $G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$</u>

6. c) ${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Donc ${}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ <u>car P inversible</u>

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} & 0 & -\frac{3}{6} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Donc on a bien :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

~~6.d) Soit $t \in \mathbb{R}$~~ $+$

$$\cancel{P} D P^{-1} C_T = \cancel{P} D \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\cancel{C_T}$$

$$\| $$

$$C'_T$$

$$\cancel{PD\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

~~Donc $\forall t \geq 0$, $y_1(t) =$~~

~~En fait, on multiplie $P^{-1} C_T$ par D pour obtenir C'_T~~

~~ce que l'on fait est on obtient :~~

$$\cancel{\begin{aligned} y_1'(t) &= 0 \\ y_2'(t) &= -\frac{1}{10} y_2(t) \\ y_3'(t) &= -\frac{1}{6} y_3(t) \end{aligned}}$$

Désolé c'est sale...

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 34 | Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths 2

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6. a) /

7. a) Soit $x > 0$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que k assez grand.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right) = \mathbb{P}([X_0 = i]) \times \mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_{\frac{1}{k}x} = i])$$

$$\times \dots \times \mathbb{P}_{[X_0=i]\cap\dots\cap[X_{\frac{k-1}{k}x}=i]}([X_{x} = i])$$

avec la propriété (H_2) on obtient bien :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right) = \mathbb{P}([X_0 = i]) \times \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{[X_{\frac{j}{k}x}=i]}([X_{\frac{j+1}{k}x} = i])$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'après (H5) comme $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$

on a

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{[X_{\frac{j}{k}x} = i]}([X_{\frac{j+1}{k}x} = i])$$

$$= \mathbb{P}([X_0 = i])\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

avec $\beta_i = -\alpha_{i,i}$

et la puissance k apparait avec le produit.

7. b) Soit $x \geq 0$

$$\mathbb{P}_{[X_0 = i]}(Y_i > x) = e^{-\beta_i x}$$

on reconnait la fonction de survie d'une loi exponentielle de paramètre β_i.

Donc la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0 = i]}$ est une loi exponentielle de paramètre β_i

7. c) Soit $x \geq 0$

La famille $([X_0 = i])_{i \in [\![1, n]\!]}$ forme un système complet d'événements

Par formules des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y > x]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k] \cap [Y > x])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \mathbb{P}_{[X_0 = k]}([Y > x])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x} \quad \text{d'après 7.b)}$$

Donc pour tout $x \geq 0$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y > x]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x}}$$

7.d) On note F_Y la fonction de répartition de Y.

$$F_Y : x \longmapsto 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x}$$

F_Y est :
- continue sur $\mathbb{R}$
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$\boxed{Y \text{ est donc bien une variable à densité}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \beta_k e^{-\beta_k x}$$

$$\boxed{f_Y : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \beta_k e^{-\beta_k x}}$$

7. a) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt$ converge absolument ce qui revient à démontrer sa convergence pour un calcul de moment.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt$$ est nulle en dehors de I

non aboutie

Partie II

8. a) Soit $s \geq 0$

$$L_0 M(s) = \left(f_1(0) \quad \dots \quad f_m(0) \right) M(s)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}([X_0=1]\cap[X_s=1]) \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}([X_0=m]\cap[X_s=m]) \right)$$

$$= \left(f_1(s) \quad \dots \quad f_m(s) \right)$$

D'où $\boxed{L_0 M(s) = L_s}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8. b) Soit $(j,k) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$

$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j])$

$\times$ si $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) \neq 0$

alors :

$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j])$ licite car

$= \mathbb{P}([X_r = i]) \times \mathbb{P}_{[X_r = i]}([X_{r+s} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}([X_{r+s+t} = j])$

$= \mathbb{P}([X_r = i]) \times m_{i,k}(s) \times \mathbb{P}_{[X_{r+s} = k]}([X_{r+s+t} = j])$

d'après (H2)

$= \mathbb{P}([X_r = i])\, m_{i,k}(s) \times m_{k,j}(t)$ par définition de M

$\times$ si $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = 0$

Donc $[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] = \emptyset$

D'où $[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j] = \emptyset$

Donc $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = 0$

or si $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = 0$ alors $m_{i,k}(s) = 0$

D'où

$\mathbb{P}([X_r = i])\, m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t) = \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j])$

$= 0$

Finalement :

Pour tous $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $s \geq 0$ $t \geq 0$
On a :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i])\, m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)}$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $s \geq 0$, $t \geq 0$.

$\cancel{\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j])}$

$\cancel{= \mathbb{P}([X_r = i]) \times \mathbb{P}_{[X_r = i]}([X_{r+s+t} = j])}$

Pour connaître la position à l'instant j, on aimerait connaître celle à l'instant précédent, l'instant k.
Ici on ne l'a pas.
Cette position peut donc varier de 1 à n.
Les valeurs de k varient donc de 1 à n.

On reprend donc l'égalité précédente en prenant en compte non pas un k fixé mais un k variant de 1 à n et prenant toutes ces valeurs.

D'où :

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)$$

8. c) Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$M(s+t) = \cancel{\forall}(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; m_{i,j}(s+t)$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$m_{i,j}(s+t) = \mathbb{P}_{[X_s = i]}([X_{\cancel{s}+t+s} = j])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t) \quad \text{d'après 8. b)}$$

on reconnait la formule du produit matriciel de la matrice $M(s)$ avec $M(t)$ au coefficient $\underline{i,j}$.

On obtient donc $\forall (t,s) \in (\mathbb{R}_+^2)$ $M(s+t) = M(s)\, M(t)$

8. d) Soit $k \in \mathbb{N}^+$
Soit $t \geqslant 0$.

$M(kt) = \forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \; m_{i,j}(kt)$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$m_{i,j}(kt) = \mathbb{P}_{[X_{\cancel{s}} = i]}([X_{kt+s} = j])$$

⋮

~~non aboutie~~

On reprend en page suivante

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	**Nombre de pages :** 34	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths 2

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$M(kt) = M\left(\sum_{i=1}^{k} t\right)$$

si on généralise la question précédente par récurrence immédiate on obtient :

$$M(kt) = M(t)M(t)\cdots M(t) = (M(t))^k$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \geq 0$

$$M(kt) = (M(t))^k$$

9. a)

```
def transition(t, G):
    I = eye(n)
    y = (I + t * (1/1000) * np.matrix(G)) ** 1000
    return y
```

9. b) def traceLoi2Xt(G, L0, tmax):
x = linspace(0, tmax, 1000)
y = L0 * transition(t, G):
plt.plot(x, y, "+")
z = L0
plt.plot(x, z, "x")

9. c) On remarque sur le graphe ~~une~~ convergence vers $\frac{1}{3}$ des valeurs de $\mathbb{P}([X_t = i])$

or d'après 6. e) $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \frac{1}{3}$

Donc c'est cohérent car ici t commence à être grand. On a même une convergence rapide qui provient de l'exponentielle

9. d) s = L_1([0])

while p > s

L_t = s

Partie III

10. a)

Démontrons par récurrence pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(i)$ où
$\mathcal{P}(i) : G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$

Initialisation

× D'une part :

× $(-\alpha-\beta)^{1-1} G = 1 \times G = G$

× $G^1 = G$

d'où $\mathcal{P}(1)$

Hérédité : Soit $i \in \mathbb{N}^*$, Supposons $\mathcal{P}(i)$ et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$ [i.e $G^{i+1} = (-\alpha-\beta)^i G$]

$G^{i+1} = G^i \times G = (-\alpha-\beta)^{i-1} G \times G$ par hypothèse de récurrence

$= (-\alpha-\beta)^{i-1} \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$

Calculons G^2

$$G^2 = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)^2 & \alpha(-\alpha-\beta) & \beta(-\alpha-\beta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-\alpha-\beta) G$$

Donc $G^{i+1} = (-\alpha-\beta)^{i-1}(-\alpha-\beta)G$

$= (-\alpha-\beta)^{i} G$

D'où $\mathcal{P}(i+1)$

Par principe de récurrence pour tout $i \in \mathbb{N}^*$
$G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$

10. b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ Soit $t \in \mathbb{R}$

I_3 et $\frac{t}{k}G$ commutent car I commute avec toute matrice de même ordre.

Par formule du binôme :

$$(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}G\right)^i I^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}G\right)^i$$

$$= I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} G$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$

$$(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 34	Session : 2023

Épreuve de : Maths-2

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10. c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^{i} (-\alpha-\beta)^{i-1}$$

$$= \frac{t}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^{i-1} (-\alpha-\beta)^{i-1}\right.$$

$$= \frac{t}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k} (-\alpha-\beta)\right)^{i-1} \right)$$

$$= \left(\frac{t}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i-1} \left(-\frac{t}{k} (\alpha+\beta)^{i-1} \right) \quad \dots \right)\right.$$

calcul non aboutit

(avec une formule du binôme on pourrait trouver :

$$= \frac{t}{k}\left(1 - \frac{t}{k}(\alpha+\beta)\right)^{k-1} = \frac{\frac{t}{k}\left(1-\frac{t}{k}(\alpha+\beta)\right)^{k}}{\frac{t}{k}\alpha+\beta} = \frac{1-\left(1-\left((\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k}\right)}{\alpha+\beta}$$)

⋮

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $t \geq 0$

$$\left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k = I_3 + \frac{1 - \left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta} G$$

$$\cancel{\lim_k} \quad \left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \exp\left(k \ln\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)\right)$$

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \exp(-(\alpha+\beta)t)$

par croissances comparées

D'où $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$

D'où $\forall t \geq 0$ $M(t) = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$ | d'après la partie 2

10. d) Soit $t \geq 0$

Calculons la première ~~colonne~~ colonne de $M(t)$ (on note $C_1|_{M(t)}$)

$$C_1|_{M(t)} = \begin{pmatrix} \exp(-(\alpha+\beta)t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

par calcul matriciel

d'après 10.c)

$\mathbb{P}([X_t = 1])$ est égale à la somme des coefficients de la colonne

D'où, Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}([X_t = 1]) = \exp(-(\alpha+\beta)t)$

De même avec les autres colonnes on obtient que

pour tout $t \geq 0$, $\underline{\mathbb{P}([X_t = 2]) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}$

$\underline{\mathbb{P}([X_t = 3]) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}$

en fait, $M(t) = \begin{pmatrix} \exp(-(\alpha+\beta)t) & \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t) & \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. a)

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 2A^2 + A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Donc le polynôme $U(X) = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A

11. b)

11. c) On dérive $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$

On obtient $k\left(1+\frac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = \varphi'(x)U(x) + U'(x)\varphi(x) + 2ax + b$

cette relation est vraie pour $x = 1$

D'où $k\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = \varphi'(1)U(1) + U'(1)\varphi(1) + 2a + b$

$U(1) = 0$
$U'(1) = 0$

D'où $\boxed{k\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a + b}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287
Nombre de pages : 34
Session : 2023

Épreuve de : Maths 2

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

- $\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k} + 1$

$= 2a + b - (a+b+c) + c$ d'après 11. b)

$= a$

$$\boxed{\text{Donc } a = \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k} + 1}$$

- $2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k} - \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$

$= 2(a+b+c) - 2a - b - 2c$ d'après 11. b)

$= b$

$$\boxed{\text{Donc } b = 2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k} - \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11. d) Soit $\varepsilon \geqslant 0$

Partie IV

12 . × si $i=1$: $\sum_{j=1}^{3}|a_{1,j}| = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$

× si $i=2$: $\sum_{j=1}^{3}|a_{2,j}| = 0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

× si $i=3$: $\sum_{j=1}^{3}|a_{3,j}| = \frac{4}{3}+\frac{2}{3} = 2$

donc $\max_{1\leq i\leq 3}\left(\sum_{j=1}^{3}|a_{i,j}|\right) = 2$

$\boxed{\text{D'où } \|A\| = 2}$

13. a) Comme $([X_t = k])_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événement.

alors $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X_t = k]) = 1$

$\boxed{\text{D'où } \|M(t)\| = 1}$

i iii

13. b) /

14. a)

$$\|A+B\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \right)$$

Par inégalité triangulaire :

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}|$$

D'où $\max\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) + \max\left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|\right) \geq \max\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}|\right)$

Ainsi $\|A\| + \|B\| \geq \|A+B\|$

On retrouve ici une nouvelle forme d'inégalité triangulaire.

14. b) $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$

$\|A\|$ est la valeur maximale de $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

or dans $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ il y a nécessairement cette valeur maximale et toutes les autres qui sont positives

On en déduit

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	**Nombre de pages :** 34	**Session :** 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

14. c)

$$\|AB\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{j,k} \right| \right)$$

non aboutie

14. d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A(A^k - B^k) + (A-B)B^k = A^{k+1} - AB^k + AB^k - B^{k+1}$$

$$= A^{k+1} - B^{k+1}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A-B)B^k}$$

14. e)

Démontrons par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$

où $\mathcal{P}(k)$: $\|A^k - B^k\| \leq k\, c^{k-1} \|A - B\|$

Initialisation

* $\|A - B\| = \|A - B\|$

* $1 \times c^0 \|A - B\| = \|A - B\|$

d'où $\mathcal{P}(1)$

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Supposons $\mathcal{P}(k)$ démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$\|A^{k+1} - B^{k+1}\| = \|A(A^k - B^k) + (A-B)B^k\|$$

$$\leq \|A(A^k - B^k)\| + \|(A-B)B^k\| \quad \text{d'après 14.a)}$$

$$\leq \|A\| \, \cancel{k}\, k\, c^{k-1} \|A - B\| + \|A - B\| \|B^k\|$$

par hypothèse de récurrence et d'après 14.c)

on pourrait obtenir en rappelant $c = \max(\|A\|, \|B\|)$

non aboutie