Copie anonyme - n°anonymat :

Maths S D1-00225

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

Partie 1 :

1) $rg(M) = 1$ donc $rg(f) = 1$.

D'après le théorème du rang,
$\dim \ker(f) = \dim \mathbb{R}^n - rg(f)$

$= n - 1$.

Donc $\dim \ker(f) = n-1 > 0$, car $n \geq 2$.

Ainsi $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ donc 0 est valeur propre de f !

2.a). Comme $rg(M) = 1$, ~~la forme~~ la dimension du sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de M est 1.
Ainsi, comme $C \neq 0$, toutes les colonnes de M sont colinéaires à C.

Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on note l_i le réel tel que $C_i = l_i C$ où C_i est la i-ème colonne de M.

On a alors $M = (C | C_2 | \dots | C_n)$
$= (C | l_2 C | \dots | l_n C)$
$= CL$ où $L = (1, l_2, l_3, \dots, l_n)$.

b). On a $Tr(M) = Tr(CL)$

$$= \sum_{i=1}^{n} [CL]_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [C]_{i,1} [L]_{1,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [L]_{1,i} [C]_{i,1}$$

$$= Tr(LC)$$

$$= LC$$ car LC est un réel.

c) $M^2 = CLCL = C(LC)L$

$$= C(Tr(M))L$$

$$= Tr(M)CL$$

$$= Tr(M)M$$

3). D'après 2.c), $X^2 - Tr(M)X$ est un polynôme annulateur de M.
Donc comme ses racines sont 0 et $Tr(M)$,
$Sp(M) \subset \{0, Tr(M)\}$.

En particulier, on a $MC = CLC$

$$= C(LC)$$

$$= C(Tr(M))$$

$$= Tr(M)C.$$

Comme $C \neq 0$, il vient $Tr(M) \in Sp(M)$.

Donc $Sp(M) = \{0, Tr(M)\}$, d'où $Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$

4) Si $Tr(M)=0$, alors $Sp(M)=\{0\}$.
Si M était diagonalisable, on aurait alors $M = 0_n$.

Or C est non nulle, donc $M \neq 0_n$. Donc M n'est pas diagonalisable.

5) On a montré en 3) que $Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$.

Les sous-espaces propres de f sont au moins de dimension 1.
On a vu en 2) que $\dim \ker f = n-1$.
On en déduit que $\dim \ker f + \dim \ker(f - Tr(M) Id) \geq n$

donc que $\dim \ker f + \dim \ker(f - Tr(M) Id) = n$
(car $\ker(f) \oplus \ker(f - Tr(M) Id) \subset \mathbb{R}^n$)

Donc f est diagonalisable.

Partie 2

6) a) $AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ \frac{z}{c} - \frac{az}{b} = 0 & L_2 - aL_1 \\ \frac{by}{a} - cy = 0 & L_3 - bL_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ bz = acz \\ by = acy \end{cases}$

Si $ac \neq b$, alors : $AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\iff X = 0$.

A serait donc inversible.
Or ce n'est pas le cas. Donc par l'absurde, on a montré que $ac = b$.

b) $rg(A) = rg\left(\begin{pmatrix}1\\a\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\1\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{b}\\\frac{1}{c}\\1\end{pmatrix}\right)$.

Or $ac = b$ donc $\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = ac\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\\\frac{1}{c}\\1\end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\1\\c\end{pmatrix}$.

Donc $a\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\1\\c\end{pmatrix} + ac\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\\\frac{1}{c}\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix} = 0$.

On en déduit que $rg(A) = rg\left(\begin{pmatrix}1\\a\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\1\\c\end{pmatrix}\right)$

puis que $rg(A) = rg\left(\begin{pmatrix}1\\a\\c\end{pmatrix}\right)$.

$= 1$ car $\begin{pmatrix}1\\a\\c\end{pmatrix} \neq 0$.

7. a) La première colonne de A est non nulle et $rg(A) = 1$. D'après la partie 1 appliquée en dimension $3 \geq 2$ avec la matrice A,

il vient comme $Tr(A) = 3 \neq 0$ que g est diagonalisable et que $Sp(g) = \{0, Tr(A)\}$

$= \{0, 3\}$.

b) On raisonne par récurrence.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n : "$A^n \in Vect(A)$, et $A^n = Tr(A)^{n-1}A$"

On a $A = 1 \cdot A$ donc P_1 est vraie,
et $A^2 = Tr(A)A$ donc P_2 est vraie.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Supposons que ~~P~~n est vraie.

On a $A^{n+1} = A \cdot A^n$

$= A^{n-1} \cdot A^2$

$= A^{n-1}(Tr(A)A)$

$= Tr(A)A^n$

$= Tr(A)^n A$

$\in Vect(A)$.

Donc P_{n+1} est vraie.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = Tr(A)^{n-1} A \in Vect(A)$.

Exercice 2 :

Partie 1 :

1. • $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{c}{x^{c+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \geq 0$ car $c > 0$.

$\rightarrow f$ est à valeurs positives.

• Par opérations sur des fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $A > 0$.

$$\int_1^A \frac{c}{x^{c+1}}\,dx = \left[-\frac{1}{x^c}\right]_1^A$$

$$= 1 - \frac{1}{A^c}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 1 \quad \text{car } c > 0.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

- f est donc une densité de probabilité.

2) On étudie $\int_1^{+\infty} \frac{cx^2}{x^{c+1}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

Soit $A > 1$. $\int_1^A \frac{c}{x^{c-1}}dx = \left[\frac{-c}{(c-2)x^{c-2}}\right]_1^A$ car $c > 1$

$$= \frac{c}{c-2} - \frac{c}{(c-2)A^{c-2}}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{c}{c-2} \quad \text{car } c-2 > 0$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge et vaut $\frac{c}{c-2}$.

D'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance donc X admet une variance et une espérance.

On a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c}$

$$= \frac{c}{c-1} - \lim_{A \to +\infty} \frac{c}{(c-1)A^{c-1}}$$

$$= \frac{c}{c-1} \quad \text{car } c-1 > 0.$$

D'après la formule de Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= \frac{c(c-1)^2}{(c-2)(c-1)^2} - \frac{c(c-2)}{(c-1)^2(c-2)}$$

$$= \frac{c(c^2-2c+1-c+2)}{(c-1)^2(c-2)}$$

$$= \frac{c(c^2-3c+3)}{(c-1)^2(c-2)}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 1$:

$F(x) = 0$ car $X(\Omega) = [1, +\infty[$.

Si $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}}\,dt$$

$$= \left[\frac{-1}{t^c}\right]_1^x$$

$$= 1 - \frac{1}{x^c}.$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Or $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc par bijection de $\ln$ de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, $\ln(X)(\Omega) = [0, +\infty[$.

Donc si $x \leq 0$, $G(x) = 0$.

Si $x \geq 0$, $G(x) = P(\ln(X) \leq x)$

$= P(X \leq e^x)$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

$= F(e^x)$
$= 1 - \frac{1}{e^{cx}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = (1 - e^{-cx}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

Donc $\ln(X) \rightsquigarrow \mathcal{E}(c)$.

c)
```
def simulX(c):
    return np.exp(rd.exponential(1/c))
```

Partie 2 :

5)
```
def simulZ(c)
    return np.simulX(c)*np.simulX(c)
```

6) ~~Par indépendance de X_1 et X_2, comme ces deux variables aléatoires admettent u~~
X_1 et X_2 sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes.

Comme X_1^2 et X_2^2 admettent une espérance et sont indépendantes, $X_1^2 X_2^2 = (X_1 X_2)^2$ admet une espérance.

Donc Z admet un moment d'ordre 2 et ainsi une espérance et une variance.

Or par indépendance $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$
$= \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$

et $E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2)$
$= \left(\frac{c}{c-2}\right)^2$.

Donc : $V(Z) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2 - \left(\frac{c}{c-1}\right)^4$

$= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= \dfrac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4} = \dfrac{c^2((c-2+1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$

~~et $(c-2+1)^4 = ((c-2)^2+2(c-2)+1)(c-2)^2$~~

~~donc $(c-1)^4 - c^2(c-2)^2 = (c-2)^2((c-2)^2(1-c^2) + 2(c-2)+1(c-2)^2)$~~

~~$= (c-2)^2((c^2-4c+4)(1-c^2) + 2(c-2)+1(c-2)^2)$~~

~~$= (c-2)^2(-c^4+4c^3-3c^2-4c+4+2c-4+(c-2)^2)$~~

~~$= (c-2)^2(-c^4+4c^3-3c^2-2c$~~

$(c-1)^4 = (c^2-2c+1)(c^2-2c+1)$

$= c^4+2c^2(1-2c)+(2c-1)^2$

$= c^4-4c^3+2c^2+4c^2-4c+1$

$= c^4-4c^3+6c^2+1-4c$

Comme $c^2(c-2)^2 = c^4-4c^3+4c^2$,

on a $(c-1)^4 - c^2(c-2)^2 = 2c^2+1-4c$.

Donc $V(X) = \dfrac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$

7.a) On sait d'après la partie 1. que $U_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ et $U_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

Par changement de loi, $cU_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $cU_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'après le lemme des coalitions, X_1 et X_2 étant indépendantes $c\ln(X_1)$ et $c\ln(X_2)$ sont indépendantes.

Par stabilité de la loi gamma (car $\mathcal{E}(1)$ et $\gamma(1)$ sont la même loi),

$$cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2).$$

8.a). Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Donc $(Y_1+Y_2)(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Si $x<0$; $H(x) = 0$.

Si $x \geq 0$; $H(x) = P(Y_1+Y_2 \leq x)$

$= P(c(Y_1+Y_2) \leq cx)$ car $c>0$

$= K(cx)$.

K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi : $\forall x > 0$, $H'(x) = cK'(cx)$

$$= c\,\frac{(cx)^{2-1}}{\Gamma(2)}e^{-cx}$$

$$= c^2 x e^{-cx}$$ car $\Gamma(2) = 1!$
$= 1$

$\forall x<0$, $H'(x) = 0$.

Donc $h : x \mapsto \begin{cases} c^2xe^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$ est une fonction vérifiant $h = H'$ en tous les points où H est $\mathcal{C}^1$, c'en est donc une densité.

b) On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [1, +\infty[$,
donc $(X_1 X_2)(\Omega) = [1, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $\underline{x < 1}$, $F_Z(x) = 0$.

Si $\underline{x \geq 1}$, $F_Z(x) = P(X_1 X_2 \leq x)$

$= P(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x))$ par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$= P(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$

$= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$

$= H(\ln(x))$.

Ainsi : $\forall x \geq 1$, $F_Z'(x) = \frac{1}{x} H'(\ln(x))$

$$= \frac{c^2 \ln(x) e^{-c\ln(x)}}{x}$$

$$= \frac{c^2 \ln(x) \times \frac{1}{x^c}}{x}$$

$$= \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}}.$$

Donc $f_Z : x \mapsto \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x)$ est une densité de Z.

9.a). Soit $A > 0$. Par intégration par partie sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$;

~~$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{\alpha x^\alpha} \right]$~~

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^A \quad \text{car } \alpha > 1$$
$$+ \int_1^A \frac{1}{(\alpha-1)x^\alpha} dx$$

$$= \frac{-\ln(A)}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} + \int_1^A \frac{1}{(\alpha-1)x^\alpha}\,dx \quad \text{car } \ln(1)=0$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{1}{(\alpha-1)^2 x^{\alpha-1}}\right]_1^A}_{\text{car } \alpha>1} - \frac{\ln(A)}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}$$

$$= -\frac{1}{(\alpha-1)^2 A^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} - \frac{\ln(A)}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}.$$

Par croissance comparée, $-\frac{\ln(A)}{(\alpha-1)}\frac{1}{A^{\alpha-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ car $\alpha>1$

donc par opérations sur les limites, $\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

b) $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{c^2\ln(x)}{x^c}\,dx \quad \text{d'après 8) b)}$$

$$= c^2\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c}\,dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale convergente}$$

$$= \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 \quad \text{d'après 9) a) car } c>1.$$

$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,dx = c^2\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{c-1}}\,dx$ par linéarité (l'intégrale converge d'après 9.a) car $c-1>1$)

$$= c^2 \frac{1}{(c-2)^2}$$

$$= \left(\frac{c}{c-2}\right)^2.$$

Copie anonyme - n°anonymat

Code épreuve : 297	**Nombre de pages :** 31	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On retrouve bien les mêmes valeurs de $E(2)$ et $E(2^2)$ et on retrouvera ainsi par la formule de Huygens le même calcul de $V(2)$.

Exercice 3.

1. a) On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$P(X=k) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})$. (avec $P(X=0) = P(P_1)$

$= \left(\prod_{i=1}^{k} P(F_i)\right) P(P_{k+1})$ par indépendance entre les lancers si $= p$ $k=0$)

$= q^k p$.

b) On a $(1+X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et ~~ainsi~~ : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X+1=k)$

$= P(X=k-1)$

$= q^{k-1}p$.

Donc $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Ainsi, par linéarité de l'espérance X admet une espérance et

$$E(X) = E(X+1-1) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

Par opérations sur la variance, X admet une variance et $V(X) = V(X+1)$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$P(Q=k) = P\left(\frac{X-R}{3} = k\right) = P(X = 3k+R)$.

$= P([X=3k]\cap[R=0]) + P([X=3k+1]\cap[R=1]) + P([X=3k+2]\cap[R=2])$
d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([R=0],[R=1],[R=2])$.

3h

Comme la valeur de $R(\omega)$ est le reste de la division euclidienne de $X(\omega)$ par $Q(\omega)$ pour tout $\omega\in\Omega$, R prend des valeurs déterminées par celles de X.

Ainsi, on a ici $[X=3k]\subset[R=0]$
$[X=3k+1]\subset[R=1]$
et $[X=3k+2]\subset[R=2]$.

Donc $P(Q=k) = P(X=3k) + P(X=3k+1) + P(X=3k+2)$

$= pq^{3k} + pq^{3k+1} + pq^{3k+2}$

$= pq^{3k}(1+q+q^2)$

$= q^{3k}(1-q)(1+q+q^2)$

$= q^{3k}(1-q^3)$ d'après la formule de Bernoulli

$= \boxed{(1-q^3)^{k}(1-(1-q^3))^{k}}$

Donc $\boxed{Q \hookrightarrow BN(1-q^3)}$.

3) $P(R=0) = P(X=3Q)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=3k]\cap[Q=k])$ d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Q=k])_{k\in\mathbb{N}}$.

Or comme on l'a expliqué en 2) :

$\forall k \in \mathbb{N}$,

$\forall \omega \in [X = 3k]$, $X(\omega) = 3k$

$Q(\omega) = k$ → (car $Q(\omega)$ est le quotient de $X(\omega)$ dans sa division euclidienne par 3)

$\omega \in [Q = k]$.

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $[X = 3k] \subset [Q = k]$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P([X = 3k] \cap [Q = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 3k)$

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda q^{3k}$

$\displaystyle = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} (q^3)^k$ par linéarité

$\displaystyle = \lambda \frac{1}{1-q^3}$ car $|q^3| < 1$

$\displaystyle = \frac{\lambda}{(1-q)(1+q+q^2)}$ d'après la formule de Bernoulli

$\displaystyle = \frac{1}{1+q+q^2}$.

De même,

$P(R = 1) = P(X = 3Q + 1)$

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 3k+1)$ (car : $\forall k \in \mathbb{N}$, $[X = 3k+1] \subset [Q = k]$)

$\displaystyle = \lambda q \sum_{k=0}^{+\infty} (q^3)^k$

$\displaystyle = \frac{q}{1+q+q^2}$

et $P(R = 2) = P(X = 3Q + 2)$

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 3k+2)$

$= q^2 P(X = 3Q)$

$= \dfrac{q^2}{1+q+q^2}$

4) Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. $\cdot\ P([R=0] \cap [Q=k]) = P(X=3k) = pq^{3k}$

$P(R=0)P(Q=k) = \dfrac{1}{1+q+q^2}(1-q^3)q^{3k}$

$= \dfrac{1-q}{(1-q)^3}(1-q^3)q^{3k}$ (formule de Bernoulli)

$= pq^{3k}$

2. $\cdot\ P([R=1] \cap [Q=k]) = P(X=3k+1) = pq^{3k+1}$

$P(R=1)P(Q=k) = \dfrac{q}{1+q+q^2}(1-q^3)q^{3k}$

$= pq^{3k+1}$

3. $\cdot\ P([R=2] \cap [Q=k]) = P(X=3k+2) = pq^{3k+2}$

$P(R=2)P(Q=k) = \dfrac{q^2}{1+q+q^2}(1-q^3)q^{3k}$

$= pq^{3k+2}$

Ainsi : $\forall (k,j) \in \mathbb{N} \times [\![0,2]\!]$, $P((Q=k) \cap (R=j))$
$= P(Q=k)P(R=j)$.

Donc Q et R sont indépendantes.

5) a) On a vu en 1) que $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : maths appro EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par conséquent, cette fonction modélise une simulation de X.

b)
```
def div(p):
    X = simulX(p)
    Q = X//3
    R = X%3
    return(X,Q,R)
```

Problème :

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. $h(k+n) = \cos\left(\frac{2k\pi + 2n\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ car cos est 2π-périodique

$= h(k)$

Donc $h \in F_n$.

2) • On a $F_n \subset E$.

• On note 0 la fonction nulle de E.
$\forall k \in \mathbb{Z}$, $0(k+n) = 0 = 0(k)$.
Donc $0 \in F_n$

• Soit $(\lambda, (f,g)) \in \mathbb{R} \times F_n^2$.

$\forall k \in \mathbb{Z}, \ (\lambda f + g)(k + n) = \lambda f(k+n) + g(k+n)$

$= \lambda f(k) + g(k)$ car $f \in F_n$ et $g \in F_n$.

$= (\lambda f + g)(k)$.

Donc $\lambda f + g \in F_n$.

· F_n est donc un sous-espace vectoriel de E.

3) Soit $f \in F_n$.

On pose, pour tout $j \in \mathbb{N}$, A_j : " $f(k) = \cancel{f(n-j)q+r)}$ $= f(n(q-j)+r)$ ".

Donc $f(k) = f(nq+r)$ donc A_0 est vraie.

Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que A_j est vraie.

$f\cancel{((n-j+1)q+r) = f((n-j)q+r}$

$f(n(q-j-1)+r) = f(n(q-j)+r-n)$

$= f(n(q-j)+r)$ car $f \in F_n$

$= f(k)$.

Donc A_{j+1} est vraie.

Ainsi : $\forall j \in \mathbb{N}, f(k) = f(n(q-j)+r)$.

Donc avec $j = q$ (si $q \geq 0$), on a $f(k) = f(r)$.

On peut de même montrer par récurrence descendante que l'inégalité reste vraie si $q \leq 0$.

4) a)

Soit $f \in F_n$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

~~On a $\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k) =$~~

Soit $(q,r) \in \mathbb{Z} \times I_n$ tel que $k = nq + r$.

Pour tout $i \in I_n$,
Comme $e_i \in F_n$, on a $e_i(k) = e_i(r)$ d'après 3).

De même, on a $f(k) = f(r)$.

Par conséquent, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $e_i(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq r \\ 1 \text{ si } i = r. \end{cases}$

Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(r)$

$= f(r) e_r(r)$

$= f(r)$

$= f(k)$.

b) Pour tout $f \in F_n$, $f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i$ d'après 4)a)

donc $f \in \text{Vect}(e_0, \ldots, e_{n-1})$

Comme on a $\text{Vect}(e_0, \ldots, e_{n-1}) \subset F_n$,
$(e_0, \ldots, e_{n-1})$ est une famille génératrice de F_n.

Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lambda_0 e_0 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0$ $(*)$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. En évaluant $(*)$ en i,
on a $\lambda_i e_i(i) = 0$ donc $\lambda_i = 0$.

Ainsi, $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.
Donc $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ est libre dans F_n.

Comme famille libre et génératrice de F_n, $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est une base de F_n.

c) B_n étant une base de F_n, la décomposition trouvée en 4)a) est unique.

Donc ~~par~~ les coordonnées de $f \in F_n$ dans B_n sont $f(0), f(1), \dots, f(n-1)$.

5) Soit $(\lambda, (f_1, f_2)) \in \mathbb{R} \times F_n^2$, et $g \in F_n$.

$$\cdot \ \langle \lambda f_1 + f_2, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f_1 + f_2)(k) g(k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f_1(k) g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f_2(k) g(k)$$

par linéarité de la somme

$$= \lambda \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle.$$

Donc $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche.

$$\cdot \ \langle f_1, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f_1(k) g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(k) f_1(k)$$ par commutativité du produit de réels

$$= \langle g, f_1 \rangle.$$

Donc $\langle , \rangle$ est symétrique. Par là, elle est aussi bilinéaire.

$\cdot \ \langle f_1, f_1 \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (f_1(k))^2 \geq 0$ donc $\langle , \rangle$ est positive.

$$\cdot \ \langle f_1, f_1 \rangle = 0 \implies \sum_{k=0}^{n-1} (f_1(k))^2 = 0$$

$$\implies \forall k \in [\![0, n-1]\!], (f_1(k))^2 = 0$$

par somme de termes positifs ou nuls

$$\implies \forall k \in [\![0, n-1]\!], f_1(k) = 0.$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Supposons que $\langle f_1, f_1\rangle = 0$. ~~Or~~

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\exists ! (q,r) \in \mathbb{Z} \times I_n \,/\, k = qn + r$ (d'après 3.)

On a donc $f_1(k) = f_1(r)$ (d'après 3)

$= 0$ car $r \in [\![0, n-1]\!]$.

Donc $f_1 = 0$.

Ainsi, $\langle , \rangle$ est définie.

Donc $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.

b) Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- $\langle e_k, e_k\rangle = \cancel{\sum_{k=0} e_k} = \sum_{s=0}^{n-1} (e_k(s))^2$

$= (e_k(k))^2$

$= 1$.

- $\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{s=0}^{n-1} e_i(s) e_j(s)$

$= e_i(i) e_j(i)$

$= 0$ car $e_j(i) = 0$ car $j \neq i$.

Donc $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est orthonormée pour $\langle , \rangle$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c). Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(a+\frac{(2k+1)b}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{(2(k-1)+1)}{2}b\right)\right.$$

$$= \sin\left(a+\frac{2n-1}{2}b\right)-\sin\left(a+\frac{-1}{2}b\right)$$

$$= \sin\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{b}{2}\right).$$

Ainsi, d'après l'égalité admise :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a+kb) = \sin\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)$$

d'où, car ~~$\frac{b}{2} \notin$ donc $\frac{b}{2}\notin\{0,\pi\}$ et~~

$\frac{b}{2}\in\,]0,\pi[$ (et ainsi $\sin\left(\frac{b}{2}\right)\neq 0$),

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb) = \frac{\sin\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.}$$

d) On a $n\geq 3$ donc $0<\frac{4}{n}\leq\frac{4}{3}<2$

et ainsi $0<\frac{4\pi}{n}<2\pi$ car $\pi>0$.

On pose alors $b=\frac{4\pi}{n}$ et $a=0$ dans l'égalité de c) (la deuxième).

On a alors $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n(4\pi)}{2n} - \frac{4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{2n}\right)}$

$$= \frac{\sin\left(4\pi - \frac{4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$= 0$ car sin est 2π-périodique donc $\sin\left(4\pi - \frac{4\pi}{2n}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)$

De même, en posant $b = \frac{4\pi}{n}$ et $a = \frac{2\pi}{n}$ dans la même égalité, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} + 4\pi\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$= 0$ car $\sin(0) = 0$ et sin est 2π-périodique.

5.e) On rappelle que $h \in F_{n,n-1}$

$$\|h\|^2 = \langle h, h\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$$

$= \frac{n}{2} + 0$ d'après 5) d)

$$= \frac{n}{2}$$

Donc $\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$

6) a)

Soit $f \in F_n$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $Df(k+n) = f(k+n+1) - f(k+n)$

$= f(k+1) - f(k)$ car $f \in F_n$

$= Df(k)$

Donc comme $Df \in E$, $Df \in F_n$.

(c'est une application définie sur $\mathbb{Z}$)

b) Soit $(\lambda, (f, g)) \in \mathbb{R} \times F_n^2$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $D(\lambda f_1 + f_2)(k) = \lambda f_1(k+1) - \lambda f_1(k) + f_2(k+1) - f_2(k)$

$= \cancel{(\lambda f_1 + f_2)(k}$

$= \lambda D(f_1)(k) + D(f_2)(k)$.

Donc $D \in \mathcal{L}(F_n)$

c) $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$\cancel{D(h)(k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$

$\cancel{= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

$\cancel{= \cos(}$

1. $\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Or $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2} + \frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) + \frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2}$

$= -\frac{1}{2} Dh(k)$.

3. Donc : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$

d). $\|D_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)^2$

$= 4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right)}{2}\right)$

$= \frac{4n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2} - 0$ d'après 5) d)

$= 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$.

Donc $\boxed{\|D_n\| = \sqrt{2n}\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ (car $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$)

$\boxed{7) \quad a)}$ Soit $(f, g) \in F_n^2$.

$\langle f, \Delta g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\left(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)\right)$

D'autre part,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\langle Df, Dg\rangle = \sum_{k=0}^{n-1}(f(k+1)-f(k))(g(k+1)-g(k))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$$

Comme f et g sont n-périodiques, $f(n+1) = f(1)$ et $g(n+1) = 1$. De même, $f(-1) = f(n-1)$ et $g(-1) = g(n-1)$.

Donc en posant le changement d'indice $k = k+1$ dans certaines sommes, on a

$$\langle Df, Dg\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1).$$

Ainsi, $\langle Df, Dg\rangle = -\langle f, \Delta g\rangle$

b) Soit $(f, g) \in F_n^2$.

$$\langle f, \Delta g\rangle = -\langle Df, Dg\rangle$$
$$= -\langle Dg, Df\rangle \text{ par symétrie de } \langle\cdot,\cdot\rangle$$
$$= \langle g, \Delta f\rangle$$
$$= \langle \Delta f, g\rangle \text{ par symétrie de } \langle\cdot,\cdot\rangle.$$

Donc Δ est symétrique.

c) Soit $\lambda \in Sp(\Delta)$.

Soit f un vecteur propre associé à Δ pour λ (donc $f \neq 0$)

On $\langle \Delta f, f \rangle = -\langle Df, Df \rangle$
$= -\|Df\|^2$

et $\langle \Delta f, f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle$
$= \lambda \|f\|^2$

donc $\lambda \|f\|^2 = -\|Df\|^2$

d'où $\lambda = \dfrac{-\|Df\|^2}{\|f\|^2} \leq 0$ car $\|f\|^2 \neq 0$

donc $\lambda \leq 0$.

Donc $Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}^-$.

f) a) $\forall k \in \mathbb{Z}$,
$\Delta(\varepsilon_0)(k) = 1 - 2 + 1$
$= 0$.

Donc $\Delta(\varepsilon_0) = 0$,
donc $\varepsilon_0 \in \ker \Delta$. (Donc $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) \subset \ker \Delta$
car $\ker \Delta$ est un espace vectoriel)

b) Soit $f \in \ker(\Delta)$

On $\Delta(f) = 0$. Ainsi, $\langle f, \Delta f \rangle = 0$
donc $-\|Df\|^2 = 0$
d'où $Df = 0$.

Donc ; $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k+1) = f(k)$.
Par récurrence immédiate, on en déduit que :
$\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = f(0)$

$= f(0) \cdot \varepsilon_0(k)$.

Donc $f \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_0)$.

Ainsi, $\ker \Delta = \text{Vect}(\varepsilon_0)$.

9) a) On a $\|\varepsilon_0\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} 1}$

$= \sqrt{n}$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0$ est normé et $(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0)$ est une ~~base~~ famille orthonormée de F_n et une base orthonormée de $\ker \Delta$.

~~D'après~~ Comme Δ est symétrique, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de Δ de F_n.

En concaténant des bases orthonormées des sous-espaces propres de Δ (lesquels sont supplémentaires dans E et deux à deux orthogonaux car Δ est symétrique) avec celle $(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0)$ de $\ker f$ établie au-dessus, il existe bien une telle base $(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$.

Par décomposition unique en base orthonormée,

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \cdot \varepsilon_i + \underbrace{\langle f, \varepsilon_0 \rangle}_{=0} \cdot \varepsilon_0$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i \quad \text{où } \alpha_i = \langle f, \varepsilon_0 \rangle \text{ pour tout } i \in [\![1, n-1]\!].$$

b) On note $S_p(\Delta) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}$ de sorte que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\Delta(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$

On a ainsi $\langle f, \Delta(f) \rangle = \langle f, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \Delta(\varepsilon_i) \rangle$ car $\Delta \in \mathcal{L}(F_n)$

$$= \langle f, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i \varepsilon_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i \langle f, \varepsilon_i \rangle \quad \text{par linéarité à droite de } \langle , \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i)^2 \lambda_i$$

Donc $\|Df\|^2 = -\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i)^2 \lambda_i$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 31 | Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Comme $S_p(\Delta) \subset \mathbb{R}^-$,
on a ; $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $-\lambda_i \geq c$

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!] \quad -(\alpha_i)^2\lambda_i \geq (\alpha_i)^2 c$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i)^2 \lambda_i \geq c\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i)^2$$

$$\|Df\|^2 \geq c \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i\rangle \langle f, \varepsilon_i\rangle$$

$$\geq c\|f\|^2.$$

10). On a : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta(e_0)(k) = e_0(k+1) - 2e_0(k) + e_0(k-1)$$

!! On rappelle que e_0, e_1, e_2 sont 3-périodiques. $\quad$ ~~$= e_2(k) - 2e_0(k) + e_2(k).$~~

En effet, ~~e_2 est 3-périodique donc : $\forall k \in \mathbb{Z}$,~~

~~$e_2(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 2j \\ 0 \text{ sinon}\end{cases} = \begin{cases} e_0(k+1) \text{ si } k = 2 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ avec $j \in \mathbb{Z}$~~

On a : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $e_0(k+1) = \begin{cases} 1 \text{ si } k \in \{-1+3j, j \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

$$= \begin{cases} e_2(k) \text{ si } k \in \{-1+3j, j \in \mathbb{Z}\}. \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Et : $\forall k \in \mathbb{Z}$, ~~$e_0(k-1)$~~ $e_0(k-1) = \begin{cases} 1 \text{ si } k \in \{1+3j, j \in \mathbb{Z}\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} e_1(k) \text{ si } k \in \{1+3j, j\in\mathbb{Z}\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Donc : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Delta(e_0)(k) = e_2(k) + e_1(k) - 2e_0(k)$.

Donc la première colonne de A est $\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$= -3A$.

Donc $X^2 + 3X$ est un polynôme annulateur de A de degré 2.

On en déduit que $Sp(A) \subset \{0, -3\}$ (0 et -3 sont les racines de X^2+3X).

Δ étant diagonalisable, comme $A \neq -3I_n$

et $A \neq 0_n$,

on a $0 \in Sp(A)$ et $-3 \in Sp(A)$,

donc on a $\boxed{Sp(A) = \{0, -3\}}$

L'inégalité de 9.b) s'écrit : $\boxed{\forall f \in F_3,\ \|Df\|^2 \geq 3\|f\|^2.}$

c) Dans le cas de l'application h, on a :

$\|Dh\|^2 \geq 3\|h\|^2$

donc $(\sqrt{6}\sin(\frac{\pi}{3}))^2 \geq 3\sqrt{\frac{3}{2}}^2$ par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}^+$

donc $6\sin(\frac{\pi}{3})^2 \geq \frac{9}{2}$

d'où $\sin(\frac{\pi}{3})^2 \geq \frac{3}{4}$ donc $|\sin(\frac{\pi}{3})| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

~~donc~~ $\cancel{\sin(\frac{\pi}{3}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}}$. (ce qui est vrai car $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ par ailleurs).

~~(or d'ailleurs~~ $\cancel{\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ ~~)~~

~~donc~~ $\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

FIN