Copie anonyme - n°anonymat :

A5-00007 Maths E

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 29 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

Pour $x \in \left]0;+\infty\right[$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1. a) f définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) < 0$ car $-e^{-x} < 0$

et $\dfrac{x+1}{x^2} > 0$

Il vient que f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par opération sur les limites, on a directement :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
var f	$+\infty$	$\searrow$	0

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(n)$: " u_n défini et strictement positif " est vraie.

<u>Initialisation:</u> L'initialisation est immédiate

car u_0 défini égal à 1 donc strictement positif.

<u>Hérédité:</u> Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 0$$

Or, sous réserve d'existence, $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, f définie sur $]0;+\infty[$ à valeur dans $]0;+\infty[$ d'après ce qui précède.

Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et

$$u_n > 0 \implies f(u_n) = u_{n+1} > 0$$

La propriété est héréditaire.

<u>Conclusion:</u> Chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est défini et strictement positif.

2. Informatique.

a)
```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u =< a:
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

b) On a que $u_6 > 10^{**}(6)$ avec 6 premier entier pour lequel $u_n > 10^{**}(6)$ et $u_5 > 10^{**}(-6)$ avec 5 premier entier pour lequel $u_n > 10^{**}(-6)$
On déduit que $10^{**}(-6) < u_5 < 10^{**}(6) < u_6$.

Cependant, f étant décroissante, gardons nous de conclure quant à la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c)
```
def u(n):
    u = 1
    for i in range(1, n+1):
        u = exp(-u)/u
    return u
```

3. Pour $x \in [0;+\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$

a) g dérivable et continue sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonction qui le sont, telle que :

$\forall x \in [0;+\infty[$, $g'(x) = -e^{-x} - 2x$.

Or, $\forall x \in [0;+\infty[$, $-e^{-x} < 0$ et $-2x \leqslant 0$

Donc $\forall x \in [0;+\infty[$, $g'(x) < 0$

g est donc strictement décroissante et continue sur

$[0;+\infty[$. On a $g(0)=1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ par opération sur les limites.

D'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $g([0;+\infty[) =]-\infty;1]$ par décroissance de g.

b) Pour $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x$

$$\iff \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0$$

$$\iff e^{-x} - x^2 = 0$$

$$\iff g(x) = 0$$

Or, d'après ce qui précède, $\forall y \in]-\infty;1], \exists! \alpha \in [0;+\infty[, g(\alpha) = y$

et $0 \in]-1;1]$

Donc, il existe un unique $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que

$g(\alpha) = 0$ ou encore que $f(x) = x$ avec $x = \alpha$.

c) On f bijection décroissante de $]0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

Donc il existe f^{-1} la réciproque de f strictement décroissante aussi sur $]-\infty;1]$ dans $]0;+\infty[$

On a $f(1) = \frac{1}{e} < 1$

et $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{e-1}{e}} > \frac{1}{e}$ car $e \approx 2,7$.

Or, comme il existe un unique α tel que $f(\alpha) = \alpha$ et que f est strictement décroissante,

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 29 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

on a que $f(1) < f(\alpha) < f\left(\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e} < \alpha < 1$ par stricte décroissance de f^{-1}.

4. a) On a $u_0 = 1$

d'où $u_1 = \frac{1}{e}$

et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{e-1}{e}} > 1$ car $e \approx 2,7$

Aussi, $u_0 < u_2$.

b) Nous venons d'initialiser la récurrence qui cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $u_{2n+2} > u_{2n}$ " est vraie. Procédons à l'hérédité :

Si $u_{2n+2} > u_{2n}$

alors $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$ par stricte décroissance de f

soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$

Enfin, $u_{2n+3} < u_{2n+1}$

$\iff$ $u_{2n+4} > u_{2n+2}$ par décroissance de f.

La propriété est bien héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $u_{2n+2} > u_{2n}$ " est vrai et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

c) f étant décroissante et comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de sens de variation contraire ; on montre aisément comme ce qui précède que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0;+\infty\right[$ donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante minorée, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in \left]0;+\infty\right[$, $h(x) = f\circ f(x)$.

On pose $h(0) = 0$.

a) Soit $x \in \left]0;+\infty\right[$, h définie car f bijection décroissante de $\left]0;+\infty\right[$ dans $\left]0;+\infty\right[$.

Dès lors,

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h(x) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}}$$

$$= \frac{x}{e^{-x}} \times e^{-\frac{e^{-x}}{x}}$$

$$= x \times e^{\frac{x^2 - e^{-x}}{x}}$$

$$= x \times e^{-\frac{(e^{-x} - x^2)}{x}}$$

b) h continue sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonction qui le sont sur $]0;+\infty[$.

Un problème de continuité peut surgir en 0 car il y a un x au dénominateur dans la composée par l'exponentielle.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - x^2}{x} = +\infty$ par opération sur des limites.

D'où $e^{-\left(\frac{e^{-x} - x^2}{x}\right)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Enfin, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ par opération sur les limites.

Il vient que h continue sur $[0;+\infty[$.

c) On a donc que $h(0) = 0$ d'après ce qui précède.

Or, pour $x \in]0; +\infty[$,

$$h(x) = x$$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) = x$$

$\Leftrightarrow f(x) = x$ en composant par f

$\Leftrightarrow x = \alpha$ d'après 3b.

Ainsi, $h(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α.

d) On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \alpha$ car $u_1 > \alpha$, (u_{2n+1}) décroissante minorée, et α solution de $h(x) = x$

6. Supposons M majorante de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < M$.

$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante,

pour $n = \lceil M \rceil \in \mathbb{N}$, on a

$u_{2\lceil M \rceil} \geqslant M$ ce qui est absurde.

Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante non majorée donc divergente et n'admettant pas de limite finie.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 29 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2 :

Deux systèmes différentiels.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de A :

1. a) On a $A - 2\,Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est

de rang 1 car toute les colonnes sont non-nulles et les mêmes.

b) $rg(A - 2\,Id) < 3$ donc $A - 2\,Id$ non inversible $\Longleftrightarrow$ 2 valeur propre de A

et $\dim(E_2) = 3 - rg(A - 2\,Id) = 2$ d'après le théorème du rang car $E_2 = \ker(A - 2\,Id)$

c) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$x + y + z = 0 \iff -x - y = z$

Il vient donc que $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non colinéaires de $E_2(A)$ de dimension 2 donc base de $E_2(A)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) A ne peut avoir encore que 1 seule valeur propre car la dimension du sous espace associé est déjà de 2 et que la dimension du possible autre espace propre ne peut donc excéder 1.

2. a) Les coordonnées du vecteur colonne MU représentent la somme des coefficients de chaque ligne de M

b) On remarque que

$$AU = 5U \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ainsi, 5 est la valeur propre restante avec E_5 le sous-espace propre associé à A de dimension au plus 1 d'après ce qui précède.

U est donc une base du sous espace propre associé car $U \in E_5$ et, $U \neq 0$ et $\dim(E_5) = 0$.

3. Il vient donc que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage P de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ à la nouvelle base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ qui est une base de

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par concaténation de vecteurs propres distincts associés à des sous espace propres distincts

$$\text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Partie IV - Un système différentiel</u>

Soit (S)
$$\begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}$$

4. On reconnaît $X' = AX$ avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a que A diagonalisable, alors, l'ensemble des solutions, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des constantes réelles, sont les est le suivant :

$$\begin{cases} x : t \longmapsto 2\lambda_1 e^{-t} + 5\lambda_3 e^{-t} \\ y : t \longmapsto 2\lambda_2 e^{-t} + 5\lambda_3 e^{-t} \\ z : t \longmapsto 2\lambda_1 e^{t} + 2\lambda_2 e^{t} + 5\lambda_3 e^{-t}. \end{cases}$$

5. a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe unique solution $X_0 : t \longmapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) On cherche λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$\begin{cases} x_0(0) = 1 \\ y_0(0) = -1 \\ z_0(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = -1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{5} \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 : t \longmapsto 2e^{-t} - e^{-t} \\ y_0 : t \longmapsto -e^{-t} \\ z_0 : t \longmapsto 2e^{t} - e^{-t} \end{cases}$$

<u>Partie III : Un second système différentiel.</u>

Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. Les valeurs propres de B sont racines du polynôme $P : x \longmapsto (-1-x)(3-x)+4$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or $P(x) = (x-1)^2$

Donc $P(x) = 0 \iff x = 1$

Ainsi, 1 est valeur propre de B et unique valeur propre de B.

7. B n'est pas diagonalisable car si elle l'était, n'ayant qu'une valeur propre, 1, elle devrait être égale à la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui n'est pas le cas.

8. Soit f endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B matrice de f dans $\mathbb{R}^2$.

a) Soit λ_1 et λ_2 deux scalaires.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \iff \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (v_1, v_2) famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}_2$ de dimension 2.

(v_1, v_2) base de $\mathbb{R}_2$.

b) On a $f(v_1) = (2, -1) = v_1$

et $f(v_2) = (1, -1)$

$= (2, -1) + (-1, 0)$

$= v_2 + v_1)$

Dès lors, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de f dans β.

c) Pour $Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

On a bien $Q\,T\,Q^{-1} = B$.

On a trouvé Q en posant une matrice inversible $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

et en résolvant le système $\begin{cases} Q\,T\,Q^{-1} = B \\ Q\,Q^{-1} = I \end{cases}$

9. De la même manière que dans la partie II,

avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

on a $(S) \iff X' = BX$.

Je ne sais néanmoins pas résoudre le système lorsque T triangulaire supérieure.

Exercice 3:

L'entropie en probabilité.

Partie I - Préliminaire.

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie

par $h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) h continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonction qui le sont.

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$

On prolonge donc h par continuité en 0.

Enfin, h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions qui le sont, telle que :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \ln(x) + 1$$

Or, $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = +\infty$ par opération sur les limites.

Autrement dit, non, h n'est pas dérivable en 0.

c) Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x\ln(x) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Ainsi, les antécédents de 0 par h sont 0 et 1.

2. Pour $x \in [0;1]$, g dérivable sur $]0;1]$, comme somme de fonctions qui le sont telle que :

$$\forall x \in]0;1], \; g'(x) = -h'(x) + h'(1-x)$$

$$= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1$$

$$= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 29 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Or, pour $x \in]0;1]$, $\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) < 0$

$\iff \frac{1-x}{x} < 1$ car e^x réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\iff 1 - x < x$ car $x \in]0;1]$

$\iff \frac{1}{2} < x$.

Ainsi, on a le tableau de variation suivant :

	0		$1/2$		1
sgn $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Var g	0	$\nearrow$	$g(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

Partie II - Des variables aléatoires discrètes.

L'entropie de X est $H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X=x))$

En particulier, lorsque X à valeurs dans

$\{x_1;\dots;x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie $H(X)$ existe toujours et

vaut :
$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où , pour $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i = P(X=x_i)$

3. Pour $U \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$,

$\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(U=k) = \frac{1}{n}$ et $H(U)$ existe

d'après l'énoncé car U à valeurs dans un

ensemble fini.

Il vient, $H(U) = -\sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= -n\, h\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -n \times \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln(n).$$

4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On a $H(X)$ définie telle que

$$H(X) = -\left(h(p) + h(1-p) \right)$$
$$= - h(p) - h(1-p)$$

Or $p \in]0;1[$ donc $H(X) = g(p)$.

Ainsi, comme,

$\forall x \in]0;1[$, $g(x) \leqslant \ln(2)$ d'après I.2.,

et comme $p \in]0;1[$,

il vient : $H(X) \leqslant \ln(2)$

De plus, $H(X) = \ln(2)$ ssi $p = \frac{1}{2}$ car

seul $\frac{1}{2}$ est antécédent par g de $\ln(2)$ d'après I.2.

5. Soient X_1 et X_2 indépendantes suivant une

loi de Bernoulli de paramètre p_1 et p_2 respectivement.

On définit Z tel que :

- $Z(\Omega) = \{0;1\}$
- $[Z=1]$ réalisé ssi « $X_1 + X_2$ est impair »

a) Les valeurs prises par $X_1 + X_2$ sont 0, 1 et

2 car X_1 et X_2 suivent une loi de Bernoulli.

b) « X_1+X_2 est impair » est réalisé

ssi $[X_1+X_2=1]$ est réalisé d'après les valeurs que prend X_1+X_2

Ainsi,

$$p = P(Z=1) = P(X_1+X_2=1)$$

$$= P([X_1=1]\cap[X_2=0]\cup[X_1=0]\cap[X_2=1])$$

$$= P(X_1=1)P(X_2=0)+P(X_1=0)\,P(X_2=1)$$ par

incompatibilité des évènements et indépendance de X_1 et X_2

$$= p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$$

c) D'autre part :

$$1-2p = 1-2p_1(1-p_2)-2p_2(1-p_1)$$

$$= 1-2p_1+2p_1p_2-2p_2+2p_1p_2$$

$$= 1-2p_1-2p_2+4p_1p_2$$

et $(1-2p_1)(1-2p_2) = 1-2p_2-2p_1+4p_1p_2 = 1-2p$

D'où $1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

6. a) $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

Dès lors, par stabilité de la loi binomiale,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

~~b) L'initialisation a été faite en 5.c) car pour $p_1 = p_2 = p$,~~ (on doit changer de notation car $p = P(Z=1)$ dans question 5)

~~On a $1 - 2P(Z=1) = (1-2p)^2$~~

b) L'initialisation est vérifiée ; en effet :

Pour $n=1$, $Z_1 = X_1$

d'où $1 - 2P(Z_1 = 1) = 1 - 2P(X_1 = 1)$
$= (1-2p)^1$

Hérédité :

Supposons que jusqu'à un n fixé,

$$1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n$$

$$\iff P(Z_n = 1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$$

Or, $P(Z_{n+1} = 1) = P([Z_n = 1] \cap [X_{n+1} = 0] \cup [Z_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1])$

$$= (1-p)\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right) + p\left(\frac{1+(1-2p)^n}{2}\right)$$

par incompatibilité et indépendance d'après le lemme des coalitions

$$= \frac{1}{2}\left(1-(1-2p)^n - p + p(1-2p)^n + p + p(1-2p)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-(1-2p)^n + 2p(1-2p)^n\right)$$

Or, $1 - 2P(Z_{n+1} = 1) = 1 - 1 + (1-2p)^n - 2p(1-2p)^n$

$$= (1-2p)^n(1-2p)$$

$$= (1-2p)^{n+1}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n.$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z_n = 1) = \frac{1 - (1-2p)^n}{2}.$$

et $$P(Z_n = 0) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

Ainsi $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)$

avec $\frac{1-(1-2p)^n}{2} \in]0;1[$.

D'après 4_0, $M(Z_n) \leq \ln(2)$

et il y a égalité ssi

$$\frac{1-(1-2p)^n}{2} = \frac{1}{2}$$

$\iff \quad 1 - (1-2p)^n = 1$

$\iff \quad (1-2p)^n = 0$

$\iff \quad p = \frac{1}{2}.$

Partie III : Des variables à densité.

On a $M(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\, dt$ sous réserve d'existence.

7. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$

on a f_U la densité de U telle que :

$$f_U : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a<b,\ \dfrac{1}{b-a} > 0.$

Autrement dit, $h \circ f_U$ continue par composition, h étant continue sur $\mathbb{R}$,

De plus, $-\int_{-\infty}^{a} h \circ f_U(t)\, dt = -\int_{b}^{+\infty} h \circ f_U(t)\, dt = 0$

car $\forall t \notin [a;b],\ f_U(t) = 0$

et $h(0) = 0$

Enfin, $h \circ f_U$ étant continue sur $[a;b]$,

$-\int_{a}^{b} h \circ f_U(t)\, dt$ converge absolument et U admet donc une entropie.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	**Nombre de pages :** 29	**Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) On a donc

$$H(U) = -\int_a^b h \circ f(t)\,dt$$

$$= -\int_a^b h\left(\frac{1}{b-a}\right)dt$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)\right]_a^b$$

$$= \ln(b-a).$$

8. Pour f densité de $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a tout d'abord X qui admet une espérance $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Or, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Dès lors, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge et est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

b) On rappelle que pour f densité de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$,

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{0} h \circ f(t)\,dt = 0 \quad \text{car} \quad h(0) = 0.$$

D'autre part, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h \circ f(t) = \lambda e^{-\lambda x} \times \ln(\lambda e^{-\lambda x})$
$= -\lambda^2 x e^{-\lambda x} + \lambda e^{-\lambda x} \ln(\lambda)$

~~Sous AC EUL~~

Or $-\int_0^{+\infty} -\lambda^2 x e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$
$= 1$

et $-\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \ln(\lambda)\,dx = -\ln(\lambda)$ $\left(= -\ln(\lambda) \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \right)$ ^{1}

Ainsi, par linéarité des intégrales convergentes.

$$H(X) = 1 - \ln(\lambda).$$

9. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

a) Par définition, $E(X) = m$

et $V(X) = \sigma^2$.

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X^2) = V(X) + E(X)^2$$

Or, $E(X^2)$ existe car $V(X)$ existe avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = E(X^2) = m^2 + \sigma^2$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) > 0$ et continue ! avec $\phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Ainsi, $h \circ \phi$ définie telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h \circ \phi(t) = \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

$$+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

Or, $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$

$= -\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\sqrt{\sigma^2 2\pi}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\ln(\sigma^2 2\pi) \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

D'où $-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \dfrac{1}{2}\ln(\sigma^2 2\pi)\, e^{-\left(\frac{x-m^2}{2\sigma^2}\right)} dt = \dfrac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

D'autre part,

$-\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \times \dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$

$= -\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{1}{2\sigma^2} \times \Big(x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - 2mx\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
$+ m^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \Big)$

On montre que :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{1}{2\sigma^2} \times x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = -\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(m^2+\sigma^2\right)$

d'après ce qui précède

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{2\sigma^2} \times x\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{2\sigma^2}\left(2m^2\right)$

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -\dfrac{m^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{2\sigma^2} \times e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{-m^2}{2\sigma^2}$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

Enfin, par linéarité des intégrales convergentes, on obtient que :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

Et enfin, par linéarité,

$$H(X) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$$

$$= \frac{1+\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$$

FIN