Copie anonyme - n°anonymat :

Maths E

G7-00085

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EM LYON

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$

On a donc $f'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2}$

$$= \boxed{\dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}}$$

Or $f'(x) \geq 0 \iff \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} > 0 \iff -(x+1) > 0$ car $x^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$

$\iff x+1 < 0$

$\iff x < -1$

d'où : ~~x | 0 | $+\infty$; $+$~~

x	0		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

~~Or e^{-x}~~

avec $\frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par opérations

et $\cancel{\frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{}}$ $f(x)$ $\frac{e^{-x}}{x} \sim \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

1)b) Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " u_n est bien défini et $u_n>0$ "

I : on a $u_0 = 1 > 0$ donc u_0 existe et $u_0>0$

H : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

~~D'une part~~, u_n existe et $u_n>0$ par $\mathcal{P}(n)$

Or f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $f(u_n)$ existe (puisque $u_n>0$)

donc u_{n+1} existe

de plus $u_n>0$ et ~~f~~ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f(x)>0$ (d'après le tableau de variations de f.

donc ~~$f(n$~~ $f(u_n)>0$

donc $u_{n+1}>0$

donc $P(n+1)$ est vraie :

$\underline{C}$: Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$

2)a)
```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp.
    u=1
    n=0
    while u =< a :
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

2)b) Cela signifie que ~~k~~ $u_n > 10^6 \Leftrightarrow n \geq 6$

et $u_n < 10^{-6} \Leftrightarrow n \leq 5$

2)c)
```
def suite_u(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u = np.exp(-u)/u
    return u
```

3)a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

g est dérivable comme somme de fonctions dérivables

on a alors $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ car $x > 0$

donc $\boxed{g \text{ est } \cancel{\text{dé}} \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

On a

x	0	$+\infty$
Variations de g	1 ↘	$-\infty$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ par somme

et $g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$

~~d'où~~ or g est continue et strictement décroissante, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[\; = \;]-\infty, 1]$ d'après le tableau de variations de g.

3)b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

On a $f(x) = x \iff \dfrac{e^{-x}}{x} = x$

$\iff e^{-x} = x^2$ car ~~$x \to 0$~~ $x \neq 0$

$\iff g(x) = 0$

Or g possède exactement une racine (d'après 3)a)) donc

l'équation $f(x) = x$ admet une seule et unique solution (on la note α)

Copie anonyme - n°anonymat :

G100085
900274

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EM LYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3)c) Soit $n \in \mathbb{R}^{+*}$,

g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Or $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e^2} \sim 2,7^{-\frac{1}{2,7}} - \frac{1}{(2,7)^2} > 0$ (admis)

$g(\alpha) = 0$ par définition

et $g(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{\overbrace{1-e}^{<0}}{e}$ car $e \sim 2,7$

donc $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1)$

or g est ~~de~~ bijective et décroissante. Alors

$1 \cancel{< \alpha <}$ $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$

4)a) On a $\cancel{2}$ $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0))$

Or $f(u_0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ ~~donc~~ et $f\left(\frac{1}{e}\right) = e \times e^{-\frac{1}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $e^{\frac{e-1}{e}} \approx 2{,}7^{\frac{1{,}7}{2{,}7}} < (2{,}7)^0 = 1$

j'admets.

~~4)a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ ".~~

~~I : On a $u_0 < u_2$ donc $P(0)$ est vraie.~~

~~H : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$:~~

~~On a~~

~~$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) = f(f(u_{2n+2}))$$~~

4)b)

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On a $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$

Or f est décroissante, donc $f \circ f$ est croissante (par composée de deux fonctions décroissantes)

donc $u_{2n+2} > u_{2n}$

donc (u_{2n}) est croissante.

4) c)

5) a) Soit $x > 0$,

On a $h(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \dfrac{\dfrac{\exp\left(-\frac{\exp(-x)}{x}\right)}{\exp(-x)}}{x}$

$= \dfrac{x\exp(-\exp(-x)/x)}{\exp(-x)}$

5) b) Soit $x \geq 0$.

Sur $]0,+\infty[$, h est continue comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

au voisinage de 0^+:

On a

$$h(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x\exp(-\exp(-x)/x)}{1} \quad \text{car} \quad e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ donc $\frac{-e^{-x}}{x} = -\infty$

et donc par composition :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \exp(-\exp(-x)/x) = 0}$$

et donc par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0 \times 0 = 0}$$

donc h est continue en 0 par valeurs positives.

donc h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

5)c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

~~On a~~

Si $x = 0$,

on a $h(0) = 0$

Si $x \neq 0$,

On a $h(x) = x \iff f \circ f(x) = x$

$\iff x = \alpha$ car f est strictement croissante (~~par bijection de~~ par composition de deux fonctions décroissantes) et ~~so~~ continue sur ~~x~~ $\mathbb{R}^{+*}$, donc l'unique solution ne peut que être α

On a alors 0 et α comme antécédents de 0 par f

5)d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$ (*)

(u_{2n+1}) converge (d'après 4)c)) vers un réel l qui vérifie

(**) $l = f \circ f(l)$ ~~d'après~~ par le théorème du point fixe (et d'après (*))

Or, d'après 5)c) l'unique l qui vérifie (**) est $l = \alpha$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

GT00085

1780096

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'où : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \alpha}$

Exercice 2 :

1)a) On a $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 1 (car toutes les colonnes sont identiques)

et car $rg(A-2I) = \dim \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

$= \dim \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ car vecteurs identiques

$= 1$ car ~~une~~ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est une base de $Im(A)$

1)b) Soit f un endomorphisme tel que $A - 2I = Mat(f, B_c)$ où B_c est la base canonique.

On a par le théorème du rang :

~~rg~~ $\dim \mathbb{R}^3 = \underbrace{rg(A-2I)}_{=1} + \dim Ker(A-2I)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $3 = \cancel{2}\, 1 + \underbrace{\dim \ker(A - 2I)}_{\dim E_2(A)}$

$\boxed{\text{donc } \dim \cancel{\ker}\, E_2(A) = 2}$

1)c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \cancel{\mathbb{R}^3}\, M_{3,1}(\mathbb{R})$

$X \in E_2(A) \iff \{ x = -y - z$

donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{F} \right)$

or la famille F est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires et génératrice car $\dim E_2(A) = 2$ et par définition du vect.

$\boxed{\text{donc } F \text{ est une base de } E_2}$

~~1)b)~~
1)c) Elle ne peut en avoir qu'une seule autre ~~fait~~ (au maximum) car on doit avoir $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A) = 3$ et $\dim E_2(A) = 2$

2)a)

~~C'est la som~~ TU donne un vecteur colonne qui ~~donne~~ la somme des lignes de T.

2)b)

On remarque que $TU = 5U$

or $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc 5 est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~est un vecteur~~ engendre $E_5(A)$ (car $\dim E_5(A) = 1$)

$$\boxed{\text{d'où } E_5(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

3)a)

En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ~~inversible car~~ on concatène des vecteurs ~~qui forment une base~~ de sous espaces propres. Elles forment une base donc P est inversible

et en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 5 \end{pmatrix}$ diagonale

$$\boxed{\text{on a } A = PDP^{-1}}$$

Partie II:

~~4)~~

4) Soit $t \in \mathbb{R}$

On a $(S) \begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{X'} = A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$ par identification

or $A = PDP^{-1}$

donc $(S) \iff X' = PDP^{-1}X$

$\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$ $\quad$ P inversible

On note $Y = P^{-1}X$ donc $Y' = P^{-1}X'$ par la formule de dérivation

donc $(S) \iff Y' = DY$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 5y_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{2t} \\ y_2(t) = k_2 e^{2t} \\ y_3(t) = k_3 e^{5t} \end{cases}$ avec $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$

Or $Y = P^{-1}X$ donc $X = PY$

G100085 4700906

Emplacement QR Code

Code épreuve : 294
Nombre de pages : 31
Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques appliquées emlyon

donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} -k_1 e^{2t} - k_2 e^{2t} + k_3 e^{5t} \\ k_1 e^{2t} \qquad k_3 e^{5t} \\ \cancel{k_0}\, k_2 \quad k_2 e^{2t} + k_3 e^{5t} \end{pmatrix} \text{ avec } (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$$

5)a)
~~3a~~ (P) est le problème de Cauchy.
~~5)a)~~

5)b)
On a $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 - k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_3 = -1 \\ k_2 \cancel{0} = -k_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 + 2k_3 = 1 \\ k_1 + k_3 = -1 \\ k_2 = -k_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ 3k_3 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

d'où l'unique solution qui vérifie $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est

$$\boxed{X_0(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Partie III :

6) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -(1+\lambda) & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow -(1+\lambda)(3-\lambda) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -(3 - \lambda + 3\lambda - \lambda^2) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$

$\boxed{\text{donc } Sp(B) = \{1\}}$

7) B n'admet qu'une seule valeur propre. Supposons par l'absurde qu'elle est diagonalisable.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

G1-60085
4760906

Emplacement QR Code

Code épreuve : 294	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Alors il existe P inversible ~~tell~~ et D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$

or $D = 1I$ car 1 est l'unique valeur propre.

donc $B = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ ce qui est absurde

donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

8)a)

v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{B}$ est une famille libre.

et $\mathcal{B}$ contient deux vecteurs, donc elle est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

8)b) On a $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

et $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1\times\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d'où :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8) c)

~~On~~ En posant $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$, donc inversible.

~~et~~ on a par la formule du changement de base :

$$\boxed{B = QTQ^{-1}}$$

9) Soit $t \in \mathbb{R}$

On a $(S) \Leftrightarrow X' = BX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

où x, y, z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

on a alors $X' = QTQ^{-1}X \underset{Q \text{ inversible}}{\Leftrightarrow} Q^{-1}X' = TQ^{-1}X$

$\Leftrightarrow Y' = TY$ où $Y = Q^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

donc

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2(t) = k_2 e^t \end{cases} \quad \text{avec } k_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = k_1 e^t + k_2 e^t \\ y_2(t) = k_2 e^t \end{cases} \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

~~on a~~ Or $X = QY$

donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_2 e^t \\ k_2 e^t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2k_1 e^t + 2k_2 e^t - k_2 e^t \\ -k_1 e^t \cancel{0} - k_2 e^t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 e^t + 2k_2 e^t \\ -k_1 e^t - k_2 e^t \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 :

Partie I :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

h_a est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions continues

en 0^+, on a

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{u \to +\infty} \frac{-\ln(u)}{u} \quad \text{avec } x = \frac{1}{u}$$

$$= 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

$$= h(0)$$

donc h est continue en 0.

donc h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

1) b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

On a $\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{x \ln(x)}{x} = \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

donc h n'est pas dérivable en 0.

1/c) Soit $x \in [0,1]$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

G1-00085 1470086

Code épreuve : 294	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1)c) ~~Soit $x \in [0,1]$~~ On a déjà $h(0)=0$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

On a $h(x)=0 \iff x\ln(x)=0$

$\iff x=1$ car $\ln(1)=0$

vérifions qu'il n'y en a pas d'autres :

On a $h'(x)=\ln(x)+1>0$ (h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$)

$\iff$ ~~$f(x$~~ $\ln(x)>-1$

$\iff x>e^{-1}$

donc

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Variation de h	0	$\searrow$	$h(e^{-1})=\frac{-1}{e}<0$	$\nearrow$	$+\infty$

h est prolongeable par continuité

donc par le théorème de la bijection, ~~il y~~ appliqué à l'intervalle $[0,e^{-1}]$ et $[e^{-1},+\infty[$, on a exactement deux solutions à $h(x)=0$, qui sont 0 et 1

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) Soit $0 \leq x \leq 1$

sur $[0,1]$, h est négative :

x	0		1
variations de h	0 ↘	$-\frac{1}{e}$	↗ 0

Par ailleurs, g est dérivable comme somme de fonctions dérivables ~~en~~ sur $]0,1[$.

On a alors

$$g'(x) = -h'(x) + h'(1-x)$$

$$= -(\ln(x)+1) + \ln(1-x)+1$$

$$= \ln(1-x) - \ln(x)$$

$$= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

donc $g'(x) \geq 0 \iff \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \geq 0$

$\iff \frac{1-x}{x} \geq 1$

$\iff 1-x \geq x \qquad x > 0$

$\iff x \leq \frac{1}{2}$

et pour $x=0$, $g(x) = -h(0) - h(1) = 0$

donc

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe $g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
Variation de g	0	$\nearrow$	$-2h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$	$\searrow$	0

Partie II :

3) $U \sim \mathcal{U}[\![1, n]\!]$

donc $H(U)$ existe (car le support de U est fini)

On a
$$\boxed{\begin{aligned} H(U) &= -\sum_{i=1}^{n} h(P(X=i)) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \times n = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n) \end{aligned}}$$

4) On a
$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=0}^{1} h(P(X=i)) \\ &= -(h(1-p) + h(p)) = g(p) \end{aligned}$$

Or le ~~maximu~~ le maximum de g est en $\frac{1}{2}$ et vaut
$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= \cancel{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= -2h\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -2 \times \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$H(X) = g(p) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \ln(2)$$

et on a ~~pien~~ bien l'égalité avec $p = \frac{1}{2}$
car $g(p) = g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

5) a)

On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$

donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ car $X_1 = 0$ et $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 = 0$
$X_1 = 1$ et $X_2 = 1 \Rightarrow X_1 + X_2 = 1$
$X_1 = 0$ et $X_2 = 1 \Rightarrow X_1 + X_2 = 1$
$X_1 = 1$ et $X_2 = 1 \Rightarrow X_1 + X_2 = 2$

5) b)

On a $p = P(Z = 1) = P(X_1 + X_2 \text{ est impair})$

$= P(X_1 + X_2 = 1)$ car $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$= P\left((X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup ((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)\right)$

$= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ par incompatibilité

$= P(X_1 = 0) P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ par indépendance de X_1 et X_2

$p = (1 - p_1) p_2 + p_1 (1 - p_2)$

Copie anonyme - n°anonymat :

G7_00085
9002711

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 31 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques EMLYON Appliqués

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

S_n est la somme des X_k (~~de~~ variables de bernoulli de paramètre p) indépendantes

donc $\boxed{S_n \sim \mathcal{B}(n, p)}$

6) b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " $1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n$ ".

I : Si $n = 1$

On a $1 - 2P(Z_1 = 1) = 1 - 2P(\text{"}S_1 \text{ est impair"})$

$= 1 - 2P(\text{"}X_1 \text{ est impair"})$

$= 1 - 2P(\text{"}X_1 = 1\text{"}) = 1 - 2p = (1-2p)^1$

donc ~~$\mathcal{P}(0)$ est~~ $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) c)

On a $H(Z_n) = -\sum_{i=0}^{1} h(P(Z_n = i))$

$= -\left(h(P(Z_n=0)) + h(P(Z_n=1))\right)$

$= -\left(h\left(\frac{1+(1-2p)^n}{2}\right) + h\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)\right)$

$= g\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)$

Or on remarque que $\frac{1+(1-2p)^n}{2} = 1 - \left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)$

et g atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ (avec $g(\frac{1}{2}) = h(2)$

alors $\boxed{H(Z_n) \leq \cancel{h(2)}\, g\left(\frac{1}{2}\right) = h(2)}$

On a égalité si et seulement si

$\frac{1-(1-2p)^n}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (1-2p)^n = 0$

$\Leftrightarrow (1-2p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

Partie $\underline{III}$: Des variables à densité.

7) a)

On a $f_U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où f_U est la densité de U

si on appelle support de U l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > 0\}$

alors

f est strictement positive uniquement sur $[a, b]$ donc le support de U est fini. $\boxed{\text{Donc } U \text{ admet une entropie}}$

7) b)

On a $\underline{H(U)} = -\cancel{\sum_{k=1}} - \int_a^b \ln\left(\dfrac{1}{b-a}\right) dx$

$$= -\int_a^b \frac{1}{b-a} \times \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{b-a}\right) = \underline{\ln(b-a)}$$

8) a)

X admet une espérance, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge (et vaut $\frac{1}{\lambda}$)

$$\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

car f est nulle sur $\mathbb{R}^-$

8)b)

X admet une entropie si et seulement si $\cancel{X}-\int_0^{+\infty} h(\lambda e^{-\lambda t})dt$ converge

Soit $A>0$,

$-\int_0^A \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda e^{-\lambda t})\, dt$ on reconnaît l'espérance (à λ près) de $\mathcal{E}(\lambda)$ qui vaut $\lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$

$$= -\left(\underbrace{\int_0^A \lambda \ln(\lambda) e^{-\lambda t}\, dt}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} \ln(\lambda)} + \int_0^A -\lambda^2 t e^{-\lambda t}\, dt\right) \longrightarrow \lambda \times \frac{1}{\lambda}$$

$= \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ln(\lambda)$ car on reconnaît une densité de $\mathcal{E}(\lambda)$

d'où : X admet une entropie différentielle et vaut

$$\boxed{1 - \ln(\lambda)}$$

9)a) On a $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

donc d'après la formule de Koenig Huygens, $\underline{E(X^2)} = \int_{\mathbb{R}} t^2 \varphi(t)\,dt$

$= V(X) + E(X)^2$

$= \underline{\sigma^2 + m^2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EMLYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9)b) De façon analogue, ~~il suffit de m~~ X admet un moment d'ordre 2 (qui vaut $m^2+\sigma^2$) ce qui suffit pour montrer que X admet une entropie.

On a $H(X) = -\int_{\mathbb{R}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) dt$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) dt$$

par le théorème de transfert

$$= -\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt}_{= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)} + \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt}^{E((X-m)^2)/2\sigma^2}\right)$$

car on reconnaît la densité de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

alors on a $H(X) = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \frac{E((X-m)^2)}{2\sigma^2}$

en distribuant le $\ominus$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or d'après la formule de Koenig Huygens :

$$E((X-m)^2) = \underbrace{V(X)}_{=\sigma^2} + \underbrace{E(X-m)^2}_{=0 \text{ car } \cancel{\text{cest}} \text{ c'est la variable centrée}}$$

$$= \sigma^2$$

d'où : $H(X) = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \frac{V(X)}{2\sigma^2}$

$$= \ln\left((2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\cancel{\sigma^2}}{2\cancel{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2}$$

d'où : $\boxed{H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}}$

Partie II :

5)c) On a $1 - 2p = 1 - 2(p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1))$

$$= 1 - 2(p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1))$$

$$= 1 - 2p_1 + 4p_1p_2 - 2p_2$$

Or on a $(1-2p_1)(1-2p_2) = 1 - 2p_2 - 2p_1 + 4p_1p_2$

d'où :

$$1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$$

~~De~~ Exercice 1 :

4)c) (u_{2n}) est croissante. Autrement dit, la suite des pairs est croissante.

Donc la suite des impairs (u_{2n+1}) est décroissante.

Or (u_{2n+1}) est minorée par 0. Donc par le théorème limite monotone, (u_{2n+1}) converge.

6) On a $u_0 = 1$

Or supposons que u_n converge vers ℓ.

alors $\ell = \alpha$ (d'après 3)b)) où $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

or u_n est croissante donc elle ne peut converger vers α.

donc (u_n) n'est pas majorée et diverge.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751