# Copie anonyme - n°anonymat :

A5-00007
Maths 2E

| Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023 |
|---|---|---|

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Partie 1 - Matrice génératrice et système différentiel associé.

1. D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événement $([X_t=i])_{i\in[\![1;n]\!]}$

$$\forall j\in\{1,\dots,n\},\ \forall (t,h)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ P(X_{t+h}=j)=\sum_{i=1}^{n}P([X_{t+h}=j]\cap[X_t=i]).$$

2. Pour $i\in\{1,\dots,n\}$, $t\in S_i$ et $h\in\mathbb{R}_+$,

On a $P(X_t=i)\neq 0$.

Donc, d'après la formule des probabilités conditionnelles avec le système complet d'événement $([X_{t+h}=j])_{j\in[\![1;n]\!]}$

$$\sum_{j=1}^{n}P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=j)=1$$

Or, pour $i=j$, $P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=i)\underset{h\to0}{=}1+\alpha_{ii}h+o(h)$.

et pour $i\neq j$, $P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=j)\underset{h\to0}{=}\alpha_{i,j}h+o(h)$.

Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{n}P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=j)=1$$

$\Leftrightarrow \quad 1 \underset{h \to 0}{=} 1 + \alpha_{ii} h + o(h) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_{ij} h + o(h)$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{1 \underset{h \to 0}{=} 1 + \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \right) h + o(h)}$

car $\quad n\, o(h) \underset{h \to 0}{=} o(h)$ ;

$\Leftrightarrow \quad - \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \right) h = o(h)$

Or $\quad \dfrac{o(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\Leftrightarrow$ Donc $\quad - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = o(1)$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 0}$ car $-o(1) = 0$.

3. a) On a $P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^{n} P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])$

et $P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]$

$= P(X_t = i)\ P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = i)$ d'après la formule des probabilités composées.

Pour $i = j$, d'après H 3, $P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = i) = 1 + \alpha_{ii} h + o(h)$

De même, d'après H4, pour $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$

$$P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^{n} P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_t = i) P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j)$$

$$= P(X_t = j) P_{[X_t = j]}[X_{t+h} = j] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} P(X_t = i) P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j)$$

Ainsi, par opération sur les limites,

$$P(X_{t+h} = j) \underset{h \to 0}{=} P(X_t = j)(1 + \alpha_{ii} h + o(h)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\alpha_{i,j} h + o(h)) P(X_t = i)$$

$$\Leftrightarrow \underline{P(X_{t+h} = j) = P(X_t = j) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} h + o(h)) P(X_t = i)}$$

b) On a $f_i : t \longmapsto P(X_t = i)$

d'où $f_j : t \longmapsto P(X_t = j)$

Pour $h > 0$,

$$P(X_{t+h} = j) - P(X_t = j) \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} h + o(h)) \times P(X_t = i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X_{t+h} = j) - P(X_t = j)}{h} \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + o(1)) P(X_t = i)$$

$$\Rightarrow \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + o(1)) f_i(t)$$

Or, $\forall t \geqslant 0$, $f_i(t)\, o(1) = o(1)$ car $f_i$ dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Donc

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h \to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, \alpha_{ij} + o(1)$$

On a $f_i$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$, or comme la définition de la dérivée en un point est la limite du taux d'accroissement en ce point,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad f_j'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, \alpha_{ij}$$

car $o(1) = 0$.

c) Pour $L_t = \begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \end{pmatrix}$

et $L_t' = \begin{pmatrix} f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \end{pmatrix}$

et $G$ matrice génératrice du processus.

# Copie anonyme - n°anonymat :

| | |
|---|---|
| Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023 |

Épreuve de : Mathématiques appliquées

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$f_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, \alpha_{ij}$$

Donc par produit matriciel d'une matrice ligne par une matrice carrée à droite,

$$L_t' = L_t\, G.$$

4. Soit $T > 0$, $U_T \hookrightarrow \mathcal{U}([0;T])$

Soit $Z_{i,T} = f_i(U_T)$

$E(Z_{i,T})$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\, g(t)\, dt$ converge absolument

d'après le théorème du transfert avec

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t \in [0;T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f_i g$ continue sur tout segment $[0;T]$ de $\mathbb{R}$ avec $T>0$ comme produit de fonction qui le saut et nulle pour $t \notin [0;T]$ telle que

$$\forall t \notin [0;T], \quad g(t) f_i(t) = 0$$

Aussi, $E(Z_{i;T})$ existe comme intégrale de fonction continue sur un segment et converge absolument.

D'après le théorème du transfert :

$$E(Z_{i;T}) = \int_0 f_i(t) g(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) \, dt.$$

$$= e_i(T)$$

5. $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ où $a$ et $b$ réels strictement positifs.

$p = \dfrac{b}{a+b}$, $q = 1 - p$ et $\alpha = f_1(0)$.

a) Comme $L_t' = L_t G$,

avec dans ce cas : $L_t = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}$

et $L_t' = \begin{pmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix}$

il vient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} f_1'(t) = -a f_1(t) + b f_2(t) \\ f_2'(t) = a f_1(t) - b f_2(t) \end{cases}$$

Or, $f_2(t) = 1 - f_1(t)$

Donc $f_2'(t) = -f_1'(t)$

et $L_t' = L_t\, b \iff \begin{cases} f_1'(t) = -(a+b) f_1(t) + b \\ -f_1'(t) = (a+b) f_1(t) - b \end{cases}$

$\iff f_1'(t) + (a+b) f_1(t) = b$

$\iff f_1$ vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+$, $\underline{g' + (a+b) g = b.}$

b) Toutes les solutions de cette équation sont sous la forme $t \longmapsto \lambda e^{-(a+b)t} + \dfrac{b}{a+b}$ avec $\lambda$ constante (non nulle pour $f_1$ car $f_1$ n'est pas la fonction nulle).

Or, on a $f_1(0) = \alpha$

Donc $-\lambda(a+b) + (a+b)\alpha = b$

$\iff \alpha - \lambda = p$

$\iff \lambda = \alpha - p$

donc, d'après le théorème de Cauchy Lipschitz, la solution est unique et, pour $\lambda = \alpha - p$

$$\boxed{f_1(t) = p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)}$$

et comme $\forall t \geqslant 0$, $f_2(t) = 1 - f_1(t)$,

$$f_2(t) = 1 - p - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$$
$$\boxed{= q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)}$$

c) On admet que $\forall t \geqslant 0$, $f_1(t) \in [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)]$

De plus, comme $(a+b) > 0$, $\Leftrightarrow \exp(-(a+b)t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Par opération sur les limites,

$$\lim_{t \to +\infty} f_1(t) = p.$$

d) $$e_1(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\,dt.$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T p\,dt + (\alpha - p)\int_0^T \exp(-(a+b)t)\,dt\right)$$

par linéarité de l'intégrale.

# Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= \frac{1}{T}\left( \left[ px \right]_0^T + (\alpha - p) \left[ \frac{\exp(-(a+b)t)}{-a+b} \right]_0^T \right)$$

$$= \frac{1}{T}\left( pT + (\alpha - p)\left( \frac{\exp(-(a+b)T)}{-a+b} + \frac{1}{a+b} \right)\right)$$

$$= p + (\alpha - p)\frac{\exp(-(a+b)T)}{-T(a+b)} + \frac{\alpha - p}{(a+b)T}$$

Par opération sur les limites,

$$\boxed{\lim_{T \to +\infty} e_1(T) = p.}$$

6. $n = 3$ et $G = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) $-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $rg(G) < 3$,

G est non-inversible et 0 valeur propre de G car sa première colonne combinaison linéaire des deux autres.

On remarque que $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(G) = E_0(G)$.

De plus,

$$G\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{-3}{30}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $-\frac{1}{10}$ valeur propre de $G$ car $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ non nul

et $G\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Enfin, $G\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{6}}(G)$ et

$-\frac{1}{6}$ valeur propre de $G$ car $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est non nul et

$$G\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

b) On a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in E_0(G)$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{10}}(G)$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{6}}(G)$.

$G$ est diagonalisable car $G$ possède 3 valeurs propres distinctes et est d'ordre 3.

Par concaténation de vecteurs propre associés à 3 valeurs propres distinctes,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une famille libre de 3 vecteurs

de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 3 donc une base

de vecteurs propre. Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

telle que $G = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}}$

c) ${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D'$$

Or $D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible telle que $D'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ainsi, $P^{-1}\,{}^tP^{-1} = D'^{-1}$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P^{-1} C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

On a $G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $C_t' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}$

et $G C_t = C_t'$ car $L_t G = L_t'$, $C_t$ est une matrice colonne transposée d'un matrice ligne.

Ainsi,

$$G C_t = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1} C_t$$

$$\Leftrightarrow \quad C_t' = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_t' = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 \\ -3 y_2(t) \\ -5 y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{10} y_2(t) \\ -\frac{1}{6} y_3(t) \end{pmatrix}$$

Il reste $P$ ~~dont~~ je ne sais que faire ;

On admet $\begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = -\frac{1}{10} y_2(t) \\ y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t) \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

e) pour l'équation différentielle $y_1'(t) = 0$,

l'ensemble des solution est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. On prend $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$\alpha = \frac{1}{6}\left(2\, y_1(0) + 2\, y_2(0) + 2 y_3(0)\right)$ afin de vérifier la condition initiale $C_0$.

De même, $y_2'(t) = -\frac{1}{10}\, y_2(t)$

$\iff$ $y_2(t) = \beta\, e^{-\frac{1}{10}t}$ avec $\beta$ 2 ème composante de $P^{-1}C_0$

et $y_3'(t) = -\frac{1}{6}\, y_3(t)$

$\iff$ $y_3(t) = \gamma\, e^{-\frac{1}{6}t}$ avec $\gamma$ 3 ème composante de $P^{-1}C_0$.

Enfin, ~~...~~, $C_t = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$

$\iff$ ~~$C_t = P\, C'_t$~~

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on admet que $\lim_{t \to +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$

7. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $p_i = -\alpha_{i,i}$.

Pour $x > 0$ et $k$ assez grand :

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right) \neq 0 \text{ et } P(Y_i > x) = \lim_{k \to +\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right)$$

a) D'après la formule des probabilités composées, comme $P(X_0 = i) \neq 0$, et comme pour $k$ assez grand,

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right) \neq 0 \text{ , on a :}$$

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right)$$

$$= P(X_0 = i)\, P_{[X_0 = i]}(X_{\frac{1}{k}x} = i)\, P_{[X_0 = i] \cap [X_{\frac{1}{k}x} = i]}(X_{\frac{k-2}{k}x} = i) \dots$$

Or, d'après H2, on a :

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k} [X_{\frac{j}{k}x} = i]\right) = P(X_0 = i) \bigcap_{j=0}^{k-1} P_{[X_{\frac{j}{k}x} = i]}(X_{\frac{j+1}{x}} = i)$$

Or, $\forall j \in \{0; \dots; k-1\}$,

$$P_{[X_{\frac{j}{k}x} = i]}\left(X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right)$$

$$= P_{[X_{\frac{j}{k}x} = i]}\left[X_{\frac{j}{k}x + \frac{1}{k}x} = i\right]$$

et comme $\frac{1}{k}x \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

D'après (H5), par opérations sur les limites,

$$P(X_0 = i)\prod_{j=0}^{k-1} P_{[X_{\frac{j}{k}x} = i]}\left(X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right)$$

$$\underset{k\to+\infty}{=} P(X_0 = i)\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

car $\beta_i = -\alpha_{ii}$.

b) D'après l'énoncé,

$$P(Y_i > x) = \lim_{k \to +\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)$$

$$\underset{k\to+\infty}{=} P(X_0 = i)\left(1 - \frac{\beta}{k}x + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

Ainsi, comme $P(X_0 = i)$, d'après la formule de Bayes,

$$P_{[X_0=i]}(Y_i > x) = P_{[Y_i > x]}(X_0 = i) \frac{P(Y_i > x)}{P(X_0 = i)}$$

$$= P_{[Y_i>x]}[X_0 = i] \left(1 - \frac{\beta_i}{h} x + o\left(\frac{1}{h}\right)\right)^h \text{ pour}$$

$h$ assez grand.

(Je n'aboutis pas cependant).

La loi de $Y_i$ pour la probabilité conditionnelle $P_{[X_0=i]}$ est une loi exponentielle de paramètre $\underline{\beta_i}$

c) $\forall x \geqslant 0$, $P(Y_i > x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) P_{[X_0=k]}(Y_i > x)$

d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X_0 = k])_{k \in [\![1;n]\!]}$.

$$\Leftrightarrow P(Y_i > x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}.$$

d) $\forall x \geqslant 0$, $P(Y_i \leqslant x) = 1 - P(Y_i > x)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}$$

La fonction de répartition de $Y_i$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

Par opération sur les limites, $\lim_{x \to +\infty} P(Y_i \leqslant x) = 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023 |
|---|---|---|

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $\lim_{x \to -\infty} P(Y \leq x) = 0$

car pour $P(X_0 = i) \neq 0$, $p_i \neq 0$ et $p_i > 0$ car

$p_i = -\alpha_{ii}$ avec $\alpha_{ii} < 0$.

Enfin, la fonction de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive en tout point de $\mathbb{R}$

Y est donc à densité et g sa densité :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 + \sum_{k=1}^{m} p_k \, P(X_0 = k) \, e^{-p_k x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

e) D'après le théorème du transfert, Y

On admet.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2 - Matrice de transition

8. a) $\forall s \geqslant 0$,

$$L_s = (f_1(s) \quad \dots \quad f_n(s))$$

$\Pi(s)$ étant la matrice d'élément générique $m_{i,j}(s)$

avec $m_{i,j}(s) = P_{[X_t = i]}(X_{t+s} = j)$.

avec $t = 0$ dans ce cas là,

On a $L_s = L_0 \, \Pi(s)$ pour $s \geqslant 0$.

b) D'abord, pour $r$ et $s$ négatifs, l'un, l'autre ou les deux, tels que $r+s < 0$ ou $r+s+t < 0$,

$$P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = 0$$

Ainsi, pour $r < r+s < r+s+t$ avec $s$ et $t$ positifs.

D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X_r = i \cap X_{r+s} = k \cap X_{r+s+t} = j)$$

$$= P(X_r = i)\, P_{[X_r = i]}(X_{r+s} = k)\, P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

$$= P(X_r = i)\, m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)$$

car $m_{i,k}(s) = P_{[X_r = i]}(X_{r+s} = k)$

et $m_{k,j}(t) = P_{[X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$

$$= P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

d'après H2.

On en déduit, d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\left([X_{r+s} = k]\right)_{k \in [\![1;n]\!]}$

$$\sum_{k=1}^{n} P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j])$$

$$= P([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = P(X_r = i) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t).$$

c) On reconnait dans

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)$$

la composante de coordonnée $i,j$ du produit matriciel $M(s)M(t)$, soit la $i$-ème ligne de $M(s)$ par la $j$-ème colonne de $M(t)$.

Ainsi, par calcul matriciel, comme on passe de $v$ à $v+\underline{\underline{s+t}}$, on a d'après ce qui précède que $M(s+t) = M(s)M(t)$ par produit matriciel.

d) Procédons par récurrence :

L'initialisation est immédiate, $M(1 \times t) = M(t)^1$

Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$M(kt) = M(t)^k$$

Ainsi,
$$M((k+1)t) = M(kt+t)$$
$$= M(t)^k M(t)$$
$$= M(t)^{k+1}$$

La propriété est héréditaire.

Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geq 0$, $M(kt) = M(t)^k$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$M(t) = \lim_{k \to +\infty} \left( I_n + \frac{t}{k} G \right)^k$$

9.
```
def transition (t, G) :
    A = np.eye(n)  + t /1000 * G .
    for i in range (1000) :
        A = np.dot( A, A)
    return A .
```

Remarque : Si n n'est pas indiqué :

```
def transition (t, G) :
    n = np.shape(G)[0]
    A = np.eye( n ) + t /1000 * G
    for i in range (1000) :
        A = np.dot (A, A)
    return A .
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) 
```
def traceLoi2Xt(G, L0, tmax):
        A = np.linspace(0, tmax, 1000); X=[ ]
        for i in range(n)
            X = np.dot(L0, transition(i, G))
            plt.plot(X, t)
        plt.show()
```

c) Le graphique est cohérent avec le résultat trouvé en 6. e)

car $\lim_{t \to +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$.

d)
```
def simulX(t, h, L0, G):
        Liste des T = [ ] ; Liste des X = [ ]
        Πt = transition(t, G) ; Lt = L0
        for i in range(h+1):
                liste des T.append(i*t)
                p = rd.random()
                s = Lt[0]
                j = 0
                while p > s:
                        j += 1
                        s += Lt(j)
                Lt = L0
                liste des X append(j+1)
        plt.plot(lis Des T, liste des X); plt.show().
```

Partie 4 - Diagonalisation de ($\star A$)

12. $\|A\| = \max\left(\frac{1}{3}\times(1+1+1) ; \frac{1}{3}\times(1+1) ; \frac{1}{3}(4+2)\right)$

$= \max\left(1 ; \frac{2}{3} ; 2\right)$

$\boxed{= 2}$

13. Soit $t \geq 0$

a) La somme d'une ligne d'une matrice de transition est toujours égale à 1

Donc pour $t \geq 0$, $\|\Pi(t)\| = 1$

b) On a :

$$1 \underset{h\to 0}{=} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) h + o(h)$$

Prendre h assez proche de 0 c'est prendre k assez grand.

De plus, $\sum_{j=1}^{n} P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j) = 1$.

(Je n'aboutis pas).

14. a)

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$\|A+B\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|\right)$$

Or, D'après l'inégalité triangulaire,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+|b_{ij}|$$

Ainsi $\|A+B\| \leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right)$

$$= \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)+\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right)$$

$$= \|A\| + \|B\|.$$

b) $\|A\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$

D'où $\|A\|$ est un terme de la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ de termes positifs.

Il vient donc que $\|A\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

c) $\|AB\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}\, b_{j,i}|\right)$

et $\|A\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ et $\|B\| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{j,i}|\right)$

# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

| Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023 |
|---|---|---|

**Épreuve de :** Mathématiques Appliquées.

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

On admet que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Par récurrence immédiate, comme celle faite en 8.d),

$\|A^n\| \leq \|A\|^n \Rightarrow \|A^n \times A\| \leq \|A\|^n \|A\|$ d'après ce qui précède

$$\Rightarrow \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}.$$

d) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$A(A^k - B^k) + (A-B)B^k$$

$$= A^{k+1} - \cancel{AB^k} + \cancel{AB^k} - B^{k+1}$$

$$= \boxed{A^{k+1} - B^{k+1}}$$

e) <u>Initialisation</u> :

Pour $k=1$, $\|A-B\| \leq 1 \times c^{1-1} \|A-B\|$

$$\leq \|A-B\|.$$

Initialisation.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Hérédité :

Si $||A^k - B^k|| \leq k\, c^{k-1} ||A - B||$

alors $||A^{k+1} - B^{k+1}||$

$= ||A(A^k - B^k) + (A-B)B^k||$ d'après 14. d)

$\leq ||A(A^k - B^k)|| + ||(A-B)B^k||$ d'après 14. a).

$\leq ||A|| \, ||A^k - B^k|| + ||A-B|| \, ||B^k||$ d'après 14. c)

$\leq ||A|| k\, c^{k-1} ||A-B|| + ||A-B|| k ||B||$ d'après H. R. et 14. c)

$\leq ||A-B|| \left( k\, c^{k-1} ||A|| + k\, ||B|| \right)$

Or $k\, c^{k-1} ||A|| + k\, ||B|| \leq k\, c^k + k\, c$

$\leq k+1\, c^k$

Donc $||A^{k+1} - B^{k+1}|| \leq (k+1) c^k ||A - B||$

La propriété est héréditaire.

15. a) On admet

b) $\left\| M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k \right\|$

$\leqslant k \max\left(\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\|, \left\|I_n + \frac{t}{k} G\right\|\right)^{k-1} \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)\right\|$

Or $\max\left(\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\|, \left\|I_n + \frac{t}{k} G\right\|\right) = 1$ d'après la question 13,

Donc $\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k\right\| \leqslant k \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)\right\|$

c) Comme $\left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)\right\| \underset{k \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$

alors $k \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)\right\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

D'après le théorème des gendarmes, par positivité.

$$\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k\right\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Autrement dit $\quad \Pi\left(\frac{t}{k}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k$

Or d'après 8.d)

$$\Pi\left(\frac{t}{k}\right)^k = \Pi\left(k \frac{t}{k}\right) = \Pi(t)$$

enfin, $\quad \Pi(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k .$