Copie anonyme - n°anonymat :

Maths S D1-00225

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS I HEC/ESSEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I.

1. (a) $f : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ est une densité de X.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \int_0^1 x^k dx$ (cette intégrale converge car $x \mapsto x^k$ est continue sur $[0,1]$).

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$ converge et vaut $\int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{k+1}$.

D'après le théorème de transfert avec la fonction $t \mapsto t^k$ continue sur $\mathbb{R}$, X^k admet une espérance qui vaut $\frac{1}{k+1}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité de X.

Etudions $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^k e^{-\lambda x}dx$.

On pose $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto \lambda t \end{array}$ (car $\lambda > 0$).

φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Par changement de variable, $\int_0^{+\infty} \lambda x^k e^{-\lambda x}dx$ et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k e^{-t}dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(k+1) = k!$, d'après le cours.

Donc par linéarité, $\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{\lambda^k} e^{-t} dt$ converge et vaut $\frac{k!}{\lambda^k}$.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} \lambda x^k e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $\frac{k!}{\lambda^k}$.

On en déduit par le théorème de transfert que X^k admet une espérance et que $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx = \frac{k!}{\lambda^k}$.

Partie II.

II 1).

$$H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}$$

3. $$^tW H_n W = \sum_{i=1}^{n} [{}^tW H_n]_{1,i} [W]_{i,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [{}^tW]_{1,k} [H_n]_{k,i} [W]_{i,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_i [H_n]_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}.$$

On rappelle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X^k)$ ~~est noté (x)~~ $= m_k(X)$ et qu'elle existe

$$\cancel{{}^t W} {}^tW H_n W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j m_{i+j-2}(X)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j X^{i+j-2}\right) \text{ par}$$

l'existence de cette espérance est obtenue par linéarité

linéarité de l'espérance

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X^{j-1}\right)\right)$$

$$= E\left((P(X))^2\right).$$

D'après le théorème de transfert (car $E((P(X))^2)$ existe et P est continue sur $\mathbb{R}$), $\int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x)\,dx$ converge et :

$${}^tW H_n W = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\,dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

4. ~~f est une densité~~ Soit $\lambda \in Sp(H_n)$. Rappelons que H_n étant symétrique, le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable. Ainsi $Sp(H_n)$ est non vide, en particulier.

Soit ~~W~~ un vecteur propre associé, qu'on note $W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et on reprend le P défini précédemment.

- f est une densité donc est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto (P(x))^2$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$.

Par produit, $x \mapsto P(x)^2 f(x)$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $\mathbb{R}^+$.

D'après la question précédente, $\int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x)dx$ converge.

Par croissance de l'intégrale (car "$+\infty \geq 0$") généralisée,

$$\int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x)dx \geq 0.$$

~~Or~~ Ainsi, ${}^tW H_n W \geq 0$.

Or ${}^tW H_n W = {}^tW(H_n W)$
$= {}^tW(\lambda W)$

$= \lambda \|W\|^2.$

Donc $\frac{{}^tW H_n W}{\|W\|^2} = \lambda$ (W est un vecteur propre donc $W \neq 0$ et ainsi $\|W\|^2 \neq 0$)

donc $\lambda \geq 0$.

Ainsi, $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
5. On reprend les notations précédentes avec cette fois $\lambda \in Sp(G_n)$ et cette fois W un vecteur propre associé à G_n pour la valeur propre λ ($W \neq 0$)

On a encore ${}^tW ~~H_n~~ G_n W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-1}$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j E(X^{i+j-1}).$

Par linéarité de l'espérance (car X admet des moments de tous les ordres),

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282
Nombre de pages : 32
Session : 2023

Épreuve de : MATHS I HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j X^{i+j+1}\right) = E(X(P(X))^2)$ ~~et~~ existe,

et vaut ${}^t W G_n W$.

D'après le théorème de transfert, $\int^{+\infty} x(P(x))^2 f(x)dx$ converge et vaut $E(X(P(X))^2) = {}^t W G_n W$.

$x \mapsto x(P(x))^2 f(x)$ est, par opérations, à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$.
Par positivité de l'intégrale (car $+\infty > 0$),

$$\int_0^{+\infty} x(P(x))^2 f(x)dx \geq 0.$$

Ainsi ${}^t W G_n W \geq 0$.
Comme ${}^t W G_n W = \lambda \|W\|^2$,

il vient $\frac{{}^t W G_n W}{\|W\|^2} = \lambda$ car $W \neq 0$

donc $\lambda \geq 0$.

Ainsi, $Sp(G_n) \subset \mathbb{R}^+$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6. On a $G_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ | On doit utiliser le fait que $Sp(G_2) \subset \mathbb{R}_+$.
| → $\boxed{\text{On admet le résultat}}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$rg(G_2 - \lambda I_2) < 2 \iff (u_1 - \lambda)(u_3 - \lambda) - (u_2)^2 = 0$

$\iff \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(u_3 - \lambda) - \frac{1}{9} = 0$

$\iff \lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + u_3\right)\lambda + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{9} = 0$

Le discriminant associé à (E) : $\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + u_3\right)\lambda + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{9} = 0$

est $\Delta = \left(\frac{1}{2} + u_3\right)^2 + \frac{4}{2}u_3\frac{1}{9}$

$= \left(\frac{1}{2} + u_3\right)^2 + \frac{2}{9}u_3$.

$= \frac{1}{4} + \frac{11}{9}u_3 + (u_3)^2$.

~~Le~~ On a $\Delta \geq 0$, car G_2 admet au moins une valeur propre (G_2 est symétrique).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

7. (a) On pose $h : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n e^{-t^\theta}\end{array}$.

Par opérations, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ~~(car ... et θ>0)~~

$\forall t \geq 0$, $h'(t) = nt^{n-1} e^{-t^\theta} - \theta t^{\theta-1} t^n e^{-t^\theta}$

$= e^{-t^\theta}(nt^{n-1} - \theta t^{n+\theta-1})$

$= t^{n-1} e^{-t^\theta}(n - \theta t^\theta)$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$h'(t) \geq 0 \iff t^{n-1} e^{-t^\theta}(n - \theta t^\theta) \geq 0$

$\iff n - \theta t^\theta \geq 0$ car $t^{n-1} e^{-t^\theta} > 0$

~~tht.~~ $\iff n \geq \theta t^\theta$

$\iff \frac{n}{\theta} \geq t^\theta$ car $\theta > 0$

$\iff \ln\left(\frac{n}{\theta}\right) \geq \theta \ln(t)$ par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff e^{\frac{\ln(\frac{n}{\theta})}{\theta}} \geq t$ par stricte croissance de $t \mapsto e^{\frac{t}{\theta}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\theta > 0$

Ainsi, h est croissante sur $]0, e^{\frac{\ln(\frac{n}{\theta})}{\theta}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{\ln(\frac{n}{\theta})}{\theta}}, +\infty[$.

Par conséquent, h admet un maximum en $e^{\frac{\ln(\frac{n}{\theta})}{\theta}}$.

Or $h\left(e^{\frac{\ln(\frac{n}{\theta})}{\theta}}\right) = h\left(e^{\ln\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)}\right)$

$= h\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)$

$$= \left(\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^r e^{-\left(\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^\theta}$$

$$= \left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}}.$$

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^r e^{-t^\theta} \leq \left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}}$.

On a en outre $0^r e^{-0^\theta} = 0$ (car $r > 0$).

Comme $\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}} \geq 0$, l'inégalité est aussi vraie pour $t = 0$.

(b). Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

D'après 3.(a) ;

Comme f est à valeurs ~~dans~~ nulle hors de J, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

Ainsi : $\forall \omega \in \Omega$,

$$0 \leq X(\omega)^r e^{-(X(\omega))^\theta} \leq \left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}}$$

$$0 \leq X(\omega)^r \leq \left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}} e^{(X(\omega)^\theta)}$$

Donc $0 \leq X^r \leq \left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}} e^{X^\theta}$.

$\int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt$ converge donc d'après le théorème de transfert avec $t \mapsto e^{t^\theta}$,

$E(e^{X^\theta})$ existe. De plus, $E(X^r)$ existe par hypothèse sur X.

Ainsi, par croissance de l'espérance,

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS I HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$u_r \leq \left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}} E(e^{X\theta})$. (*)

L'application $t \mapsto t^{\frac{\theta}{r}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme X est à densité, on a $P(X=0)=0$. Comme X est à valeurs positives, on a ainsi presque sûrement $X>0$

et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $X^r > 0$ par stricte croissance de $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $E(X^r) > 0$ par stricte croissance de l'espérance.

On peut ainsi appliquer $t \mapsto t^{-\frac{\theta}{r}}$ dans (*) et on a :

$$(u_r)^{-\frac{\theta}{r}} \geq \left(\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\frac{r}{\theta}} e^{-\frac{r}{\theta}} E(e^{X\theta})\right)^{-\frac{\theta}{r}}$$

$$\geq \frac{e}{\frac{r}{\theta}} E(e^{X\theta})^{-\frac{\theta}{r}}$$

$$\geq \frac{\theta e}{r E(e^{X\theta})^{\frac{\theta}{r}}}$$

On admet la fin.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8.
```
def test_stieltjes(U):
    N = len(U) - 1
    n = 1 + N//2
    H = np.zeros((n, n))
    for r in range(1, n+1):
        for i in range(0, r):
            H[i, r-1] = U(i+r-1)
            H(r-1, i) = U(i+r-1)
    valp = al.eigvalsh(H)

    for k in range(0, np.shape(valp)[1]):
        if (valp[k] < 0):
            return 0
    return 1
```

II.2)

9. ~~$\forall t \in \mathbb{R}_+$~~ -

$t \mapsto t^n e^{-t}\sin(t)$ et $t \mapsto t^n e^{-t}\cos(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

Et ;

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|t^n e^{-t}\sin(t)| \leq t^n e^{-t}$ car $|\sin(t)| \leq 1$

$|t^n e^{-t}\cos(t)| \leq t^n e^{-t}$. et $|\cos(t)| \leq 1$

Or $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\Gamma(n+1) = n!$ (fonction gamma).

Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions ~~pos~~

positives, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)dt$ sont absolument convergentes donc convergent.

10. $S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$.

Soit $A > 0$.

Par intégration par parties (exp, cos et sin étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$),

$$\int_0^A e^{-t}\sin(t)dt = [-e^{-t}\sin(t)]_0^A - \int_0^A(\cos t)(-e^{-t})dt$$

$$= -e^{-A}\sin(A) + \int_0^A \cos(t)e^{-t}dt$$

$\xrightarrow[A\to+\infty]{} T_0$ ~~[illegible]~~ car $\sin(0)=0$.

car ~~$-e^{-A}\sin(A)$~~

Or a ~~aussi $\int_0^A e^{-t}\sin(t)dt = [-\cos(t)e^{-t}]_0^A - \int_0^A \cos(t)e^{-t}dt$~~

~~$= -\cos(A)e^{-A} + 1 - \int_0^A \cos(t)e^{-t}$~~

(En effet, $|e^{-A}\sin(A)| \leq e^{-A}$ donc par théorème d'encadrement, $e^{-A}\sin(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$).

D'autre part, $\int_0^A e^{-t}\sin(t)dt = [-\cos(t)e^{-t}]_0^A - \int_0^A \cos(t)e^{-t}dt$

$= -\cos(A)e^{-A} + 1 - \int_0^A \cos(t)e^{-t}dt$.

De même, $-\cos(A)e^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$.

Comme toutes les intégrales convergent, par passage à la limite quand $A \to +\infty$,

on a $S_0 = 1 - T_0$

donc $2S_0 = 1$, i.e. $S_0 = \frac{1}{2}$.

11/

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $A \geq 0$.

Par intégration par parties,

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t) e^{-t} t^{n+1}\right]_0^A + \int_0^A \cos(t)(n+1)t^n e^{-t}\,dt$$

$$- \int_0^A \cos(t) e^{-t} t^{n+1}\,dt$$ par linéarité de l'intégrale

$$= -\cos(A) e^{-A} A^{n+1} + (n+1)\int_0^A \cos(t) t^n e^{-t}\,dt$$

$$- \int_0^A \cos(t) e^{-t} t^{n+1}\,dt.$$

Toutes les intégrales présentes convergent et

par théorème d'encadrement et croissance comparée, $-\cos(A) e^{-A} A^{n+1} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$.

Par opérations sur les limites, on a par passage à la limite :

$$S_{n+1} = (n+1) T_n - T_{n+1}$$ (~~par linéarité de l'intégrale~~

Donc $S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1) T_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \geq 0$.

Par intégration par parties,

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\,dt = \left[\sin(t) e^{-t} t^{n+1}\right]_0^A - \int_0^A (n+1) t^n e^{-t} \sin(t)\,dt$$

$$+ \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\,dt$$

$$= \sin(A) e^{-A} A^{n+1} - (n+1)\int_0^A t^n e^{-t} \sin(t)\,dt$$

$$+ \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\,dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 32	**Session :** 2023
Épreuve de : MATHS I HEC/ESSEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} -(n+1)S_n + S_n$ par croissance comparée et théorème d'encadrement $\left(A^{n+1}e^{-A}A^{n+1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0\right)$
et opérations sur les limites.

Donc $T_{n+1} = -(n+1)S_n + S_{n+1}$

d'où $-T_{n+1} + S_{n+1} = (n+1)S_n$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+1)M V_n = (n+1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_n\\ T_n\end{pmatrix}$$

$$= \frac{n+1}{2}\begin{pmatrix}S_n + T_n\\ -S_n + T_n\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(n+1)S_n + (n+1)T_n\\ (n+1)T_n - (n+1)S_n\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2S_{n+1}\\ 2T_{n+1}\end{pmatrix} \text{ d'après 11.}$$

$$= V_{n+1}.$$

13. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n : " $V_n = n! M^n V_0$ ".

- $V_0 = 0!\, M^0 V_0$ donc A_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que A_n est vraie.

$$V_{n+1} = (n+1) M V_n$$
$$= (n+1) M\, (n!\, V_0 M^n) \text{ d'après } A_n$$
$$= (n+1)!\, M^{n+1} V_0 .$$

Donc A_{n+1} est vraie.
Ainsi par récurrence ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \cancel{(n+1) M V}\, n!\, M^n V_0$.

14. $M^4 = \frac{1}{(2)^4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} I_2 .$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
A_n : « $S_{4n+3} = 0$ ».

On a $V_3 = 3!\, M^3 V_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 3! \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\underline{S_3 = 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que A_n est vraie.

Or $V_{4(n+1)+3} = V_{4n+7} = (4n+7)!\, M^{4n+3} M^4 V_0$

$$= -\frac{1}{4}(4n+7)!\, M^{4n+3} V_0$$

car $M^4 = -\frac{1}{4} I_2$.

On $S_{4n+3} = 0$.

Donc $\left[-\frac{1}{4}(4n+7)!\, M^{4n+3} V_0\right]_{1,1} = 0$

et ainsi $[V_{4n+7}]_{1,1} = 0$.

Donc $S_{4n+7} = 0$.

Donc A_{n+1} est vraie.

Ainsi : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ S_{4n+3} = 0}$.

15. $t \mapsto t^4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par théorème de changement de variable,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} \sin(x^{\frac{1}{4}})dx \text{ et } \int_0^{+\infty} x^{4n} e^{-x} \sin(x)(4x^3)dx$$

sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Or $\int_0^{+\infty} x^{4n+3} e^{-x} \sin(x) dx$ converge d'après 9.

et vaut J_{4n+3}. Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} x^{4n} e^{-x} \sin(x)(4x^3)dx$ converge et vaut

$4J_{4n+3} = 0$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} x^n g(x) dx$ converge et vaut 0.

16. On admet le résultat.

~~17. On déduit de 16. que quand $J = [0, +\infty[$, Il n'y a pas unicité de la solution de $M^*(J)$. En effet, g_1 et g_2 sont continues sur $\mathbb{R}_+$, positives, et distinctes.~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS I MEC, ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

17. On admet que $\int_0^{+\infty} g_1(x)dx = 1$ et $\int_0^{+\infty} g_2(x)dx = 1$.

En posant $f_1 : x \mapsto \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $f_2 : x \mapsto \begin{cases} g_2(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_1 et f_2 sont positives sur ~~R~~, continues sur $\mathbb{R}^*$,

et vérifient $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx = 1$.

Ce sont donc des densités de probabilité.

On note respectivement X_1 et X_2 des variables aléatoires de densité f_1 et f_2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de transfert,

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)x^n dx = \int_0^{+\infty} x^n g_1(x)dx$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)x^n dx = \int_0^{+\infty} x^n g_2(x)dx$ convergent,

X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre n.

f_1 et f_2 sont nulles sur $\mathbb{R}^-$ et continues sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, X_1 et X_2 sont solutions de $M^*(J)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Il n'y a donc pas unicité des solutions de $\mathcal{M}^+(J)$ quand $J = [0, +\infty[$.

Partie III.

III/A/.

18. X est une variable aléatoire à densité.
Ainsi, on (car f est une densité de X),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \text{ i.e. } \int_0^{1} f(x)dx = 1.$$

f n'est donc pas identiquement nulle sur $[0, 1]$

Par produit, $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $[0, 1]$

à valeurs positives, et non identiquement nulle sur $[0, 1]$
sur $[0, 1]$

Par stricte positivité de l'intégrale, il vient $\int_0^{1} x^n f(x)dx > 0$

(~~car $\frac{1}{1} > 0$ et $\int_0^{1} x^n f(x)dx$ converge car $E(X^n)$ existe~~).

Donc $E(X^n) > 0$, i.e. $u_n > 0$

19. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
f est à valeurs positives sur $[0, 1]$, est continue, et non identiquement nulle sur J.
Ainsi par produit,

$x \mapsto x^i (1-x)^j f(x)$ est positive, non identiquement nulle et continue sur J.

Par stricte positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1 x^i(1-x)^j f(x)dx > 0$$

i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^i(1-x)^j f(x)dx > 0$ (car $J = [0,1]$).

Par le théorème de transfert, la convergence de

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^i(1-x)^j f(x)dx$ assure que $E(X^i(1-X)^j)$ existe,

et $E(X^i(1-X)^j) > 0$

D'après le binôme de Newton :

$\forall \omega \in \Omega,\ (1-X(\omega))^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(-X(\omega))^k$

donc $(1-X)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(-X)^k$.

d'où $X^i(1-X)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(-1)^k X^{k+i}$

Par linéarité de l'espérance (car X admet des moments de tout ordre), $E\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^k X^{k+i}\right)$ existe

et $E(X^i(1-X)^j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(-1)^k E(X^{k+i})$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(-1)^k u_{k+i} > 0$.

20. D'après 19. avec $i=2$ et $j=1$,

on a $u_2 - u_3 > 0$

donc $\frac{1}{3} > u_3$.

01

D'après 19. avec $j=2$ et $i=1$,

$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \binom{2}{k} u_{1+k} > 0$$

donc $u_3 - 2u_2 + u_1 > 0$

donc $u_3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} > 0$

donc $u_3 - \frac{1}{6} > 0$

donc $u_3 > \frac{1}{6}$.

Ainsi, $u_3 \in]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}[$.

21.

On admet le résultat.

[II.2]

22. $\Delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} \cancel{u_{n+j}}\ u_{n+k}$

$= \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} E(X^{n+k})$

$= (-1)^0 \binom{0}{0} E(X^n)$

$= E(X^n)$

$= u_n$.

23. Soit $n \in \mathbb{N}$, $j \in [\![0, n]\!]$.

$\cancel{\Delta_{n,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j}}$

$\cancel{= \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} \binom{j}{k-1} u_{n+k-j-1}}$ ~~par changement d'indice.~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de :

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

~~On a ainsi $\Delta_{n,j} = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} \binom{j}{k-1} u_{n+k-j-1}$.~~

~~Comme $\Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j+1}$,~~

$$\Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} \binom{j}{k-1} u_{n-j+k} \quad \text{par changement d'indice.}$$

Donc $\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{k=1}^{j+1} u_{n-j+k} (-1)^k \left(\binom{j}{k} + \binom{j}{k-1} \right)$

$$- u_{n+1} (-1)^{j+1} \binom{j}{j+1} + u_{n-j} \binom{j}{0}$$

On retire → le terme en 0 de $\Delta_{n,j}$ et on ajoute celui en $j+1$, qui vaut $\binom{j}{j+1} (-1)^{j+1} u_{n+1} = 0$.

$$= \sum_{k=1}^{j+1} u_{n-j+k} (-1)^k \binom{j+1}{k} - \binom{j}{j+1} u_{n+1} (-1)^{j+1} + u_{n-j}$$

d'après la formule de Pascal

~~$= \sum_{k=0}^{j} (u_{n-j+k+1} (-1) \binom{j+1}{k}) + u_n (-1)^{j+1} \binom{j+1}{j+1} + u_{n-j}$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \sum_{k=1}^{j+1} u_{n-j+k} (-1)^k \binom{j+1}{k} + u_{n-j}(-1)^0 \binom{j+1}{0}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} u_{n-j+k} (-1)^k \binom{j+1}{k}$$

$$= \boxed{\Delta_{n+1, j+1}} .$$

24.

```
def test_hausdorff(U):
    N = len(U) - 1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range ~~(...)~~ (0, N+1):
        Delta [k, 0] = U [k]
        if ((Delta [k, 0] <= 0) and (info == -1)):
                info = k
        for j in range ~~(0, k+1)~~ (1, k+1):
            Delta [k, j] = Delta (k-1, j-1) - Delta (k, j-1)
            if ((Delta [k, j] <= 0) and (info == -1)):
                info = k
    return (info, Delta)
```

25.

$\boxed{\text{II}}$ 3).

Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$

26. f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

Par opérations, h est $\mathcal{C}^1$ sur J.

Ainsi, h' est continue sur le fermé borné $[0, 1]$.
D'après le théorème de compacité, h' admet un maximum sur $[0, 1]$ et un minimum sur $[0, 1]$.
On les note K_1 et K_2 respectivement.
On pose $K = \max(|K_1|, |K_2|)$.
On a ainsi : $\forall x \in J, |h'(x)| \leq K$.

h est dérivable et continue sur $[0, 1]$ donc sur $[a, b]$.
D'après l'inégalité des accroissements finis :

$|h(b)-h(a)| \leq K|b-a|$.

Ainsi : $\forall (x,y) \in J^2, |h(x)-h(y)| \leq K|x-y|$.

27.

(a) $Y_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$ donc $Z_n(\Omega) \subset [0,1]$

~~Soit x~~ | ~~$0 \leq Z_n \leq 1$ et 1 admet une espérance~~

Ainsi, d'après 26 :

$\forall \omega \in \Omega$,

$$|h(x)-h(Z_n(\omega))| \leq K|x-Z_n(\omega)|$$

d'où

$$-K|x-Z_n| \leq h(x)-h(Z_n) \leq K|x-Z_n|.$$

Par croissance puis linéarité de l'espérance,

$$-KE(|x-Z_n|) \leq h(x)-E(h(Z_n)) \leq KE(|x-Z_n|)$$

donc $|h(x)-E(h(Z_n))| \leq KE(|Z_n-x|)$.

* Justification de l'existence des espérances :

· h est continue sur $[0,1]$ donc h est bornée sur $[0,1]$, d'après le théorème de compacité.
Ainsi : $\exists M \in \mathbb{R}_+ / |h(Z_n)| \leq M$.
La variable certaine égale à M admet une espérance donc par domination,
$h(Z_n)$ admet une espérance.

· $0 \leq Z_n \leq 1$

· $-x \leq Z_n - x \leq 1-x$

· $0 \leq |Z_n - x| \leq \max(x, 1-x)$.

Par existence de l'espérance par domination, $|Z_n-x|$ admet

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES ULM/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

bien une espérance.

(b) On a vu précédemment que $|2_\sigma - x| = \sqrt{(2_\sigma - x)^2}$ admettait une espérance.
On remarque qu'on a aussi $0 \leq (2_\sigma - x)^2 \leq \max(x, 1-x)^2$ donc par domination, $|2_\sigma - x|$ admet un moment d'ordre 2 donc une variance.

On a $V(|2_\sigma - x|) = E((2_\sigma - x)^2) - E(\sqrt{(2_\sigma - x)^2})^2 \geq 0$

donc $E((2_\sigma - x)^2) \geq E(\sqrt{(2_\sigma - x)^2})^2 \geq 0$

donc par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$,

~~28~~.

$$\sqrt{E((2_\sigma - x)^2)} \geq E(|2_\sigma - x|) \geq 0.$$

Ainsi, on a $k\sqrt{E((2_\sigma - x)^2)} \geq |h(x) - E(h(2_\sigma))|$ par produit, dans l'inégalité obtenue en 27.(a) de termes positifs

28.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

31. Par ~~théorème d'encadrement~~ passage à la limite dans l'inégalité obtenue en 30. (car $\frac{k}{2\sqrt{n}}\int_0^1 |h(x)|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$\int_0^1 h^2(x)dx \geq 0$ (par positivité de l'intégrale)),

$\int_0^1 h^2(x)dx = 0$. h^2 est par opérations continue, et positive sur $[0,1]$.

Par le théorème de l'intégrale nulle : $\forall t \in [0,1]$, $h^2(t) = 0$
$h(t) = 0$.
$f_1(t) = f_2(t)$.

Ainsi, $f_1 = f_2$.

Par conséquent, si des solutions de $M^*(J)$ sont à densités de classe $\mathcal{C}^1$ (avec $J = [0,1]$), ~~__~~ elles ~~sont les~~ ont même loi.
Donc une unique loi est solution de $M^*(J)$ si une densité associée est $\mathcal{C}^1$ sur J.

III.4.

~~32. On pose $h : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.~~

~~h est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1] \setminus \{0\}$.~~

~~$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $h'(x) = \frac{(e^x - 1)x^2 - 2x(e^x - 1 - x)}{x^4} = \frac{x^2 e^x + x^2 + 2x - 2x e^x}{x^4}$~~

· exp est $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$.

· $\forall x \in [-1,1]$, $\exp^{(2)}(x) = e^x \geq 0$.

exp est convexe, donc $\mathcal{C}_{\exp}$ est en particulier au-dessus de sa tangente en 0.

Ainsi : $\forall x \in [-1,1]$, $e^x \geq e^0(x - 0) + e^0$

$\geq x + 1$

$e^x - 1 - x \geq 0$.

· $\forall x \in [-1,1]$, $|\exp^{(2)}(x)| \leq |e^x| = e^x$

$\leq e^1$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in [-1,1]$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à exp entre 0 et x à l'ordre 1,

$$|e^x - e^0 - (x - 0)e^0| \leq e \frac{|x^2 - 0|}{2!}$$

donc $|e^x - 1 - x| \leq \frac{e}{2} x^2$.

En posant $C = \frac{e}{2}$, on a :

$$\forall x \in [-1,1], \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq C x^2.$$

33. cq.

(b) Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

~~Soit k ∈~~ ~~α_1,α_2~~ $t \mapsto e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t^2}$ est

continue, positive et non identiquement nul donc par stricte positivité de l'intégrale.

$$\int_0^1 e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t^2} dt > 0$$

donc $R_0(\alpha_1, \alpha_2)$.

F_k est bien définie.

Comme quotient de fonctions bien définies ~~de classe dérivables par rapport~~ admettant une dérivée partielle par rapport à leur première et seconde variable, F_k admet également ses dérivées partielles par rapport à toutes ses variables.

Par dérivation : $\partial_1 F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\partial_1 R_k(\alpha_1,\alpha_2) R_0(\alpha_1,\alpha_2) - \partial_1 R_0(\alpha_1,\alpha_2) R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$

$$= \frac{R_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2) R_0(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$$

$- \dfrac{R_1(\alpha_1,\alpha_2) R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$ d'après 33. (a)

$$= F_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2) - \frac{R_1(\alpha_1,\alpha_2) R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2) R_0(\alpha_1,\alpha_2)}$$

$$= F_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2) - F_1(\alpha_1,\alpha_2) F_k(\alpha_1,\alpha_2).$$

Donc $\boxed{\partial_1 F_k = F_{k+1} - F_1 F_k}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS I HEC/ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

De même, par dérivation :

$$\partial_2 F_k(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\partial_2 R_k(\alpha_1,\alpha_2)R_0(\alpha_1,\alpha_2) - \partial_2 R_0(\alpha_1,\alpha_2)R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$$

$$= \frac{R_{k+2}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - \frac{R_2(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)}\frac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)}$$

$$= F_{k+2}(\alpha_1,\alpha_2) - F_2(\alpha_1,\alpha_2)F_k(\alpha_1,\alpha_2).$$

Donc : $\forall i \in [\![1,2]\!], \partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i$.

(c) Soit $i \in [\![1,2]\!]$. Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$F_{k+i}(\alpha_1,\alpha_2) - (F_k F_i)(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)}\int_0^1 t^{k+i} e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt$$

$$- \frac{1}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)^2}\left(\int_0^1 t^k e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt\right)\left(\int_0^1 t^i e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt\right)$$

On remarque que $\left(\int_0^1 e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt\right) / R_0(\alpha_1,\alpha_2) = 1$.

Donc par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 F_k(\alpha_1,\alpha_2) F_i(\alpha_1,\alpha_2) e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt$

$= F_k(\alpha_1,\alpha_2) F_i(\alpha_1,\alpha_2) R_0(\alpha_1,\alpha_2)$

(0)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De même, il vient par linéarité

$$- \int_0^1 t^i F_k(\alpha_1,\alpha_2) e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt = -F_k(\alpha_1, \alpha_2) R_i(\alpha_1,\alpha_2) \quad (1)$$

et $$- \int_0^1 t^k F_i(\alpha_1,\alpha_2) e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt = -F_i(\alpha_1,\alpha_2) R_k(\alpha_1,\alpha_2). \quad (2)$$

En divisant par $R_0(\alpha_1, \alpha_2)$ les deux membres de droites de (1) et (2) deviennent respectivement $-F_k(\alpha_1,\alpha_2)\, F_i(\alpha_1,\alpha_2)$

et $-F_i(\alpha_1,\alpha_2)\, F_k(\alpha_1,\alpha_2)$.

En additionnant (0), (1), (2), et $F_{i+k}(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{\int_0^1 t^{i+k} e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)}$

on aboutit à $F_{i+k}(\alpha_1, \alpha_2) - 2(F_i F_k)(\alpha_1,\alpha_2) +$

$$(F_i F_k)(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} \int_0^1 (t^i - F_i(\alpha_1,\alpha_2))(t^k - F_k(\alpha_1,\alpha_2)) e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2} dt$$

par linéarité de l'intégrale.

d'où le résultat demandé en remplaçant le membre de gauche par $\partial_i F_k(\alpha_1,\alpha_2)$, en accord avec 33. (a).

~~$V(\alpha_1, \alpha_2) = \ldots$~~ $\partial_1 G(\alpha_1,\alpha_2) = F_1(\alpha_1,\alpha_2) - u_1$

$\partial_2 G(\alpha_1,\alpha_2) = F_2(\alpha_1,\alpha_2) - u_2$

donc $\partial_{1,1}^2 G(\alpha_1,\alpha_2) = F_2(\alpha_1,\alpha_2) - (F_1(\alpha_1,\alpha_2))^2$

et $\partial_{2,2}^2 G(\alpha_1,\alpha_2) = F_4(\alpha_1,\alpha_2) - (F_2(\alpha_1,\alpha_2))^2$

d'après 33. (b).