Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 247

Nombre de pages : 28

Session : 2023

E9-00059

Maths S

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :

1) Puisque $c > 2$,

- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1

Montrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Puisque f est nulle sur $]-\infty ; 1[$, il suffit de s'intéresser à l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Or, f est continue à droite en 1 donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^{c+1}}$ admet une seule impropreté (en $+\infty$)

~~(1) les fonctions~~

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^{c+1}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann (à une constante c près) à borne infinie avec $c+1 > 1$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^{c+1}}$ (cf intégrande nulle en dehors de $[1;+\infty[$)

$$= \lim_{A \to +\infty} c \left[\frac{1}{c x^c} \right]_1^A$$

$$= 0 - 1 = 1$$

Bilan f peut être considérée comme une densité

2)

X admet une variance $\Leftrightarrow$ X admet un moment d'ordre 2

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument

cf intégrande nulle en dehors de $[1;+\infty[$. $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} x^2 \frac{c}{x^{c+1}} dx$ converge (~~absolument~~)

intégrande positive

En tant qu'intégrale de Riemann (à une constante c près) à borne infinie et avec $c+1-2 > 1$,

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^{c+1-2}}$ converge.

Bilan X admet une variance, donc une espérance.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{c\,dx}{x^c} \overset{\text{linéarité}}{=} c\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^c}$$

$$= c \times \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A$$

$$= 0 - c \times \frac{1}{-c+1}$$

$$\underline{\mathbb{E}(X) = \frac{c}{c-1}}$$

linéarité et intégrande nulle sur $]-\infty ; 1[$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = c \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{c-1}}$$

$$= c \times \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{x^{-c+2}}{-c+2} \right]_1^A$$

$$= 0 - c \times \frac{1}{-(c-2)} = \frac{c}{c-2}$$

Ainsi, par König-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= \frac{c(c-1)^2 - (c-2)c^2}{(c-1)^2(c-2)}$$

$$\underline{\mathbb{V}(X) = \frac{c}{(c-1)^2(c-2)}}$$

3 - $X(\Omega) \subset [1 ; +\infty[$ presque sûrement donc $\forall x < 1, F(x) = 0$

Soit $x \in [1 ; +\infty[$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_1^x c \frac{dt}{t^{c+1}}$$

$$F(x) = c\left[\frac{t^{-c}}{-c}\right]_1^x = -\frac{1}{x^c} + 1$$

Bilan $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

4- a) $X(\Omega) \subset [1;+\infty[$ d'où $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

Ainsi, $\forall x < 0,\ G(x) = 0$

Soit $x \geq 0$,

stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}_+$

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x)$$

$$= F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-cx}$$

d'où $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4- b) On en déduit, d'après la répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre c,

que $G \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

4- c)

```
def simulX(c)
    Y= rd.exponential(1/c)  # Python prend l'espérance
    return np.exp(X).                comme paramètre
```

Partie II

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 247	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5-
```
def simulZ(c):
    X_1 = simulX(c)
    X_2 = simulX(c)
    return X_1 * X_2
```

6- Par indépendance de X_1 et de X_2,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2) = \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\,\mathbb{E}(X_2^2) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2$$

Ainsi, par König-Huygens,

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 =$$

Conclusion : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7 - a)

$cY_1(\Omega) = cY_2(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Par transfert affine de densité, en notant $f_{Y_1'}$ une densité de cY_1, et f_{Y_1} une densité de Y_1,

$$f_{Y_1'}(x) = \frac{1}{c} f_{Y_1}\left(\frac{x}{c}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$
$$= \frac{1}{c} \times c\, e^{-\frac{x}{c}c} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$
$$= e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Ainsi, $cY_1 \hookrightarrow \gamma(1)$ et il en va de même pour $cY_2 \hookrightarrow \gamma(1)$

7 - b) Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, par coalition cY_1 et cY_2 sont indépendantes

d'où, par stabilité de la loi gamma par somme indépendante,

$$cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2).$$

8 - a)

$(Y_1+Y_2)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ d'où $\forall x < 0,\ H(x) = 0$

Soit $x \geqslant 0$,

$H(x) = P(Y_1 + Y_2 \le x)$

$= P(c(Y_1 + Y_2) \le cx)$ $\quad (c > 0)$

$= K(cx)$ car $cY_1 + cY_2 = c(Y_1 + Y_2)$

$=$

$= \int_{-\infty}^{cx} f_U(t)\,dt$ où f_U est une densité de $cY_1 + cY_2$ (il s'agit d'un t)

$= \int_0^{cx} \frac{t}{\Gamma(2)} e^{-t}\,dt$

$= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{cx} t e^{-t}\,dt$ fonction de

$= \int_0^{cx} \frac{d}{dt}(-e^{-t})\, t\,dt$

$H(x) = K(cx)$

La fonction K est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc par dérivation licite,

$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \underbrace{c\,k(cx)}_{= c \times cx\, e^{-cx}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ avec k une densité de $cY_1 + cY_2$

Bilan

$h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ convient comme une densité de $Y_1 + Y_2$

8-b) $Z(\Omega) \subset [1;+\infty[$ d'où $\forall x<1$, $F_Z(x)=0$

Soit $x \geq 1$, stricte croissance de ln sur $[1;+\infty[$

$$F_Z(x) = P(X_1X_2 \leq x) \overset{\uparrow}{=} P(\ln(X_1)+\ln(X_2) \leq \ln(x))$$

$$= P(Y_1+Y_2 \leq \ln(x))$$

$$= H(\ln(x))$$

Bilan $F_Z : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x<1 \\ H(\ln(x)) \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$, $F_Z \in C$

Par composition associée au diagramme ;

$$[1;+\infty[\xrightarrow{C^1} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{C^1} [0,1]$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$
$$u \longmapsto H(u)$$

que F_Z est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ainsi, par dérivation licite,

$$F_Z' : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x<1 \\ \underbrace{\frac{1}{x} h(\ln(x))} \text{ si } x>1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} c^2 \ln(x) \underbrace{e^{-c\ln(x)}}_{\frac{1}{x^c}} = \frac{c^2}{x^{c+1}} \ln(x)$$

Bilan $f_Z : x \longmapsto \begin{cases} c^2 \frac{\ln(x)}{x^{c+1}} \text{ si } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } x<1 \end{cases}$

convient comme une densité de Z

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9. a) Soit $\alpha > 1$

(1) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$

sont continues et positives sur $[1 ; +\infty[$

(2) ~~$\ln(x) x^\alpha \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée~~

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$$

(3) L'intégrale de Riemann à borne infinie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

converge car $\alpha > 1$

Ainsi, d'après les critères de comparaison pour les intégrales à fonctions positives,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \text{ converge}$$

Soit $A > 1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha}dx = \int_1^A \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\ln(x)\,dx$$ fonctions de classe C^1 sur le segment $[1,A]$

intégration par parties

$$= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\ln(x)\right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\frac{1}{x}dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\alpha-1}\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \quad (*)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge donc par passage à la limite

limite $A \to +\infty$ dans $(*)$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1} * \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

9-b)

Exercice 1

1) D'après la formule du rang,

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - rg(f)$, $(n = \dim(\mathbb{R}^n))$

$= n - rg(M)$

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$

Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) > 0$, $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit à 0

d'où $0 \in Sp(f)$ où $Sp(f)$ est le spectre de f.

2-a) Puisque M est de rang 1,

les colonnes de M sont colinéaires à la première, i.e. C

Ainsi, il existe $L = (l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$.

2-b) $Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} M[k,k] = \sum_{k=1}^{n} CL[k,k] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C[i,k]\, L[k,i]$

$= \sum_{1 \leq k,j \leq n} C[i,k]\, L[k,i]$ Fubini

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L[i,k]\, C[k,i]$ Fubini

$Tr(M) = LC$

2-c)

$\Pi^2 = (CL)\Pi =$

$Tr(\Pi)\Pi = LC\Pi$

3- $\Pi(CL) = \Pi^2 = Tr(\Pi)\Pi = Tr(\Pi)CL$

Or $CL \neq 0$ car $rg(\Pi) = 1$

Ainsi CL est vecteur propre de Π associé à la valeur propre $Tr(\Pi)$.

4- $\Pi^2 = Tr(\Pi)\Pi$ d'où $\Pi^2 - Tr(\Pi)\Pi = 0$

Ainsi, $P = X^2 - Tr(\Pi)X$ est un polynôme annulateur de Π

Les valeurs propres de Π sont parmi les racines de P, c'est-à-dire 0 et $Tr(\Pi)$

Or, on a supposé que $Tr(\Pi) = 0$

donc Π admet une seule valeur propre, 0

0 est bien valeur propre grâce à 1

d'où $\sum_{\lambda \in Sp(\Pi)} \dim E_\lambda(f) = n-1 \neq n$ (1)

Π n'est pas diagonalisable

5- Si $Tr(\Pi) \neq 0$ alors on a que

$Sp(\Pi) = \{Tr(\Pi); 0\}$

et $\dim E_{Tr(\Pi)} \geq 1$ ($Tr(\Pi)$ est valeur propre)

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'où $\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim E_\lambda(M) \geq n-1+1 \geq n$

Mais, puisque $\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim E_\lambda(M) \leq n$

on a finalement que $\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim E_\lambda(M) = n$

dans M, donc f est diagonalisable.

Partie II

6-a) $AX = B \iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = x \\ ax + y + \frac{1}{c}z = y \\ bx + cz + z = z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \frac{y}{a} = -\frac{z}{b} \\ ax = -\frac{z}{c} \\ bx = -cz \end{cases}$

Si par l'absurde $ac \neq b$, alors

Supposons par l'absurde que $ac \neq b$, alors

$$AX=0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ 0 + 0 + \frac{1}{c}z - \frac{a}{b}z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ 0\ cy - \frac{b}{a}y + 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ \frac{z}{c} = \frac{a}{b}z \\ cy = \frac{b}{a}y \end{cases}$$

Or $ac \neq b$ d'où ce système n'admet pas de solution

avec $X \neq 0$

Mais A n'est pas inversible d'où $\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ $AX = 0X$

C'est donc que l'hypothèse $ac \neq b$ est absurde

Bilan $ac = b$.

6-b)

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que colonne 1 = a colonne 2

colonne 1 = ac colonne 3

Conclusion (puisque $(a,b,c) \neq (0,0,0)$)

$rg(A) = 1$.

7-a) Puisque $Tr(A) = 3 \neq 0$, d'après la partie 1,

A est diagonalisable et $Sp(A) = \{\underbrace{Tr(A)}_{=3}, 0\}$

Conclusion g est diagonalisable et $Sp(g) = \{0, 3\}$

7-b) , d'après 7-a),

il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ ensemble des matrices inversibles de taille 3×3, tel que

$$A = P \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi, $\forall n \geq 1$,

$$A^n = P\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&3 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&3 \end{pmatrix}\cdots P\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&3^n \end{pmatrix}P^{-1} = 3^{n-1} P\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&3 \end{pmatrix}P^{-1} = 3^{n-1}A$$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n \in Vect(A)$.

Exercice 3

1-a) $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ car on peut attendre $n \in \mathbb{N}^*$ lancers avant d'obtenir un pile

$\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$P(X=k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap F_k \cap P_{k+1})$

Ainsi, d'après la formule des probabilités composées,

$P(X=k) = P(F_1)\, P_{F_1}(F_2) \cdots P_{F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k}(P_{k+1})$

Or, $\forall i \in [\![1, k]\!]$,

$P_{F_1 \cap \dots \cap F_i}(F_{i+1})$ = probabilité de tombeer sur face lors du lancer d'une pièce
$= q$.

En effet, dans ce calcul de probabilité, tout se passe comme si, on avait obtenu i fois face, et que l'on s'apprêtait à obtenir à nouveau face au $i+1$ ème lancer

De même, $P_{F_1 \cap \dots \cap F_k}(P_{k+1}) = p$.

Conclusion : $P(X=k) = q^k p$, et ce qq soit $k \in \mathbb{N}^*$

1-6) On remarque que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$P(X=k) = q^{k-1} pq = P(V=k) \times q$, où $V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

Ainsi, par linéarité, X admet une espérance et une variance

et $\mathbb{E}(X) = q\, \mathbb{E}(V) = \dfrac{q}{p}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $\mathbb{V}(X) = q^2\, \mathbb{V}(V) = q^2 \times \frac{q}{p} = \frac{q^3}{p}$

2- a) Soit $k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0,1,2\}$

$3P(Q=k) + P(R=i) = P(X=3k+i)$

~~d'où~~ $\cancel{(Q=k) = (X = \frac{3k+i}{3}}$

$\cancel{(Q=k) = (X = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor)}$

~~2-b) Soit~~ $\cancel{k \in \mathbb{N}}$,

$\cancel{P(Q=k) = P(X = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor)}$

$\cancel{= P(X}$

$(Q=k) = (X=3k) \cup (X=3k+1) \cup (X=3k+2)$

d'où $P(Q=k) = \sum_{i=0}^{2} P(X=3k+i)$ (union disjointe)

$= q^{3k}p + q^{3k+1}p + q^{3k+2}p = pq^{3k}\left(1+(1-p)+(1-p)^2\right)$

$Q \hookrightarrow BN(1-q^3)$.

3- $P(R=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=3k)$ (la série en jeu converge car X est une variable aléatoire)

$= p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{3k}$

$= p \sum_{k=1}^{+\infty} (q^3)^k$

$= p \frac{q^3}{1-q^3}$ ~~erreur~~

$P(R=0) = \frac{1}{q+q^2+q^2}$ car $1-q^3 =$ } erreur

$P(R=1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=3k) = pq \sum_{k=1}^{+\infty} (q^3)^k = q\, P(R=0) = \frac{q}{1+q+q^2}$

$P(R=2) = pq^2\, P(R=0) = \frac{q^2}{1+q+q^2}$

4- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{0,1,2\}$,

$$P((Q=k)\cap(R=i)) = P(X=3k+i) = pq^{3k+i}$$

$$P(Q=k)P(R=i) = (1-q^3)q^{3k} \times \frac{q^i}{1+q+q^2} = pq^{3k+i}$$

Ainsi, Q et R sont indépendantes

5- a) Car $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) = pq^k = pq^{k-1}q = pq^{k-1}(1-p)$$

$$= pq^{k-1} - p^2q^{k-1}$$

5-b) Q = simulX(1-(1-p)**3)

R =

Problème

1- Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{(2k+n)\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\underbrace{\cos(\pi)}_{=1} - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

h est n périodique, et à chaque élément de $\mathbb{Z}$, elle renvoit un élément dans $\mathbb{R}$

Bilan $h \in F_n$.

2-

(1) $F_n \subset E$ par construction

(2) l'application $\begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ k \mapsto 0 \end{array}$ est bien un élément de F_n

(3) Soient $(h, \ell) \in F_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda h + \ell)(k+n) = \lambda h(k+n) + \ell(k+n) = \lambda h(k) + \ell(k) \in \mathbb{R}.$$

car h et ℓ sont n périodiques,

Ainsi $\lambda h + \ell \in F_n$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 247	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Bilan F_n est un sous-espace vectoriel de E.

3- Soit $f \in F_n$,

$$f(k) = f(nq + r)$$
$$= f(nq - \underbrace{n - n - \cdots - n}_{q \text{ fois}} + r) \quad (f \text{ est } n\text{-périodique})$$

$$f(k) = f(r)$$

4- a) Soit $f \in F_n$ et $k \in \mathbb{Z}$

$f(k) = f(r)$, avec $r \in I_n$

Or $\forall i \in I_n$, $e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d'où $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(r) = f(r) = f(k)$.

Bilan $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k) = f(k)$.

4-b) D'après la question précédente, la famille

$(e_0, \dots, e_{n-1})$ est génératrice de F_n

Mq $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est libre. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$,

tel que $\forall i \in I_n$ $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \underbrace{e_k(i)}_{=0 \text{ si } k \neq i} = 0$ $=$ d'où $\lambda_i = 0$ et ce qq soit $i \in I_n$

$(e_0, \dots, e_{n-1})$ est libre

Bilan B_n est une base de F_n.

c) Les coordonnées de f un élément quelconque de F_n dans B_n sont les images par f de chaque élément de I_n.

5-a)

(0) Soient $(f, g) \in F_n^2$, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k)$

est finie donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est "bien definie"

(1- symétrie) Soient $(f, g) \in F_n^2$

$\langle f | g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) f(k)$ (commutativité du produit)

$= \langle g | f \rangle$ Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique.

(2-bilinéarité) Soient $(f,g,h) \in F_n^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$<\lambda f+g | h> = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f+g)(k)\, h(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(k)+g(k))\, h(k) \quad \text{(distributivité)}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k)h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k)h(k) \quad \text{(linéarité)}$$

$$= \lambda <f|h> + <g|h>$$

Ainsi, $<\cdot|\cdot>$ est linéaire à gauche donc par symétrie, $<\cdot|\cdot>$ est bilinéaire

(3 - caractère positif) Soit $f \in F_n$ quelconque

$$<f|f> = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(f(k))^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{par positivité de la somme.}$$

$<\cdot|\cdot>$ a le caractère positif.

(4- caractère défini) soit $f \in F_n$ tel que $<f|f>=0$

on a donc $\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(f(k))^2}_{\geq 0} = 0$

Or, une somme de termes positif est nulle si chaque terme est nul d'où, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, ~~$(f(i))=0$~~

$$(f(i))^2 = 0$$

Or, d'après la question 4, $\forall i \in I_n,\ f(i)=0 \Rightarrow f=0$

Ainsi, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ a le caractère défini

Bilan $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

5-b) Soient $(i,j) \in I_n^2$,

$$\langle e_i | e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{e_i(k)}_{=0 \text{ si } i \neq k} \overbrace{e_j(k)}^{=0 \text{ si } j \neq k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bilan B_n est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$

5-c) En sommant dans l'égalité admise,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(ak+b)\, 2\sin\left(\frac{b}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

d'où $$\sum_{k=0}^{n-1} 2\cos(ak+b)\sin\left(\frac{b}{2}\right) \overset{\text{somme télescopique}}{=} \sin\left(a + \frac{(2(n-1)+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2 \cdot 0 - 1)b}{2}\right)$$

$$= \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)$$

Bilan par linéarité de la somme, avec $\frac{b}{2} \in \left]0, \pi\right[$ (*)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos(ak+b) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)}{2}b\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}}$$

(*) donc $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

d) D'après la question précédente, avec

0 en lieu et place de a

$\frac{4\pi}{n}$ en lieu et place de b, $\frac{4\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ car $n \geqslant 3$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\left(\frac{2n-1}{2}\right) \times \frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(4\pi - \frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$ sin est pi-périodique

$= 0$ (admis, j'ai fait une erreur).

et pour $\frac{4\pi}{n}$ en lieu et place de b

$\frac{2\pi}{n}$ en lieu et place de a

on a $$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\left(\frac{4k+2}{n}\right)\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{(2n-1)}{2} \times \frac{4\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Bilan $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0$

5-e)

$$\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (h(k))^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(2\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) - 1\right)^2$$

$$= n-1$$ (je ne suis pas sûr de cela)

Bilan $\|h\| = \sqrt{n-1}$

6-a) Soit $f \in F_n$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$D_f(k+n) = f(k+1+n) - f(k+n) \overset{f \in F_n}{=} f(k+1) - f(k) = D_f(k)$$

Ainsi $\forall f \in F_n$, $D_f \in F_n$.

6-b) D'après 6-a), $\forall f \in F_n$, $D(f) \in F_n$.

Soient $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n^2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$D(\lambda f + g)(k) = (\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k)$$

$$= \lambda f(k+1) + g(k+1) - \lambda f(k) - g(k)$$

$D(\lambda f+g)(k) = \lambda(f(k+1)-f(k)) + (g(k+1)-g(k))$

donc D est linéaire

Bilan D est un endomorphisme de F_n.

6-c) Soit $h \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
Dh(k) &= h(k+1)-h(k) \\
&= \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-1\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

non abouti

7- a) Soient $(f,g) \in F_n^2$,

$$
\begin{aligned}
\langle f \mid \Delta g\rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,\Delta g(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\left(g(k+1)-2g(k)+g(k-1)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=1}^{n} f(k-1)g(k)
\end{aligned}
$$

Je manque de temps, mais mon idée est de faire 2 sommes télescopiques

~~7-b)~~

8-a) ~~Soit $f \in F_n$~~ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\Delta(e_0)(k) = e_0(k+1) - 2e_0(k) + e_0(k-1)$

$= 1 - 2 + 1 = 0$

Ainsi, $e_0 \in \operatorname{Ker}(\Delta)$

10-b) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A$

Ainsi, $P = X^2 + 3X$ est un polynôme annulateur de A

Les valeurs propres de A sont parmi les racines de P i.e. 0 et -3

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

donc $0 \in Sp(A)$ et $rg(A) = 2$

et, puisque A est symétrique, A est diagonalisable

donc, on a grâce à la trace de A que $Sp(A) = \{0, -3\}$