Copie anonyme - n°anonymat :

E9-00059 Maths S

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1- a) $X(\Omega) \subset]0,1[$ et une densité de X est donnée par $f : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur le segment $[0,1]$

Ainsi, X admet des moments à tout ordre

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$

$= \int_0^1 x^n dx$ (cf densité nulle en dehors de $[0,1]$

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{n+1}$$

1- b) Une densité de X est donnée par $g : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, en se référant à l'intégrale convergente définissant

$\Gamma(n+1)$, on a par changement de variable affine $u = \lambda x$

$du = \lambda dx$ licite que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x^n e^{-\lambda x} dx$

a même nature et même valeur éventuelle que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^n e^{-u} du$ qui converge ($\Gamma(n+1)$

à une constante $\frac{1}{\lambda^n}$ près)

Ainsi, X admet des moments à tout ordre

et $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}(X^n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-u} du$

$$= \frac{1}{\lambda^n} \Gamma(n+1)$$

Bilan $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n}$

Partie II

2-

$$H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}$$

3- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$${}^tW H_n W = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} u_0 & \cdots & u_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & \cdots & u_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

d'où ~~${}^tW H_n W = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \sum$~~

$${}^tW H_n W = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_{1+j-2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_{n+j-2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2} \right)$$

D'après l'énoncé, cette matrice est un réel donc

$${}^tW H_n W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}$$

La fonction $x \mapsto (P(x))^2 f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx$ admet une unique impropreté en $+\infty$. Mais puisque f admet des moments à tout ordre, on a par linéarité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx$ converge.

Or $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1}\right)^2 f(x)dx$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{j-1} f(x)dx$$

linéarité de l'intégrale

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x)dx$$

Or, comme f est une densité adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$,

$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k f(x)dx = v_k$

Ainsi on a finalement que

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j v_{i+j-2} = {}^tW H_n W$$

Bilan ${}^tW H_n W = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx$.

4- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, commençons par remarquer que H_n est symétrique, donc d'après le théorème spectral H_n est diagonalisable. Soit $\lambda \in Sp(H_n)$ et $W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé,

$H_n W = \lambda W$ d'où ${}^tW H_n W = \lambda W^2$

ie $\lambda W^2 = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx$

Or, f est à densité d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$

et un carré est toujours positif

Ainsi, par positivité de l'intégrale,

$\lambda W^2 \geq 0$ Or $W^2 > 0$ car W est un vecteur propre, donc $\lambda \geq 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

et ce qq soit $\lambda \in Sp(H_n)$

Bilan Toutes les valeurs propres de H_n sont positives.

5- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

on a de même $${}^tW G_n W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j v_{i+j-1}$$

et en posant $P(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

on a $$x(P(x))^2 = x\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{j-1}$$
$$= x \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-1}$$

d'où $${}^tW G_n W = \int_0^{+\infty} x(P(x))^2 f(x)dx$$

On a toujours $\ast$ f est positive sur $\mathbb{R}_+$
$\ast$ $x \mapsto (P(x))^2$ est positive sur $\mathbb{R}_+$

mais, de plus, $\forall x \geq 0$, $x \mapsto x$ est positive, Ainsi, de la même manière qu'en question 4, en exhibant pour chaque valeur propre de G_n (licite car G_n est symétrique) un vecteur propre associé

que $\forall n \geq 1$, les valeurs propres de G_n sont positives.

6- On a $G_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & u_3 \end{pmatrix}$

Si par l'absurde $u_3 < \frac{2}{9}$ alors, en notant $W = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

on aurait $^tW G_2 W = \sum_{i=1}^{2} x_i \sum_{j=1}^{2} x_j u_{i+j-1}$

$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i x_j u_{i+j-1}$

$= x_1 x_2 \times \frac{1}{2} + 2x_1 x_2 \frac{1}{3} + x_2 x_2 u_3$

$< \cancel{\frac{x_1 x_2}{2}} + \frac{2x_1 x_2}{3}$

7- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$

7-b)

(1) Les suites $\left((u_n)^{-\frac{\theta}{n}}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$? sont positives

(2)

(3) La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car

8-
```
import numpy as np.
import numpy.linalg as al.
def test.stieltjes(U):
    N = len(U) - 1
    m = 1 + N//2
    H = np.zeros ((m,m))
    for n in range (1,m+1):
        for i inrange ( 0 , m+1 ):
            H[i, n-1] = U[i+n-1]
            H[n-1, i] = U[i+n-1]   #H est symétrique
        valp = ag. eigvalsh (H)

        for k in range(0, m ):
            if Valp[k]<0 :
                return 0
        return 1 .
```

9-

(1) Les fonctions $t \mapsto |t^n e^{-t} \sin(t)|$; $t \mapsto |t^n e^{-t} \cos(t)|$

et $t \mapsto t^n e^{-t}$ sont continues et positives

sur $\mathbb{R}_+$

(2) $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $|\cos(u)| \leq 1$ et $|\sin(u)| \leq 1$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $|t^n e^{-t} \cos(t)| \leq t^n e^{-t}$

et $|t^n e^{-t} \sin(t)| \leq t^n e^{-t}$

(3) L'intégrale définissant $\Gamma(n+1)$ converge

Ainsi, d'après les critères de comparaison (domination) pour les intégrales à fonction positive, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$$

convergent absolument donc convergent

Bilan les intégrales $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ existent

10- $S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$

Soit $A > 0$,

fonctions de classe C^1 sur le segment $[0, A]$

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t) dt = \int_0^A e^{-t} \frac{d}{dt}(-\cos(t)) dt$$

intégration par parties licite

$$= \left[-e^{-t}\cos(t)\right]_0^A - \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt$$

$$= -e^{-A}\cos(A) + 1 - \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt$$

fonctions de classe C^1 sur le segment $[0, A]$

Or, $\int_0^A e^{-t} \cos(t) dt = \int_0^A e^{-t} \frac{d}{dt}(\sin(t)) dt$

intégration par parties

$$= \left[e^{-t} \sin(t)\right]_0^A + \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt$$

$$= e^{-A} \sin(A) + \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 24 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or * $-e^{-A}\cos(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

et * $e^{-A}\sin(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

Ainsi, grâce aux convergences établies,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$$

ie $2S_0 = 1$ ie $S_0 = \frac{1}{2}$

11- Soit $n\in\mathbb{N}$,

$S_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\sin(t)dt \qquad T_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\cos t\,dt$

Soit $A>0$, intégration par parties licite (fonctions C^1 sur le segment $[0,A]$)

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\cos(t)dt = \left[t^{n+1}e^{-t}\sin(t)\right]_0^A - \int_0^A (n+1)t^n e^{-t}\sin(t)dt + \int_0^A e^{-t}\sin(t)t^{n+1}dt$$

d'où $T_{n+1} = S_{n+1} - (n+1)S_n$

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\sin(t)dt = \int_0^A \frac{d}{dt}(-\cos(t))t^{n+1}e^{-t}dt$$

d'où, par intégration par parties licite,

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t) dt = \left[-t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\right]_0^A + \int_0^A (n+1) t^n e^{-t} \cos(t) dt$$
$$- \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t) dt$$

d'où $S_{n+1} = (n+1) T_n - T_{n+1}$

Bilan $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1) T_n$

$S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n$.

12- Soit $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} S_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix}$$

Or $(n+1) \Pi V_n = (n+1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix}$

$$= (n+1) \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_n + T_n \\ T_n - S_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} + \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} T_n \\ -S_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_{n+1} - T_{n+1} \\ S_{n+1} + T_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_{n+1} + T_{n+1} \\ T_{n+1} - S_{n+1} \end{pmatrix}$$

Bilan $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = (n+1) \Pi V_n$.

13 Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence

"P_n : $V_n = n!\, M^n V_0$"

Initialisation $V_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $0!\, M^0 V_0 = I_n V_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Bilan P_0 est vraie

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n est vraie

montrons P_{n+1}

$$V_{n+1} = (n+1) M V_n \overset{P_n}{=} (n+1) M\, n!\, M^n V_0$$
$$= (n+1)!\, M^{n+1} V_0$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie

Conclusion par principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = n!\, M^n V_0$

14 - $M^4 = (M^2)^2 = \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M^4 = \frac{-1}{4} I_2$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$V_{4n+3} = (4n+3)!\, M^{4n+3} V_0 =$

15- Soit $n \in \mathbb{N}$,

Partant de $\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx$, le changement de variable

$x = t^4 \quad dx = 4t^3 dt$ licite car associé à

la bijection de classe C^1 $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $(\varphi' > 0)$
$t \longmapsto t^4$

fournit l'intégrale de même nature et de même valeur éventuelle

$$\int_0^{+\infty} t^{4n} g(t^4)\, 4t^3 dt$$

ie $\int_0^{+\infty} 4\, t^{4n+3} e^{-t} \sin(t)\,dt$

Or, on reconnait ici, à une constante près S_{4n+3}

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx$ converge

et $\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = 4\, S_{4n+3}$

Or, d'après 14, $S_{4n+3} = 0$

Bilan $\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = 0$, et ce qq soit $n \in \mathbb{N}$.

16-

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

17- On en déduit que si $J = \mathbb{R}_+$,

il n'y a pas unicité des solutions du problème de Stieltjes

Partie III

18- Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_0^1 \underbrace{x^n}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\geq 0} dx \geq 0$$

Si par l'absurde $u_n = 0$ alors on aurait $\forall \varepsilon \in]0,1[$

$$\int_\varepsilon^1 x^n f(x) dx = 0$$

Or $x \mapsto x^n$ est strictement positive sur $[\varepsilon ; 1]$

$x \mapsto f(x)$ est positive sur $[\varepsilon, 1]$

et $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $[\varepsilon, 1]$

Ainsi, $\forall \varepsilon \in]0,1]$ $\int_\varepsilon^1 x^n f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ sur $[\varepsilon, 1]$

Mais f est à densité donc ne peut pas être nulle sur $]0,1[$ (car sinon $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \neq 1$)

Ainsi $\forall n \geq 0$ $\quad u_n > 0$

19- Soit $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i,k} \overset{\text{linéarité}}{=} \int_0^1 \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} x^{i-k} f(x)dx$$

$$=$$

20- D'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} u_k > 0$$

ie $\left[(-1)^0 \binom{3}{0} u_0 + (-1)\binom{3}{1} u_1 + (-1)^2 \binom{3}{2} u_2 + u_3 (-1)^3 \binom{3}{3}\right] > 0$

$u_0 - u_1 + \frac{2}{3} u_2 - u_3 > 0$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{9} > u_3$

21- Soit $\alpha > 0$, soit $n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [0,1] \qquad x^{n+1} \leqslant x^n$

d'où, par positivité de f sur $[0,1]$,

$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) x^{n+1} \leqslant f(x) x^n$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leqslant \int_0^1 f(x) x^n dx$$

ie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_0 = 1$

d'où si $\alpha > 1$

(0) Les suites $\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs

(1) $\forall n\in\mathbb{N} \quad \left|\frac{u_n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

(2) La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann $\alpha>1$)

Ainsi, d'après les critères de comparaison pour les séries à termes positifs, si $\alpha>1$, la série de terme général $\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

Si $\alpha > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \frac{x^k}{k^\alpha} f(x)dx = \int_0^1 f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^\alpha} dx$$

Si $\alpha=0$. Soit $n\in\mathbb{N}$, $\forall \varepsilon \in [0,1[$

$$\int_0^\varepsilon f(x) \sum_{k=1}^{n} x^k = \int_0^\varepsilon f(x) \left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right) dx$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC - HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

22- $\underline{\Delta_{n,0}} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} u_{n+k} = \underline{u_n}$

23- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0,n]\!]$,

$$\Delta_{n+1,j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+1+k-j-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \frac{j+1}{j-k+1} \binom{j}{k} u_{n+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{j+1}{j-k+1} \binom{j}{k} u_{n+k-j} + (-1)^{j+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\Delta_{n+1,j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \binom{j+1}{k+1} u_{n+k+1-j} \quad \text{(glissement d'indice)}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \left[\binom{j}{k} + \binom{j+1}{k} \right] u_{n+1+k-j}$$

linéarité

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \binom{j}{k} u_{n+1+k-j} + \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}$$

$$= -\Delta_{n+1,j} + \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k-1} u_{n+k-j} \quad \text{glissement d'indice}$$

$$= \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}$$

Bilan $\forall n \in \mathbb{N}, j \in [\![0,n]\!], \Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}$

24-

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
    N = len(U)-1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range (0, N+1):
        Delta[k,0] = U[k]        # 22
        if ((Delta[k,0] <= 0) and info==-1)):
            info = k
        for j in range (1, N+1):
```

```
        Delta [k, j] = Delta [k-1, j-1] - Delta [k, j-1]
        if (( Delta[k, j]   <= 0 ) and (info == -1))
            info = k
return (info, Delta)
```

25- $\underline{V[0] = -1}$ car $\frac{1}{1} > 0$

donc la condition est satisfaite

$\underline{W[0] = -1}$ car $0,16 > 0$ et $V[0] = -1$

26- La fonction h est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$, elle est donc

* dérivable sur $[0,1]$
* continue sur $[0,1]$
* de dérivée bornée sur $[0,1]$ d'après le théorème des bornes atteintes

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$\underline{\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |h(x) - h(y)| \leq K|x-y|}$

27- a) $Y_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ d'où $Z_n(\Omega) \subset [0,1]$

Ainsi $\mathbb{E}(Z_n) \in [0,1]$

Par application de l'inégalité obtenue en 26, avec $\mathbb{E}(Z_n)$ en lieu et place de y,

$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0,1] \quad |h(x) - h(\mathbb{E}(Z_n))| \leq K|x - \mathbb{E}(Z_n)|$

d'où, par linéarité de l'espérance,

$\exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in [0,1], |h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\,\mathbb{E}(|Z_n - x|)$

27-b) $Z_n - x$ est bornée donc admet une variance

$$\text{et} \quad \mathbb{E}((Z_n - x)^2) \overset{\text{König-Huygens}}{=} (\mathbb{E}(|Z_n - x|))^2 + \underbrace{\mathbb{V}((Z - x))}_{\geq 0}$$

$$\text{d'où} \quad \underbrace{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}_{\geq 0} \geq \underbrace{\mathbb{E}(|Z_n - x|)^2}_{\geq 0}$$

Ainsi, par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{\mathbb{E}(|Z_n - x|^2)} \geq \mathbb{E}(|Z_n - x|)$$

Bilan grâce à 27-a $\quad |h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}$

28- Soit $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{d'où} \quad \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi,} \quad K\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$$

Or, par transfert,

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 24 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\mathbb{E}(\cancel{h}(Z_n)) = \cancel{\sum_{k=0}^{n} x^k h(Z_k)}$$

$$\cancel{= \sum_{k=0}^{n} x^k h(\quad)}$$

$$\mathbb{E}(h(Z_n)) = \mathbb{E}\left(h\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{(admis)}$$

29- $\displaystyle\int_0^1 \hat{h}_n(x)\, h_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} h(x)\,dx$

$=$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(admis)

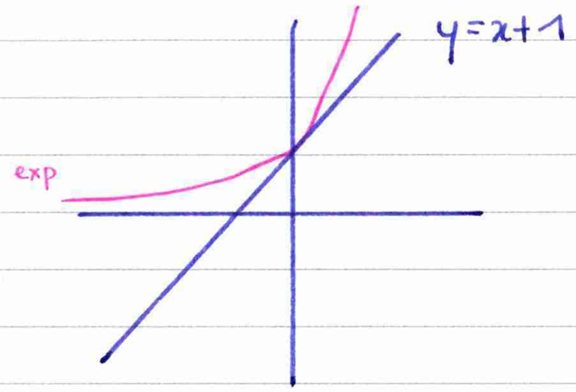
30-

31-

32- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc son graphe se situe au dessus de ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 0 (en y, x)

$$y = e^0(x-0) + e^0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x+1$



Posons $\varphi : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$

φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in [-1,1]$ $\varphi'(x) = e^x - 1 - x$

x	-1		0		1
		$+$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\nearrow$	

Pour $C = \frac{1}{2}$, $\forall x \in [-1,1]$ $0 \leq e^x - 1 - x^2 \leq Cx^2$

33-a) Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$,

~~La fonction $t \mapsto t^k e(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$ est continue sur $[0,1]$~~

~~Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $t \mapsto \int_0^1 t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)dt$ est C^1~~

~~$\forall t \in [0,1]$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha_1 \mapsto t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$ est~~

Par composition associée au diagramme, $\forall t \in [0,1]$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1\text{- polynomiale}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha_1, \alpha_2 \longmapsto \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$
$$u \longmapsto \exp(u)$$

la fonction $(\alpha_1,\alpha_2) \mapsto \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$ est C^1 sur $(\mathbb{R})^2$

Ainsi, par produit $\alpha_1, \alpha_2 \mapsto t^k e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}$ est C^1 sur $(\mathbb{R})^2$

Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$,

$\partial_1 R_k(\alpha_1,\alpha_2) = \int_0^1 t \times t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)dt = R_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2)$

34-a) $\partial_1(G(\alpha_1,\alpha_2)) = \dfrac{R_1(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - v_1$ | $\partial^2_{1,1} G(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{R_2(\alpha_1,\alpha_2)R_0(\alpha_1,\alpha_2) -}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2} \dfrac{R_0(\alpha_1,\alpha_2)R_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$