Copie anonyme - n°anonymat :

Maths 2S
D1-00225

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS II ESCP BS / HEC Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Questions préliminaires

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

donc $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$

donc $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ car $n > 0$.

$x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ par opérations sur les limites, donc par théorème d'encadrement, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$

donc $-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq -\frac{n}{2}$ car $-1 < 0$

donc $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$.

Or $\frac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Donc par théorème de comparaison, $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Première partie

3. (a) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$|\cos(x)| = \sqrt{1-\sin^2(x)}$$
car $\cos^2(x) \geq 0$

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$$
car cos est positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $x \in [-1, 1]$.
$\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$

$$= \sqrt{1-x^2}$$

(b) • sin est continue et dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
D'après le théorème de la bijection, la bijection réciproque de sin est continue sur $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

• $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) = \sin'(x) \neq 0$.
Comme sin est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le théorème de la dérivée de la bijection réciproque assure que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[= \sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$,

et que ; $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(x))}$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ d'après 3. (a).

4 (a). $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$.

arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$.

Par opérations, $G : x \mapsto 2\arcsin(\sqrt{x})$ est continue sur $[0,1]$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]0,1[$ sur cet intervalle.
arcsin étant dérivable sur $]0,1[$, par composition et produit de fonctions
$G : x \mapsto 2\arcsin\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,1[$.

$$\forall x \in]0,1[, \quad G'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

(b) Par opérations de composition de fonctions, g est dérivable sur $]0,1[$.

$$\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x}\sqrt{1-x})^2}\left(-\frac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}}\right)$$

$$= \frac{-1+2x}{2(x(1-x))^{\frac{3}{2}}}$$

Donc : $\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) \geq 0 \iff -1+2x \geq 0$ (car $2(x(1-x))^{\frac{3}{2}} > 0$)

$\iff x \geq \frac{1}{2}$ car $2 > 0$

Donc g est croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$.

g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, par opérations, et :

$\forall x \in]0,1[$, $g''(x) = \dfrac{2(2(x(1-x))^{\frac{3}{2}}) - (2x-1)\left(2\cdot\frac{3}{2}(-2x+1)(x(1-x))^{\frac{1}{2}}\right)}{4(x(1-x))^3}$

$= \dfrac{4(x(1-x))^{\frac{3}{2}} - (2x-1)\left((-6x+3)(x(1-x))^{\frac{1}{2}}\right)}{4(x(1-x))^3}$

$= \dfrac{4x(1-x) - 3(2x-1)(1-2x)}{4(x(1-x))^{\frac{5}{2}}}$

$= \dfrac{4x - 4x^2 + 12x^2 - 12x + 3}{4(x(1-x))^{\frac{5}{2}}}$

$= \dfrac{8x^2 - 8x + 3}{4(x(1-x))^{\frac{5}{2}}}$.

Le discriminant associé à (E) : $8x^2 - 8x + 3 = 0$ (avec $x \in \mathbb{R}$) vaut $8\cdot 8 - 4\cdot 3\cdot 8 < 0$.

Donc ~~il n'admet pas~~ (E) n'admet pas de solution. Comme $8>0$, et que : $\forall x \in]0,1[$, $4(x(1-x))^{\frac{5}{2}} > 0$,

$\forall x \in]0,1[$, $g''(x) > 0$, donc g est convexe sur $]0,1[$.

Enfin, on a $g(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$

et $\lim\limits_{0^+} g = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} g = +\infty$ par opérations sur les limites.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

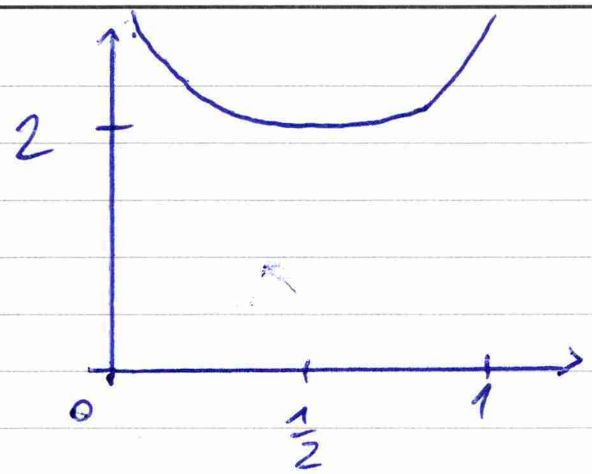
Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS II ESCP BS/HEC Appro fondue

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où :



(5). • Par opérations $t \mapsto \frac{1}{\pi} g(t)$ est continue sur $]0,1[$ (car on a vu que g est continue sur $]0,1[$).

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (car la fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$).

• $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\pi} g(t) \mathbb{1}_{]0,1[}(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)$

≥ 0.

• Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{\pi} g(t)dt$.

Soit $\varepsilon_2 \in]0,1[$ et $\varepsilon_1 \in]0,1[$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$.

$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} dt$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On pose le changement de variable $\mathcal{C}^1$ $u^2 = t$, bijectif et strictement croissant sur $]0,1[$. $2u\,du = dt$,

On a ainsi $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} dt = \int_{\sqrt{\varepsilon_1}}^{\sqrt{\varepsilon_2}} \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} 2u\,du$

$= 2\int_{\sqrt{\varepsilon_1}}^{\sqrt{\varepsilon_2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ par linéarité de l'intégrale

$= 2\left[\arcsin(u)\right]_{\sqrt{\varepsilon_1}}^{\sqrt{\varepsilon_2}}$ d'après 3.(b)

$= 2\arcsin(\sqrt{\varepsilon_2}) - 2\arcsin(\sqrt{\varepsilon_1})$.

On a $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
Comme arcsin est la bijection réciproque de sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et est continue en 0 et en 1,

$$2\arcsin(\sqrt{\varepsilon_2}) - 2\arcsin(\sqrt{\varepsilon_1}) \underset{\varepsilon_2 \to 1}{\longrightarrow} 2\frac{\pi}{2} - 2\arcsin\sqrt{\varepsilon_1}$$

$$\underset{\varepsilon_1 \to 0}{\longrightarrow} \pi - 2 \cdot 0 = \pi$$

par opérations sur les limites.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} dt$ converge et vaut π.

Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{1}{\pi} g(t)dt$ converge et vaut 1

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

· f est donc une densité de probabilité.

(b) Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t g(t)}{\pi}\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt.$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{\pi}\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,dt.$$

On pose $\varphi : \begin{array}{l}[0,1] \to [0,1] \\ t \mapsto 1-t\end{array}$.

φ est C^1 sur $[0,1]$, bijective de $[0,1]$ dans $[0,1]$, strictement décroissante.

Par changement de variable, $\int_0^1 \frac{t}{\pi}\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,dt$ et $\int_1^0 \frac{-(1-u)}{\pi\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\,du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

On a : · $t \mapsto \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{1-t}}$ continue sur $]0,1[$.

· $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{1-t}} \underset{t\to 0}{\sim} 0$

et $0 < \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t}}$.

· $t \mapsto \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{1-t}}$ est donc faussement impropre en 0.

Comme d'après le critère de Riemann (car $\frac{1}{2} < 1$) puis par linéarité, $\int_0^1 \frac{1}{\pi\sqrt{1-t}}\,dt$, par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{t}}{\pi\sqrt{1-t}}\,dt$ converge et finalement $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\pi\sqrt{1-t}}\,dt$ converge.

Donc $E(X)$ existe.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\pi\sqrt{1-t}}dt = \int_0^1 \frac{(1-u)}{\pi\sqrt{u}\sqrt{1-u}}du$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 g(u)du - \int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{\pi\sqrt{u}\sqrt{1-u}}du$$

$$2\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}\cdot\pi}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$
$$= 1$$

donc $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}\cdot\pi}dt = \frac{1}{2}$.

Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{2}$.

6.a). Soit $t \in \mathbb{R}$.
On a $U(\omega) =]0,1[$ presque sûrement (U est à densité)
On a $\frac{\pi}{2}U(\omega) =]0, \frac{\pi}{2}[$,

donc $(\sin^2(\frac{\pi}{2}U))(\omega) =]0,1[$.

si $t \geq 1$:
$P(V \leq t) = 1 = P(X \leq t)$

si $t \leq 0$:

$P(V \leq t) = 0 = P(X \leq t)$.

si $t \in]0,1[$:

$P(V \leq t) = P(\sin^2(\frac{\pi}{2}U) \leq t)$

$= P(\sin(\frac{\pi}{2}U) \leq t)$ car $\sin$ est à valeurs positives sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$= P(U \leq \frac{2}{\pi}\arcsin(t))$ car ~~le théo~~ arcsin est strictement croissante (sa dérivée

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS II Approfondie ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

est à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ et $\frac{2}{\pi} > 0$,

donc $P(V \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(t)$.

On a $P(X \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}} du$

$= \frac{2}{\pi} \arcsin(t) - \frac{2}{\pi} \arcsin(0)$

$= \frac{2}{\pi} \arcsin(t)$ (avec les calculs menés en 5.(a))

$= P(V \leq t)$.

Ainsi X et V ont même loi.

(b) Les bibliothèques sont importées.

```
def arcsinus():
    U = rd.rand()
    V = np.sin((np.pi/2)*U)**2
    return V
```

7. G est dérivable sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1]$, donc continue sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, dérivable sur ~~De plus~~ $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, continue sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, dérivable sur $]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$ (car $k-1 \geq 0$ et $k+1 \leq n$)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De plus : $\forall x \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{1-\frac{k}{n}}}$$

$$\leqslant \frac{n}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$ par décroissance de g sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ d'après 4.(b)

(car $k+1 \leqslant \frac{n}{2}$ donc $\frac{k+1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ car $n>0$)

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{n}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

De même : $\forall x \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{1-\frac{k}{n}}}$$

$$\geqslant \frac{n}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$ par décroissance de g sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\frac{n}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

i.e. $$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \leqslant G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Supposons que $\frac{n}{2}+1 \leq k \leq n-1$.

Alors $\frac{1}{2} \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{n-2}{n}$

et $\frac{1}{2}+1 \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$.

Par croissance de g sur $[\frac{1}{2}, 1[$ (d'après 4.(b)) et avec des calculs quasi identiques, les inégalités sont inversées.

8. La suite d'entiers $(\lfloor \sqrt{n}\, x \rfloor - 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convient.

En effet : $\cdot$ $\frac{\lfloor \sqrt{n}\, x\rfloor - 1}{n} \leq \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par théorème d'encadrement

$\sqrt{n}\, x - 2 < \lfloor \sqrt{n}\, x \rfloor - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (car $x > 0$) par comparaison

$\cdot$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \sqrt{n}\, x \rfloor - 1 \leq \sqrt{n}\, x - 1 < nx - 1$

$< \lfloor nx \rfloor$.

Comme $\lfloor \sqrt{n}\, x \rfloor - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$,

à partir d'un certain rang n,

$1 \leq \lfloor \sqrt{n}\, x \rfloor - 1 \leq \lfloor nx \rfloor$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 4$ et ~~$a_n \geq 1$~~.

$\lfloor nx \rfloor > a_n \geq 1$.

$\forall k \in [\![1, \frac{n}{2} - 1]\!]$,

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

On remarque que $\lfloor nx \rfloor \leq nx$

$< \frac{n}{2}$ car $x \in]0, \frac{1}{2}[$

$\leq \frac{n}{2} - 1$ car $\lfloor nx \rfloor$ est un entier.

De plus, $\lfloor nx \rfloor > 1$ d'après la définition de n.

On peut donc sommer l'inégalité pour $k \in [\![a_n, \lfloor nx \rfloor]\!]$,

et on a par télescopage :

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \leq G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n - 1}{n}\right).$$

D'après la question préliminaire, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$
il vient

par opérations et $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Comme $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\frac{a_n - 1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

par continuité de G sur $[0, 1]$ on a :

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G(x) - G(0) = G(x) - 2\arcsin(0) = G(x)$$

(car $\sin(0) = 0$)

et de même $G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n - 1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G(x)$.

Par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$ existe et vaut $G(x)$.

Deuxième partie.

9. Soit ~~$i \in [\![1, n]\!]$~~ $i \in \mathbb{N}^*$.

On a $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$,
donc $X_i(\Omega) + 1 = \{0, 2\}$

et ainsi $\left(\frac{1}{2}(X_i + 1)\right)(\Omega) = \{0, 1\}$.

On a $P(Y_i = 1) = P\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2} = 1\right)$

$$= P\left(\frac{1}{2}X_i = \frac{1}{2}\right)$$

$$= P(X_i = 1)$$

car $\frac{1}{2} \neq 0$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS II Appliquées ESCP BS / HEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= \theta.$

Ainsi, il vient $P(Y_i = 0) = 1-\theta$.

Donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
D'après le lemme des coalitions, $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.

Par stabilité de la loi binomiale, $\sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$

donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(X_i + 1) \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\theta)$

i.e. $\frac{1}{2}(S_n + n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\theta)$.

10. ~~On a $P([S_1=1]\cap[S_2=0]) = P([X_1=1]\cap[$~~

On a $P([S_1=1]\cap[S_2=-2]) = P(\underbrace{[X_1=1]\cap[X_1=-1]}_{=\emptyset}\cap[X_2=-1])$

$= 0.$

Or $P(S_1=1)P(S_2=-2) = P(X_1=1)P(X_1=-1)P(X_2=-1)$ par indépendance de X_1 et X_2

$= \theta(1-\theta)^2 \neq 0.$

Donc les (S_n) ne sont pas mutuellement indépendantes.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11. On a $(\theta - \frac{1}{2})^2 \geq 0$

donc $\theta^2 - \theta \geq - \frac{1}{4}$

i.e. $\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$ car $-1 \leq 0$

donc $\sqrt{\theta(1-\theta)} \leq \frac{1}{2}$ par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}+$ (car $\theta \in [0,1]$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

· $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi.

· Ces variables aléatoires sont discrètes et à support fini.

Elles admettent donc une variance et une espérance.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i) = \theta - 1 + \theta$

$= 2\theta - 1.$

$V(X_i) = E((X_i)^2) - E(X_i)^2$

$= 1 - (2\theta - 1)^2$ (car $X_i^2(\Omega) = \{1\}$)

$= 1 - 1 - 4\theta^2 + 4\theta$

$= 4\theta(1-\theta).$

Leur variance est donc non nulle ($\theta \overset{\text{car}}{\in}]0,1[$)

D'après le théorème central limite,

$$\frac{\sqrt{n}(S_n - E(X_1))}{\sqrt{V(X_1)}} = \frac{\sqrt{n}(S_n - 2\theta + 1)}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

[N.B : on pouvait utiliser la question 9. pour l'espérance et la variance]

Donc : $P\left(\left|\frac{\sqrt{n}\,(S_n - 2\theta+1)}{2\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}\right| \le t_\alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\Phi(t_\alpha)-1$

où Φ est la fonction de répartition de N.

Or $2\Phi(t_\alpha)-1 = 2\Phi\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)-1$

$= 2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-1$

$= 1-\alpha$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{\sqrt{n}\,(S_n-2\theta+1)}{2\cdot\frac{1}{2}}\right| \le \left|\sqrt{n}\,\frac{(S_n-2\theta+1)}{2\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}\right|$$

i.e. $\left|\sqrt{n}\,(S_n-2\theta+1)\right| \le \left|\sqrt{n}\,\frac{(S_n-2\theta+1)}{2\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}\right|$

et :

$$P\left(\left|\sqrt{n}\,(S_n-2\theta+1)\right|\le t_\alpha\right) = P\left(-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\le S_n-2\theta+1\le \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$$

car $\sqrt{n}>0$

$= P\left(-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}-S_n-1\le -2\theta \le \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}-S_n-1\right)$ $\cancel{= P\left(-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}-1-S_n\le -2\theta\le -S_n-1+\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)}$

$= P\left(\frac{1}{2}\left(S_n+1-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\le \theta \le \frac{1}{2}\left(1+S_n+\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right)$ car $-2<0$

~~Par con~~

Ainsi, comme $P\left(\left|\sqrt{n}\,\frac{(S_n-2\theta+1)}{2\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}\right|\le t_\alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$, On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P\left(\frac{1}{2}\left(\bar{S}_n + 1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \bar{S}_n + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\geq P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{S}_n - 2\theta + 1)}{2\sqrt{\theta}\sqrt{1-\theta}}\right| \leq t_\alpha\right).$$

Donc par définition,

$\left(\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right), \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right]\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance $1-\alpha$.

12. (a). Soit $k \in \mathbb{N}$.

Soit $\omega \in \Omega$. $S_{2k+1}(\omega)$ est une somme ~~impaire~~ de nombres -1 et 1 en nombre impair.

Ainsi, ils ne s'annulent pas dans la somme et $S_{2k+1}(\omega) \neq 0$.

Donc $P(S_{2k+1} = 0) = 0$.

(b). Soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $S_{2k}(\omega)$ est une somme de $2k$ nombres 1 et -1, si $S_{2k}(\omega)$ est nul, alors on a k nombres 1 et k nombres -1 qui s'annulent.

Il y a k parmi $2k$ possibilités pour les $(X_i(\omega))_{i \in [\![1,2k]\!]}$ égaux à 1, les autres étant égaux à -1.

La probabilité pour $X_i(\omega)$ ($i \in [\![1,2k]\!]$) d'être égal à 1 est de θ, d'être égal à -1 est de $1-\theta$.

Ainsi, ~~$P(S_{2k} = 0)$~~ $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS II Approfondie ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13. ~~$P(L_n = n) = P(\bigcap_{k=0}$~~

$P(L_n = n) = P(S_{2n} = 0)$
$= \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n$.

14. (a). Soit $\omega \in [L_n = k]$.

On $L_n(\omega) = k$, donc : $\forall j \in [\![k+1, n]\!]$, $S_{2j}(\omega) \neq 0$.

De plus, on a $S_{2k}(\omega) = 0$.

Donc $\omega \in [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$.

Soit $\omega \in [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+2} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$.

$\forall j \in [\![k+1, n]\!]$, $S_{2j}(\omega) \neq 0$ et $S_{2k}(\omega) = 0$.

Donc k ~~est~~ est le plus grand entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $S_{2j}(\omega) = 0$.
$(j \in [\![0, n]\!])$.

Donc $\omega \in [L_n = k]$.

Ainsi, $[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+2} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$,

par double inclusion.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

14.(b). On rappelle (en vertu de 12.a)) que :

~~$\forall j \in I$~~ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ impair, $P(S_j \neq 0) = 1$.

Donc $P_{(S_{2k}=0)}((S_{2k+1} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} \neq 0))$

$= P_{(S_{2k}=0)}((S_{2k+2} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} \neq 0))$ (on fait disparaître les S_j d'indice impair)

Soit $\omega \in \Omega$ tel que $[S_{2k+2} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$ est réalisé sachant $[S_{2k}=0]$

~~Soit~~

Cela revient à ce que

$X_{2k+1}(\omega) + X_{2k+2}(\omega) \neq 0$,
$X_{2k+1}(\omega) + \dots + X_{2k+2}(\omega) \neq 0, \dots,$ etc...

Cet évènement a la même probabilité que

l'évènement $[S_2 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2(n-k)} \neq 0]$ ~~[illegible]~~, par indépendance des (X_i) qui suivent la même loi.

Ainsi, $P_{(S_{2k}=0)}(S_{2k+1} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n} \neq 0)$

$= P((S_2 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2(n-k)} \neq 0))$

$= P((S_1 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2(n-k)} \neq 0))$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

On a $P_{(S_{2k}=0)}\left(\bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0]\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{2(n-k)} [S_i \neq 0]\right)$

donc $\dfrac{P\left((S_{2k}=0)\cap\left(\bigcap_{j=2k+1}^{2n}[S_j\neq 0]\right)\right)}{P(S_{2k}=0)} = P\left(\bigcap_{i=1}^{2(n-k)}[S_i\neq 0]\right)$

donc $\dfrac{P(L_n=k)}{P(S_{2k}=0)} = f_{n-k}$ d'après 14.(a)

donc $\boxed{P(L_n=k) = f_{n-k}\,P(S_{2k}=0)}$

$= \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k f_{n-k}$

d'après 12.(b).

Pour $k=n$,

on $\boxed{P(L_n=n) = P(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n}\theta^n(1-\theta)^n f_0}$ (car $f_0 = 1$.

16.(a) Soit $\omega\in\Omega$.

Soit $j\in[\![1,n]\!]$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$).

$S_j(\omega) = \sum_{i=1}^{j} X_i(\omega)$.

$S_j(\omega)$ est une somme d'entiers donc $S_j(\omega)\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\{S_1(\omega),\dots,S_n(\omega)\}$ est un ensemble d'entiers.

De plus, pour tout $j\in[\![1,n-1]\!]$,

$S_{j+1}(\omega) = S_j(\omega) - 1$ ou $S_{j+1}(\omega) = S_j(\omega)+1$.

Donc ~~sk~~ les éléments de cet ensemble peuvent être ordonnés de sorte à former un intervalle d'entiers.

Donc $\{S_1(\omega),\dots,S_n(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers (b).

$$P(D_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{2n} [S_k \neq 0]\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0] \cup [S_k < 0]\right)$$

$$= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0]\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{2n} [S_k < 0]\right)\right)$$

par distributivité

De plus, $D_n^+ \cap D_n^- = \emptyset$ donc par incompatibilité,

$$P(D_n) = P(D_n^+ \cup D_n^-)$$

$$= P(D_n^+) + P(D_n^-)$$

par définition de la probabilité.

17. $([S_{2n} = r])_{r \in [\![-2n, 2n]\!]}$ ~~$r \in [\![0, 2n]\!]$~~ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D_n^+) = \sum_{r=0}^{2n} P((D_n^+) \cap (S_{2n} = r)) + \cancel{\sum_{r=0}^{2n} P((D_n^+) \cap (S_{2n} = r))}$$

$$+ \sum_{r=0}^{2n} P(D_n^+ \cap (S_{2n} = -r)).$$

$$\forall r \in [\![0, 2n]\!], \left(\bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0]\right) \cap (S_{2n} = -r) = \emptyset.$$

$\forall r \in [\![0, 2n]\!]$ tel que r est impair,

$P(S_{2n} = r) = 0$ car S_{2n} est à valeurs paires.

Ainsi, $$P(D_n^+) = \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ pair}}}^{2n} P(D_n^+ \cap (S_{2n} = r))$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P(D_n^+ \cap (S_{2n} = 2r))$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{n,r}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS II Approfondies ECS PBS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

18. (a).

Or $P(A_{n-1,q} \cap A_{n,n}) = \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq 2n-2}}^{2n-1} [S_k > 0]\right) \cap [S_{2n-2} = 2q] \cap [S_{2n} = 2n]$

Si $q \leq n-2$, $P([S_{2n-2} = 2q] \cap [S_{2n} = 2n]) = 0$,

car il ne peut gagner que deux entiers d'écart entre la valeur que prend S_{2n} et celle de S_{2n} en plus.

· De même, si $q \geq n-2$, $P((S_{2n-2} = 2q) \cap (S_{2n} = 2n)) = 0$.

· Si $q = n$:
Alors comme $([X_{2n-1} = 1], [X_{2n-1} = -1])$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, d'après la formule des probabilités totales,

$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,n}) = P(A_{n-1,q} \cap A_{n,n} \cap [X_{2n-1} = 1])$
$\quad + P(A_{n-1,q} \cap A_{n,n} \cap [X_{2n-1} = -1])$

$= P\left(\cancel{\left(\bigcap_{k=1}^{2n-2} [S_k > 0]\right) \cap [S_{2n} = 2n] \cap [X_{2n-1} = 1]} \cap \cancel{[X_{2n-2} = -1]}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= P_{[X_{2n-1}=-1]}(\cancel{A_{n-1,q} \cap A_{n,n}) P(X_{2n-1}=-1)} + P_{(X_{2n-1}=1)}(A_{n-1,q} \cap A_{n,n}) P(X_{2n-1}=1)$

$= \cancel{P_{(X_{2n-1}=-1)}(A_{n-1,q} \cap [X_{2n}=1]) \cdot \frac{1}{2} + P_{(X_{2n-1}=1)}(A_{n-1,q} \cap [X_{2n}=-1]) \frac{1}{2}}$

$= P((A_{n-1,n}) \cap (X_{2n}=1) \cap (X_{2n-1}=-1))$

$+ P((A_{n-1,n}) \cap (X_{2n}=-1) \cap (X_{2n-1}=1))$ ~~par indépendance~~

$= a_{n-1,q} \frac{1}{4} + a_{n-1,q} \frac{1}{4}$ par indépendance mutuelle avec le lemme des coalitions, ~~(A_{n-1}, X_{2n}, X_{2n-1}) et la valeur de $[S_1, S_2, \dots, S_{2n-2}, X_{2n}, X_{2n-1})$ sont mutuellem~~ car (X_{2n} et X_{2n-1} sont indépendantes et le sont avec les $X_1, \dots, X_{2n-2}$)

$= \frac{1}{2} a_{n-1,q}$.

Si $q = r-1$: $P(A_{n-1,r-1} \cap A_{n,r}) = P(A_{n-1,r-1} \cap [X_{2n-1}=1] \cap [X_{2n}=1])$

$= a_{n-1,r-1} \frac{1}{4}$ par indépendance mutuelle (car d'après le lemme des coalitions X_{2n} et X_{2n-1} sont indépendantes et indépendantes de $S_1, S_2, \dots, S_{2n-2}$)

Si $q = r+1$: $P(A_{n-1,r+1} \cap A_{n,r}) = P(A_{n-1,r+1} \cap [X_{2n-1}=-1] \cap [X_{2n}=-1])$ (car $r > 0$)

$= a_{n-1,r+1} \cdot \frac{1}{4}$ par indépendance mutuelle.

18 b). ~~Soit $n \in \mathbb{N}^*$.~~

~~On a $\bigcup_n$ On a $\bigcup_{r=-2n}^{2n} [S_{2n} = r] =$~~

$([S_{2n} = r])_{r \in [\![-2n, 2n]\!]}$ est un système complet d'évènements.

Il en ressort que : $\forall (i,j) \in [\![-2n, 2n]\!]$, $A_{n+1,i} \cap A_{n+1,j} = \emptyset$

et $\bigcup_{i=-2n}^{2n} A_{n+1,i} = \Omega$.

Donc $(A_{n+1,r})_{r \in [\![-2n, 2n]\!]}$ est un système complet d'évènements.

b). On remarque que : $\forall r \in [\![-2n, 0]\!]$, $A_{n-1,2r} = \emptyset$ d'après l'énoncé.

~~$P(A_{n,r}) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0]\right) P(S_{2n} = 2r)$~~

~~$= 0$ car $[S_{2n} > 0] \cap [S_{2n} = 2r] = \emptyset$ si $r \leq 0$.~~

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par la formule des probabilités totales avec $(A_{n-1,r})_{r \in [\![1, n]\!]}$,

$$P(A_{n,r}) = \sum_{j=1}^{n} P(A_{n,r} \cap A_{n-1,j})$$

$$= \frac{1}{2} a_{n-1,r} + \frac{1}{2} a_{n-1,r-1} + \frac{1}{4} a_{n-1,r+1}$$ d'après 18.(a).

19. ~~Soit $n \in \mathbb{N}^*$~~

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n : " $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,r} = \frac{1}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$ "

Initialisation. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

· On a $a_{1,r} = \frac{1}{4} a_{0,r-1} + \frac{1}{2} a_{0,r} + \frac{1}{4} a_{0,r+1}$.

~~$= 0$ / d'après~~

On a $a_{0,r-1} = P(S_0 = 2r-2)$

$a_{0,r} = P(S_0 = 2r)$

$a_{0,r+1} = P(S_0 = 2r+2)$.

Donc $a_{0,r} = \begin{cases} 0 & (\text{car } r \geq 2) \text{ si } r \geq 2 \text{ (car } S_0 = 0) \\ \frac{1}{4} & \text{si } r = 1. \end{cases}$

Si $r = 1$,

$$\frac{1}{4}\left(\binom{1}{1-1+1} - \binom{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\binom{1}{1} - 0\right)$$
$$= \frac{1}{4}$$

si $r \geq 2$:

$$\cancel{\frac{1}{4}\left(\binom{1}{r-1}\right.} \quad \frac{1}{4}\left(\binom{1}{r} - \binom{1}{r+1}\right) = 0 .$$

car $r \in [\![0,1]\!]$ et $r+1 \notin [\![0,1]\!]$.

Donc A_1 est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que A_n est vraie.

$$a_{n+1,r} = \frac{1}{4} a_{n,r-1} + \frac{1}{2} a_{n,r} + \frac{1}{4} a_{n,r+1}$$
$$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n-1}{n+r-2} - \binom{2n-1}{n+r-1}\right) + \frac{1}{2\cdot 4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$$
$$+ \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n-1}{n+r} - \binom{2n-1}{n+r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n-1}{n+r-2} + \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$$
$$+ \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n-1}{n+r} + \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r+1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$$

car $\frac{1}{2\cdot 4^n} = \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}$

$$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n}{n+r-1} - \binom{2n}{n+r}\right) + \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r+1}\right)$$

d'après la formule de Pascal

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS II Approfondies ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n}{n+r-1} + \binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r+1}\right)$

$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n+1}{n+r} - \binom{2n}{n+r+1}\right)$ d'après la formule de Pascal

Donc A_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on a démontré la proposition.

2°. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après 15., on a $f_n \binom{2\cdot 0}{0} \theta^0 (1-\theta)^0 = P(L_n = 0)$

donc $f_n = P(L_n = 0)$

$= P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{2n} S_i \neq 0\right] \cap [S_0 = 0]\right)$ d'après 4(a)

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{2n} (S_i \neq 0)\right)$ ~~car~~ car $[S_0 = 0] = \Omega$

$= P(D_n)$

$= P(D_n^+) + P(D_n^-)$ d'après 16.(b).

Par un raisonnement similaire avec $B_{n,r} = \left[\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k < 0]\right] \cap [S_{2n} = -2r]$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1, n]\!]$, on peut aboutir aux mêmes conclusions que $A_{n,r}$ (étant donné les définitions

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

de $X_1, \dots, X_{2n}$ (ou $S_1, \dots, S_{2n}$) et arriver à $P(B_{n,r}) = \frac{1}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$

pour tous $(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ (avec $B_{n,r} = \emptyset$ si $r \leq 0$ ou $r > n$)

Ainsi, on a $P(D_n^-) = \sum_{r=1}^{n} a_{n,r} = P(D_n^+)$.

Donc $q_n = 2\sum_{r=1}^{n} a_{n,r}$

$$= \frac{2}{4^n}\sum_{r=1}^{n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$$

$$= \frac{2}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n}\right) \text{ par télescopage}$$

$$= \frac{2}{4^n}\binom{2n-1}{n} \text{ car } \binom{2n-1}{2n} = 0$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)!}{n \cdot 4^n\, n!\,(n-1)!} \text{ car } \frac{n}{n} \neq 0$$

$$= \frac{(2n)!}{4^n n! n!}$$

$$= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Troisième partie

21. a)

```
def DernierPassage(n):
    L=0
    S=0
    for i in range(1, 2*n+1):
        if rd.rand() < 1/2:
            S = S+1
        else:
```

```
        S = S - 1
    if S == 0 :
        L = i
return L
```
le "if" reste dans la boucle interne

(b). L semble converger en loi vers une variable aléatoire de loi arcsinus.

En effet, l'histogramme donne une forme qui rappelle le graphe de g et plus particulièrement ici de $\frac{1}{\pi}g$, puisque le minimum semble être proche de $\frac{2}{\pi}$.

2.2.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} \Big/ \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\frac{n!n!}{(2n)!}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}(n+1)^2}(2n+2)(2n+1)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}\frac{(2n+1)}{(n+1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right)$$

Or $\displaystyle\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{2\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1$

donc $\displaystyle\ln\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - 1$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^2}{2n}$$

Or $\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Donc $\ln(C_{n+1}/C_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{2n}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}.$$

D'après le critère de Riemann, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $2>1$.
Par linéarité puis théorème de comparaison des séries à termes positifs (car $\ln(C_{n+1}/C_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}$ donc $\ln(C_{n+1}/C_n)$ est positif APCR),

$\sum \ln(C_{n+1}/C_n)$ ~~converge~~ converge donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

(b). Soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $N\geq 2$

$$\sum_{n=1}^{N-1} u_{n+1}-u_n = u_N - u_1$$

donc $\sum_{n=1}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)+u_1 = \ln(C_N)$

donc comme $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, par opérations sur les limites $(\ln(C_N))_{N\in[\![2,+\infty[\![}$ converge et

par passage à la limite, $\ln(C_N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)+u_1$.

Par composition de limites, $C_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)+u_1}$.

Donc (C_N) converge.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS II Approfondie ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

23.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = P(L_n \leq nx)$$

$= P(L_n \leq \lfloor nx \rfloor)$ car $L_n(\Omega) \subset$ [redacted] $\mathbb{N}$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(L_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k f_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\binom{2(n-k)}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq an < \lfloor nx \rfloor$ (n assez grand).

Soit $k \in [\![an, \lfloor nx \rfloor]\!]$.

$$\frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{\sqrt{k}}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{\sqrt{n-k}}{4^{n-k}}\binom{2(n-k)}{n-k}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

$$= C_k C_{n-k}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Donc : $m_a \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \leq \frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_a \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$

En sommant pour $k \in [\![an, \lfloor nx \rfloor]\!]$,

on a
$$m_n \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

(c) On admet le résultat.

23 (d). D'après la partie I, comme (a_n) suit les conditions requises et $x \in]0,1[$,

$$\text{on a } \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = G(x)$$

donc par opérations sur les limites,

$$m_n \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{G(x)}{\pi}$$

$$\text{et } M_n \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{G(x)}{\pi}.$$

Par théorème d'encadrement dans l'inégalité double de 23.(b),

on a $\frac{1}{4^n} \sum_{k=an}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{G(x)}{\pi}$.

24. On considère $(\lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite d'entiers.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1 \leq \sqrt[3]{n} x - 1$

$\leq nx - 1$ car $\sqrt[3]{n} \leq n$

$\leq \lfloor nx \rfloor$

- $\sqrt[3]{n} x - 2 \leq \lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1$

donc par théorème de comparaison, $\lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc : APCR, $\lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1 \geq 1$.

Enfin, $0 \leq \frac{\lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt[3]{n} x - 1}{\sqrt{n}}$

$\leq \frac{x}{n^{\frac{1}{6}}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Par encadrement, $\frac{\lfloor \sqrt[3]{n} x \rfloor - 1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(b). On admet le résultat.

Pour n assez grand,

25. ~~$\forall n \in \mathbb{N}^*$~~, $P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n - 1} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$

$+ \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + \frac{G(x)}{\pi}$ par opérations sur les limites.

On a $L_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ donc $\frac{L_n}{n}(\Omega) \subset [0, 1]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Si $t \geq 1$, $P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = P(X \leq x)$.

Si $t \leq 0$; $P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = P(X \leq x)$.

Si $t \in]0, 1[$:

$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{G(x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^x g(t)\,dt$ car $G(0) = 0$

$= \int_0^x \frac{1}{\pi} g(t)\,dt$

$= P(X \leq x)$.

Conclusion :

Donc $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X, où X suit la loi arcsinus définie en partie I.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751