Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 30	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

G7-00085 Maths 2E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, soit $(t,h) \in (\mathbb{R}^+)^2$

La famille $[X_t = i]_{i \in X(\Omega) = [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements.

$\uparrow$ par l'énoncé

Donc d'après la formule des probabilités totales.

$$\left[P(X_{t+h} = j) = \sum_{i \in X_t(\Omega)} P((X_t = i) \cap (X_{t+h} = j)) \right.$$

$$\left. = \sum_{i=1}^{n} P((X_{t+h} = j) \cap (X_t = i)) \right]$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

On a

$$\sum_{j=1}^{n} P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(X_t=i \cap X_{t+h}=j)}{\underset{>0 \text{ d'après } (H_3)}{P(X_t=i)}}$$

$$= \frac{1}{P(X_t=i)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P((X_t=i)\cap(X_{t+h}=j))}_{=P(X_t=i) \text{ d'après la formule des probabilités totales associé à } (X_{t+h}=j)_{j\in[\![1,n]\!]}}$$

$$= \frac{P(X_t=i)}{P(X_t=i)} = 1$$

3) On a d'après (H_4) :

$$P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j) \underset{h\to 0}{=} \alpha_{i,j}h + o(h)$$

en sommant sur $[\![1,n]\!]$, on a,

$$\sum_{j=1}^{n} P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j) \underset{h\to 0}{=} \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{i,j}h + o(h)\right)$$

donc $1 \underset{h\to 0}{=} \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}\right)h +$

j'admets, l'égalité.

On aurait alors

$$0 \underset{h\to 0}{=} \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}\right)h + o(h)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}\right)h \underset{h\to 0}{=} o(h)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j} \underset{h\to 0}{=} o(1)$$

d'où : $\boxed{\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j} = 0}$

3)a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $(t,h) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

On a $P(X_{t+h}=j) = \sum_{i=1}^{n} P((X_{t+h}=j) \cap (X_t=i))$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_t=i) P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P(X_t=i)(\alpha_{i,j} h + o(h)) + \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^{n} P(X_t=i) P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} P(X_t=i)(\alpha_{i,j} h + o(h)) + \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(X_t=j \cap X_{t+h}=i)}_{\text{car } i=j \text{ et } j=i}}_{=P(X_t=j)}$$

d'où :

$$P(X_{t+h}=j) = P(X_t=j) + \sum_{i=1}^{n} P(X_t=i)(\alpha_{i,j} h + o(h))$$

3)b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $t \geq 0$ et $h \geq 0$

Om a alors

$$p_j(t+h) - p_j(t) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i,j} h + o(h)) p_i(t)$$

d'après les notations de (H3)

Copie anonyme - n°anonymat :

900274 Emplacement QR Code G7-00085

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,j} h + o(h)) f_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,j} + o(1)) f_i(t)$$

en distribuant le "h".

Or $\lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,j} + o(1)) f_i(t) = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,j} + \cancel{o(1)}) f_i(t)$

car c'est une constante indépendante de h.
et $\lim_{h\to 0} o(1) = 0$

d'où :

f_j est dérivable en t $(t \geq 0)$ et on a :

$$f_j'(t) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i,j} + o(1)) f_i(t)$$

3)c)

On a $L_t' = \left(f_1'(t) \quad \text{———} \quad f_n'(t) \right)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,\alpha_{i,1} \quad \text{———} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,\alpha_{i,n} \right)$$

Or $G = \left(\alpha_{i,j} \right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$

d'où : ~~en~~ en posant $L_t G = \left(a_{i,j} \right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$

$\cancel{L_t(G) =}$

$\cancel{L_t(G) = \left(a_{i,j} \right)}$

On a $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\,\alpha_{j,i}$

d'après la ~~pro~~ formule du produit matriciel

~~et on a~~ $\cancel{a_{i,j} = \sum_{i=1}}$

d'où

$$L_t G = L_t'$$

4) On a $U_T \sim U[0,T]$

et $Z_{i,T} = f_i(U_T)$

~~Or~~ donc $f_i(U_T) = P(X_{U_T} = i)$

Or le support de X est fini et U_T aussi. donc $Z_{i,T}$ admet une espérance et vaut (par le théorème de transfert:

$$E(Z_{i,T}) = \int_0^T f_i(t)\, g(t)\,dt$$ où g est la densité de U_T

$$= \int_0^T \frac{f_i(t)}{T}\,dt$$ car $\forall\, t \in [0,T]$, $g(t) = \frac{1}{T}$

$$= \frac{1}{T}\int_0^t f_i(t)\,dt = e_i(T)$$

5) a)

On a $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$

Or $L_t' = \left(f_1'(t) \quad f_2'(t)\right) = \left(f_1(t) \quad f_2(t)\right)\begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$

donc $\cancel{f_1'(t) = -af_1(t)}$

$L_t' = \left(f_1'(t) \quad f_2'(t)\right) = \left(-af_1(t) + bf_2(t) \quad af_1(t) - bf_2(t)\right) \Leftrightarrow (A)$

donc $(A) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1'(t) = -af_1(t) + bf_2(t) \\ f_2'(t) = af_1(t) - bf_2(t) \end{cases}$

En posant $y = f_1$ et $x = f_2$

On a $\cancel{y' + (a+b)y =}$

$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} y' = -ay + bx \\ x' = ay + bx \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -2ay + x' \\ x' = ay + bx \end{cases}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

j'admets le résultat.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliqués.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

G7-00085

~~5)b) Soit $t \geq 0$,~~

~~On a f vérifie~~

$$\cancel{y' = -(a+b)y + b}$$

5)a) (Suite)

On a (A) $\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a & b \\ a & b \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

On a $G - \lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow (a+\lambda)(b+\lambda) - ab = 0$

$\Leftrightarrow ab + (a+b)\lambda + \lambda^2 - ab = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(a+b+\lambda) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc

$G - \lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -(a+b)$

donc G est diagonalisable : il existe P inversible et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(a+b) \end{pmatrix}$ telles que

$G = PDP^{-1}$

donc $X' = GX \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$ $\quad$ P inversible

$\Leftrightarrow Y' = DY$ $\quad$ avec $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1' = 0 \\ c_2' = -(a+b)c_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1(t) = k_1 & \text{avec } k_1 \in \mathbb{R} \\ c_2(t) = k_2 \exp(-(a+b)t) & k_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

~~donc~~

j'admets le résultat

6) Soit $t \geq 0$

6) a)

6)a)

$$\text{On a } G+\frac{1}{6}I=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{2}{30}\\ \frac{1}{30} & -\frac{1}{15}+\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\\ \frac{2}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 7 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\times\frac{1}{30}$$

~~les deux~~ s deux colonnes sont égales, donc $\frac{1}{6}$ est valeur propre.

$$\text{On a } G+\frac{1}{10}I=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & & 0\\ 0 & \frac{1}{10} & 0\\ 0 & & 1/10\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3\cancel{0} & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

non inversible (les trois colonnes sont liées)

et G est non inversible (la somme des deux colonnes est un multiple de la troisième.

6)b)

On a $-\frac{3}{30} = -\frac{1}{10}$ et $-\frac{5}{30} = -\frac{1}{6}$

donc en posant $D = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ diagonale

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dont on suppose qu'elle contient (en colonnes) les vecteurs des sous-espaces propres de P

et donc qui forment une base (par concaténation)
et donc inversible.

On a :

$$G = P D P^{-1} = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

6)c)
On a ${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je ne peux pas conclure.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

067-00085

6)d) Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a
$$C_t = {}^tL_t$$

On a $L_t' = L_t G \iff {}^tL_t' = {}^tG\,{}^tL_t$

$$\iff {}^tL_t' = {}^t(PDP^{-1})\,{}^tL_t$$
$$\iff C_t' = {}^tP^{-1}\,{}^tD\,{}^tP\,C_t$$
$$\iff {}^tP\,C_t' = D\,{}^tP\,C_t \qquad (P^{-1} \text{ inversible.}$$

(je recommence)

On a $G C_t' = G C_t$

$$\iff C_t' = PDP^{-1}C_t$$
$$\iff P^{-1}C_t' = DP^{-1}C_t$$
$$\iff \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = \frac{-3}{30} y_2(t) = -\frac{1}{10} y_2(t) \\ y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t) \end{cases}$$

6)c) Soit $t \geq 0$

On a

$$P^{-1} C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

donc $C_t = P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

Or on a $\begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = -\frac{1}{10} y_2(t) \\ y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \alpha \\ y_2(t) = \beta \exp(-\frac{1}{10} t) \\ y_3(t) = \gamma \exp(-\frac{1}{6} t) \end{cases}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

qui vérifie la condition initiale de y_1, y_2 et y_3

d'où : $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1} C_0$

On a alors

$$C_t = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \\ \alpha - 2\beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

Or on remarque que $\forall\ a>0$, $\lim_{t\to+\infty} e^{-at} = 0$

donc $\lim_{t\to+\infty} f_1(t) = \alpha = \lim_{t\to+\infty} f_2(t) = \lim f_3(t)$

d'où : en posant $\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{t\to+\infty} f_1(t) \\ \lim_{t\to+\infty} f_2(t) \\ \lim_{t\to+\infty} f_3(t) \end{pmatrix}$

on a $\lim_{t\to+\infty} C_t = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

Or ~~elle~~ cette matrice doit vérifier $\Rightarrow$ $\alpha \in [0,1]$ et $3\alpha = 1$

alors $\alpha = \frac{1}{3}$

d'où : $\forall\ i \in \{1,2,3\}$, $\lim_{t\to+\infty} f_i(t) = \frac{1}{3}$

7)a) Soit $x>0$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ k assez grand.

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k}[X_{\frac{j}{k}x}=i]\right)=P\left([X_0=i]\cap[X_{\frac{x}{k}}=i]\cap\cdots\cap[X_x=k]\right)$$

formule des probabilités composées

$$=P(X_0=i)P_{(X_0=i)}(X_{\frac{x}{k}}=i)\times\cdots\times P_{\bigcap_{j=0}^{k-1}[X_{\frac{j}{k}x}=i]}(X_x=i)$$

$$=P(X_0=i)\times P_{(X_0=i)}(X_{\frac{x}{k}}=i)\times P_{(X_{\frac{x}{k}}=i)}(X_{\frac{2x}{k}}=i)\times\cdots\times P_{(X_{\frac{(k-1)x}{j}}=i)}(X_x=i)$$

d'après (H_2) d'après (H_2)

$$=\boxed{P(X_0=i)\prod_{j=0}^{k-1}P_{(X_{j/k\,x}=x)}(X_{\frac{(j+1)x}{k}}=i)}$$

par la formule des probabilités composées (et du fait que chaque évènement dépend uniquement du précédent (H_2)

On a d'après ~~(H6)~~ (H5) (car $i=i=j$)

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k}[X_{\frac{j}{k}x}=i]\right)\underset{k\to+\infty}{=}P(X_0=i)\left(\prod_{j=0}^{k-1}\left(1+\alpha_{i,i}\frac{x}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)$$

avec le changement de variable $h=\frac{x}{k}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

G7-00085

donc

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}n} = i\right]\right) \underset{k\to+\infty}{=} P(X_0=i)\left(\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \underbrace{\frac{B_i x}{k}}_{\text{par l'énoncé}} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)$$

$$= P(X_0 = i)\left(1 - \frac{B_i n}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{k-1+1}$$

7)b) Soit $n \geq 0$, Soit t au voisinage de 0

On a $e^{t} \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t)$

en posant $t = \cancel{\frac{x}{k}}\ \frac{n}{k}$

~~On a~~ Or $\lim\limits_{k\to 0} \frac{n}{k} = +\infty$ donc :

$$e^{-\beta_i n} = 1 - \frac{\beta_i}{k} n + \underbrace{o\left(\frac{\beta_i n}{k}\right)}_{= o\left(\frac{1}{k}\right)}$$

~~d'où~~ d'où

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{jn}{k}} = i\right]\right) \underset{k\to+\infty}{=} P(X_0=i)\left(\exp\left(-\frac{\beta_i n}{k}\right)\right)^k$$

$$\underset{k\to+\infty}{=} P(X_0=i)\exp(-\beta_i n)$$

Or on a

$$P_{(X_0=i)}(Y_i > n) =$$

donc $$\boxed{\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{jn}{k}} = i\right]\right) = P(X_0=i)\exp(-\beta_i n)}$$

$$\cancel{\text{donc } P(Y_i > n) = P(X_0=i)\exp(-\beta_i n)}$$

$$\cancel{\text{Or } P_{(X_0=i)}(Y_i > n) = \frac{P((X_0=i)\cap(Y_i \geq n))}{P(X_0=i)}}$$

~~Or $X_0 = i$ donc $Y_i \neq 0$~~

~~donc~~ $$\cancel{\left[\frac{P(Y_i > x \cap X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \frac{P(Y_i > x)}{P(X_0 = i)} = \exp(-\beta_i x) \right]}$$

donc par la loi conditionnelle $P_{[X_0 = i]}$, $Y_i \sim \mathcal{E}(\beta_i)$

7) d) Soit $x \geq 0$

On a $P(Y \leq x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}$

On a ~~la~~ alors $\lim_{x \to 0^+} P(Y \leq x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k)$

$= 1 - 1$ car $(X_0 = k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements

$= 0 \underset{\uparrow}{=} P(Y \leq 0)$

car $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

~~de~~ donc la fonction de répartition de Y est continue sur $\mathbb{R}$ (car continue sur $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^+$ et 0) et C^1 ~~sur~~ sauf peut-être en 0.

donc Y est une variable à densité.

une densité s'obtient en dérivant ~~à~~ la fonction de répartition sauf en 0.

On a

$$\left(P(Y \leq x)\right)' = -\left(\sum_{k=1}^{n}\left(f_i'(0)e^{-\beta_k x} - \beta_k e^{-\beta_k x} f_i(0)\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{-\beta_k(x)}\left(\beta_k f_i(0) - f_i'(0)\right)$$

Partie 2 :

Soit $s \geq 0$

8k) On a $L_s = \begin{pmatrix} f_1(s) & \cdots & f_n(s) \end{pmatrix}$

et $L_0 M_s = \begin{pmatrix} f_1(0) & \cdots & f_n(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1}(s) & \cdots & m_{1,n}(s) \\ m_{2,1}(s) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ m_{n,1}(s) & \cdots & m_{n,n}(s) \end{pmatrix}$

Or la famille $[X_0 = i]$ est un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

~~$P(SX$ $m_{i,j}$~~

$$P(X_s = j) = \sum_{i=1}^{n} P(X_0 = i) \cap (X_s = j) = \sum_{i=1}^{n} P(X_0 = i)\, m_{i,j}(s)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code
G700085

On reconnaît l'expression de $L_0 M(s)$ pour tout i et j dans $[\![1,n]\!]$.

d'où :

$$L_s = L_0 M(s)$$

8)b) Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$,
On a

$$P(X_r = i \cap X_{r+s} = k \cap X_{r+s+t} = j) = P(X_r = i) P_{(X_r=i)}(X_{r+s} = k) P_{(X_r=i)\cap(X_{r+s}=k)}(X_{r+s+t} = j)$$

~~par la f~~
par la formule des probabilités composées

$$= P(X_r = i) P_{(X_r=i)}(X_{r+s} = k) P_{(X_{r+s}=k)}(X_{r+s+t} = j)$$

d'après (H_2)

$$= P(X_r = i)\, m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(s)$$

par identification

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

La famille $[X_{r+s}=k]_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P((X_r=i)\cap(X_{r+s+t}=j))=\sum_{k=1}^{n}P(X_r=i\cap X_{r+s}=k\cap X_{r+s+t}=j])$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(X_r=i)m_{i,k}(s)\,m_{k,j}(s)$$

$$=P(X_r=i)\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}(s)\,m_{k,j}(s)$$

8)c) Soit $(s,t)\in(\mathbb{R}^+)^2$,

On a $M(s+t)=(m_{i,j}(s+t))$

et on a

$$\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)=\underbrace{\frac{P([X_r=i]\cap X_{r+s+t}=j])}{P(X_r=i)}}_{P_{(X_r=i)}(X_{r+s+t}=j)}$$

On ~~idit~~ identifie bien

$$\underset{(X_r=i)}{P}(X_{r+s+t}=j) = m_{i,j}(s+t)$$ qui ne dépend pas de r.

et on reconnait l'expression du produit matriciel ~~de~~ $M(s)M(t)$ à gauche.

égal à $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)\, m_{k,j}(t)$

D'où :

$$\boxed{M(s+t) = M(s)M(t)}$$

9)d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $t>0$, on pose $\mathcal{P}(k)$: "$M(kt) = (M(t))^k$"

I : On a $M(1t) = (M(t))^1$ donc $P(1)$ est vraie

H : Soit ~~n~~ $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(k)$.

On a $M((k+1)t) = M(kt+t)$

$= M(kt)M(t)$ par 8)c)

$= (M(t))^k M(t)$

$= (M(t))^{k+1}$

donc $P(k+1)$ est vraie.

C : Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t>0$, $M(kt) = (M(t))^k$

9)a) Les imputations sont faites dans l'énoncé.

```
def transition(t, G):
    ~~return~~
    I = np.eye(n)
    return (I + (t/1000)*G)**1000
```

9)b)

```
def traceLoi2Xt(G, L0, tmax)
    X = np.linspace(0, tmax, 1000)
    M = transition(X, G)
    plt.plot(X, L0[i,:] for i in L)
    plt.show().
```

9)c) On a une convergence de f_1, f_2, f_3 vers $\frac{1}{3}$, ce qui est cohérent avec ce qu'on a vu en partie 1.

9)d)

```
def simulX(t, k, L0, G):
    Liste des T = [] ; liste des X = [].
    Mt = transition(t, G) ; Lt = L0
    for i in range(k+1):
        listedesT.append(i*t)
        p = rd.random()
        s = L0
        j = 0
        while p > j :
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code
G7-00085

j+=1
st=Lt[j]
L[t]=s
liste des X . append(j+1)
plt.plot(liste des T, liste desX) ; plt.pshow()

Partie 3:

10)a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$

I: on a $G^1 = (-\alpha-1)^0 G$ donc $P(1)$ est vraie

H: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(i)$.

On a $G^{i+1} = G^i G$

$= (-\alpha-\beta)^{i-1} G^2$ par $P(i)$

Or $G^2 = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)^2 & -\alpha^2-\beta & -\alpha\beta^2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

donc $G^2 = (-\alpha - \beta) G$

donc $G^{i+1} = (-\alpha - \beta)^i G$

donc $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie.

C: Par récurrence, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1} G$

1)d) b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$,

On a $GI = IG$ donc par la formule du Binôme de Newton :

$$\left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} G + \binom{k}{0} \left(\frac{t}{k}\right)^0 I_3$$

$$= I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} \right) G$$

10) c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in \mathbb{R}$,

J'admets que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} = \frac{1 - \left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}$

Or ~~$(1+x)$~~

$$\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \exp\left(k \ln\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)\right)$$

Or $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

donc $\ln\left(1 - \frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{(\alpha+\beta)t}{k}$

car $\lim_{k \to +\infty} -\frac{(\alpha+\beta)t}{k} = 0$

donc $k\ln\left(1 - \frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right) \sim -(\alpha+\beta)t$

~~par~~ donc $\lim_{k \to +\infty} k\ln\left(1 - \frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right) = -(\alpha+\beta)t$

par continuité de exp en $-(\alpha+\beta)t$, on a

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = e^{-(\alpha+\beta)t}}$$

d'où :

$$\Upsilon(t) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k$$

$$= \lim_{k \to +\infty} I_3 + \left(\frac{1 - \left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}\right) G$$

$$\boxed{\Upsilon(t) = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G}$$

11)a)

On a ~~$A^3 - 2$~~

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

On a $A^3 - 2A^2 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 8 & 2 & -10 \\ -40 & 8 & 32 \end{pmatrix}$

$=$ (

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

j'admets que $A^3 - 2A^2 + A = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

dans ce cas là, $\boxed{U \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

11)b)

On a $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{\theta}{k}x\right)^i = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c$

donc $Q(x)U(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{\theta}{k}x\right)^i - ax^2 - bx - c$

12) On a $\sum_{i=1}^{3} |a_{1,i}| = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

$\sum_{i=1}^{3} |a_{2,i}| = \frac{2}{3}$

$\sum_{i=1}^{3} |a_{3,i}| = \frac{6}{3} = 2$

d'où : $\boxed{\|A\| = 2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13) $t \geq 0$,

M contient des probabilités, dont la somme des lignes est égale à 1 (d'après 2))

d'où : $\|M(t)\| = 1$