Copie anonyme - n°anonymat :

D1-00225 Maths S

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 28 | **Session :** 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1

1.a) Soit $t \in [k, k+1]$.

$$k \leq t \leq k+1$$

donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $k > 0$)

donc par croissance de l'intégrale (car $k+1 \geq k$), puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ et les fonctions constantes ~~étant~~ sont continues sur $[k, k+1]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$$

donc $\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}}.$$

b) En sommant pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ dans l'inégalité obtenue en a) (car $n-1 \geq 1$)

on $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ par changement d'indice et par la relation de Chasles

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$

donc $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq S_n - \frac{1}{n}$

c) D'après l'inégalité obtenue en b),

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$,

$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq S_n - \frac{1}{n}$

donc $-1 - \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq -S_n \leq -\int_1^n \frac{1}{t}dt - \frac{1}{n}$

en sommant par $-S_n - \int_1^n \frac{1}{t}dt$

donc $\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t}dt$

d) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

On a $\int_1^n \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) - \ln(1)$
$= \ln(n)$.

Donc $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$

donc $\frac{1}{n\ln(n)} + 1 \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$. car $\ln(n) > 0$

Or $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par opérations sur les limites puis théorème d'encadrement,

$\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. a) rang(50) renvoie le plus petit rang n ($n \in \mathbb{N}^*$) pour lequel $S_n \geq 50$.

b) On a $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Ainsi, on a au voisinage de $+\infty$ $e^{S_n} = e^{\ln(n)}$
$= n$.

On peut donc penser que le rang pour lequel $S_n \geq 50$ est très élevé.
((S_n) converge lentement vers $+\infty$) en nombre.

3. a) $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$

$= \frac{1-t^n}{1-t}$ car $t \neq 1$ par somme d'une suite géométrique.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x$

$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt$.

Par linéarité de l'intégrale,

$\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\right) dt$

$= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$ d'après a)

$= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ par linéarité

$= -\ln(1-x) + \ln(1) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.}$

c) $\forall t \in [0,x]$,

$0 \leq t \leq x$

$0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$ par croissance

de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$

puis car $\frac{1}{1-t} > 0$

$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq x^n \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$ par

croissance de

l'intégrale

et linéarité (car $x > 0$)

donc $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq -x^n \ln(1-x).$

Or $|x| < 1$ donc $-x^n \ln(1-x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par théorème d'encadrement, il vient $\boxed{\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$

d) Par opérations sur les limites,

il vient $-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x).$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, en vertu de l' ~~inégalité~~ égalité obtenue en 3.b),

$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)$ converge et $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x)$.

On en déduit que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2

1. a) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) =]0,1[$.
Donc $Z_n(\Omega) \subset]0,1[$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Si $t \geq 1$:
$F_n(t) = P(Z_n \leq t)$
$= 1$.

Si $t \leq 0$:
$F_n(t) = P(Z_n \leq t)$
$= 0$.

Si $t \in]0,1[$:

$F_n(t) = P(\inf(X_1, \dots, X_n) \leq t)$

$= 1 - P(\inf(X_1, \dots, X_n) > t)$

$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}\right)$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t)$ par indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_1 > t)$ car $X_1, \dots, X_n$ ont même loi

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_1 \leq t))$

$= 1 - (1-t)^n$.

On remarque que $1 - (1-0)^n = 0$
et $1 - (1-1)^n = 1$.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{F_n(t) = (1 - (1-t)^n) \mathbb{1}_{[0,1]}(t).}$$

b) • Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
et $x \mapsto 1 - (1-x)^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Ainsi, F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (1), et est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

• Montrons que F_n est continue en 0 et en 1.

On a $F_n(t) \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0$

$F_n(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 1 - (1-0)^n = 0$

↑ (par continuité de $x \mapsto 1-(1-x)^n$ sur $[0,1]$)
et $F_n(0) = 1-(1-0)^n$
$= 0$.

De même, $F_n(t) \underset{t \to 1^+}{\longrightarrow} 1$,

$F_n(t) \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} 1-(1-1)^n = 1$

et $F_n(1) = 1-(1-1)^n = 1$.

Donc F_n est continue en 0 et en 1.

Ainsi, F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (2).

Donc F_n est la fonction de répartition d'une variable à densité :
Z_n est à densité.

c). $\forall x \in]0,1[$, $F_n'(x) = -(-n)(1-x)^{n-1}$

$= n(1-x)^{n-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $F_n'(x) = 0$.

Donc $f_n : x \mapsto n(1-x)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ est

une densité de Z_n.

2. On remplit :

return np.min(random(10))

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Si } t \in [0,1] :}$

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $F_n(t) = 1-(1-t)^n$

$= \cancel{1 - e^{n \ln(1-t)}}$

$= 1 - (1-t)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ car $|1-t| < 1$.

On a, si $t \geq 1$:

$$F_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

et si $t \leq 0$:

$$F_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit W ~~la~~ variable aléatoire certaine égale à 0.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(W \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Hormis en $t = 0$,

on a : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $F_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(W \leq t)$.

Comme 0 est un point de discontinuité de $t \mapsto P(W \leq t)$, (Z_n) converge en loi vers W.

4. a) $P(Z_n = X_n) = P(\inf(X_1, \dots, X_n) = X_n)$

$= P(\inf(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq X_n)$

$= P(Z_{n-1} \geq X_n)$

$= P(Z_{n-1} - X_n \geq 0)$.

Or $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et X_n est indépendante des $X_1, \dots, X_{n-1}$. D'après ce qui est admis par l'énoncé, Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~g_n est à densité~~ ~~$Z_n - U$~~ ~~$Z_{n-1} - X_n$~~ ~~a pour densité g_{n-1} (On admet que le résultat, admis reste vrai pour $n=1$,~~

~~ce qui nous permet de l'utiliser avec $n-1 \geq 1$~~

En supposant que le résultat est toujours vrai si $n=1$ (ce qui nous permet de l'appliquer avec $n-1 \geq 1$),

g_n est une densité de $Z_{n-1} - X$.

Ainsi, $P(Z_{n-1} - X_n \geq 0) = \int_0^{+\infty} g_{n-1}(x)dx$

$= \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx$

$= \left[\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1$

$= 0 - \left(-\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n}$.

Donc $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$.

b) On a $P(T_n = 0) = P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n} \neq 0$.

Donc T_n n'est pas à densité.

c). def VarT(n)
return VarZ(n) - rd.rand()

5. a) Elle ne semble pas discrète ~~car toutes les valeurs~~ parce qu'elle peut prendre toutes les valeurs de $[-1,0]$ comme montré en particulier graphiquement.

b) On a $P(T_{500}=0) = P(Z_{500}=X_{500})$

$= \frac{1}{500}$ d'après 4.a).

Or on a 20000 valeurs ici réparties
et $20000 \times \frac{1}{500} = 40$.

Comme on prend ici un peu plus que les variables valant 0 (le rectangle prend en compte d'autres valeurs proches de 0), et qu'il en contient près de 50, le résultat est bien cohérent avec ce qui a été obtenu en 4.a).

Problème

1. $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$
$= \dim E \times \dim \mathbb{R}$ d'après ce qui est admis
$= \dim E$ car $\dim \mathbb{R} = 1$.

2. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

Ainsi, si φ n'est pas nulle, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n-1$ et le théorème du rang assure que $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker}\varphi$
$= n - n+1$
$= 1$.

2ème méthode : on a $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$ donc $\dim \operatorname{Im}\varphi \leq 1$ donc $\dim \operatorname{Im}\varphi \in \{0,1\}$.

Si φ est nulle, alors $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim\{0\}$
$= 0$.

b) • φ peut être nulle, ~~car l'application linéaire nulle sur E~~
Le cas échéant, $\dim \operatorname{Im}\varphi = 0$ donc φ n'est pas surjective car $\operatorname{Im}\varphi \neq \mathbb{R}$.
• Si φ n'est pas nulle, alors $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$
$= \dim \mathbb{R}$.

Comme $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$, on a par égalité des dimensions $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$.
Donc φ est surjective.

c) Si φ n'est pas nulle, alors φ est surjective d'après b).
Ainsi, $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im}\varphi$
$= n-1$.

Donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E.

Partie I

3. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$.

$g(\lambda P_1 + P_2) = \int_0^1 (\lambda P_1 + P_2)(t)\,dt$ car $\lambda P_1 + P_2$ est continue sur $[0,1]$ comme application polynomiale

$= \lambda \int_0^1 P_1(t)\,dt + \int_0^1 P_2(t)\,dt$ par linéarité de l'intégrale
$\in \mathbb{R}$

$= \lambda g(P_1) + g(P_2)$.

Ainsi, g est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ donc $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.

b) On a par exemple $g(1) = \int_0^1 1\,dt$
$= 1$,

donc g n'est pas nulle.

D'après 2.c), $\operatorname{Ker} g$ est un hyperplan de E donc

$\dim \operatorname{Ker} g = p+1-1$
$= p$.

c) Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$g(Q_k) = \int_0^1 \left(t^k - \frac{1}{k+1}\right) dt$

$= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k+1}\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}$

$= 0$.

Donc $(Q_1, \dots, Q_p) \in (\operatorname{Ker} g)^p$.

La famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est en outre une famille de polynômes de degrés échelonnés.
Cette famille est donc libre.

La famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ de vecteurs de $\operatorname{Ker} g$ étant libre et composée de $p = \dim \operatorname{Ker} g$ vecteurs, c'est une base de $\operatorname{Ker} g$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 28	**Session :** 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P_1, P_2) \in E^2$.

$$f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(0)$$
$$= \lambda P_1(0) + P_2(0) \quad \in \mathbb{R}$$
$$= \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.

b) Soit $P \in \ker f$. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$.

On a $f(P) = 0$ donc $P(0) = 0$

donc $\sum_{k=0}^{p} a_k (0)^k = 0$

donc $a_0 = 0$.

Ainsi $P(X) = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k$, donc $P \in \mathrm{vect}(X, \dots, X^p)$.

Donc $\ker f \subset \mathrm{vect}(X, \dots, X^p)$.

La famille $(X, \dots, X^p)$ est composée de p vecteurs de degrés échelonnés donc ~~don~~ elle est libre, et ainsi $\dim \mathrm{vect}(X, \dots, X^p) = p$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Comme on a $f(1) = 1(0)$
$= 1$,

f est une forme linéaire non nulle donc d'après 2. c), $\ker f$ est un hyperplan de E.

Cela donne $\dim \ker f = \dim E - 1$
$= 4+1-1$
$= 4$
$= \dim \mathrm{Vect}(X \dots X^4)$.

Par conséquent, $\ker f = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^4)$, et $(X, \dots, X^4)$ étant libre et génératrice de $\ker f$, c'en est une base.

5.

a) D'après 2. c), f et g étant non nulles $\ker f$ et $\ker g$ sont des hyperplans.

Par conséquent, $\dim \ker f = \dim E - 1 = \dim \ker g$.

Comme $\ker f \subset \ker g$, il vient $\ker f = \ker g$.

b) On a $\dim \ker f = \dim E - 1 \neq \dim E$

mais $\ker f \subset E$.

Ainsi, $\ker f \subset E$ mais $\ker f \neq E$. Par conséquent,

il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \ker f$.

c) Remarquons que $0_E \in \ker f$ et $0_E \in E$.

Ainsi, x_0 est non nul (car $x_0 \notin \ker f$).

· Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$.

$\exists \mu \in \mathbb{R} / x = \mu x_0$. On a alors $f(x) = \mu f(x_0)$

donc $0 = \mu f(x_0)$.

Comme $x_0 \notin \ker f$, $f(x_0) \neq 0$.
Cela implique que $\mu = 0$.

Donc $x = 0$.
Ainsi, $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) \subset \{0\}$.
Or une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$.

Par conséquent, $\boxed{\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0_E\}}$. Donc $\ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = \ker f + \mathrm{Vect}(x_0)$

$\ker f$ étant un hyperplan de E, on a $\dim \ker f + \dim \mathrm{Vect}(x_0) = \dim E - 1 + 1$

donc $\boxed{\dim \ker f + \dim \mathrm{Vect}(x_0) = \dim E}$

(car x_0 est non nul, donc (x_0) est ~~libre~~ libre).

Donc $\boxed{E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0)}$.

d). Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in \ker f \times \mathrm{Vect}(x_0) / x = x_1 + x_2$.

(car $\ker f$ et $\mathrm{Vect}(x_0)$ sont supplémentaires dans E)

Donc $h(x) = g(x_0)(f(x_1) + f(x_2)) - f(x_0) g(x_1 + x_2)$

$= g(x_0) f(x_2) - f(x_0) g(x_2)$ car $\ker f = \ker g$ donc $x_1 \in \ker g$

Et : $\exists \lambda \in \mathbb{R} / x_2 = \lambda x_0$.

Donc $h(x) = \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0)$

$= 0$.

Donc h est nulle.

e) $\forall x \in E$, $g(x_0) f(x) - f(x_0) g(x) = 0$

$$g(x_0) f(x) = f(x_0) g(x)$$

$$\frac{g(x_0)}{f(x_0)} f(x) = g(x)$$ car $f(x_0) \neq 0$ (car $x_0 \notin \ker f$)

Donc $\frac{g(x_0)}{f(x_0)} f = g$.

Ainsi, les formes linéaires f et g sont colinéaires.

Partie II.

6. a) $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H, un hyperplan de E.

En particulier, c'est donc une famille libre de E.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_n \in E$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ~~soit~~ une base de E.

~~b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in E^2$. $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$~~

~~$f(\dots)$~~ ~~$\exists (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n / y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$.~~

~~Donc~~

On considère l'application f définie sur E où pour tout $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ ($(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$),

$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in E^2$. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ /

$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

$y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $f(\lambda x+y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda \lambda_k + \mu_k) e_k\right)$

$= \lambda(\lambda_n + \mu_n)\, e_n$

$= \lambda \lambda_n + \mu_n \in \mathbb{R}$

$= \lambda f(x) + f(y)$.

Donc f est linéaire et appartient à E^*.

~~Soit $x \in$~~ ~~On remarque que f et φ sont égales.~~

b) – $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$, $\exists (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ / $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$

$\exists (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ / $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$

Donc $\varphi(\lambda x + y) = \lambda \mu_n + \beta_n$

et $\lambda \varphi(x) + \varphi(y) = \lambda \mu_n + \beta_n$. Donc φ est bien linéaire, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. φ est donc bien définie.

– Or $\varphi(e_n) = 1 \neq 0$ donc φ est une forme linéaire non nulle.

D'après 2.c) $\ker \varphi$ est donc un hyperplan.

Donc $\dim \ker \varphi = \dim E - 1 = n-1 = \dim H$.

~~$= \dim$~~

De plus : $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$,

$\varphi(e_j) = 0$. $(e_1, \dots, e_{n-1})$ étant une famille génératrice de H, on en déduit que $H \subset \ker \varphi$.

Ainsi, $H = \ker \varphi$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. Soit $x \in \ker f$.

$f(x) = 0$ donc $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0)$

donc : $\forall j \in [\![1, p]\!], f_j(x) = 0$

donc $x \in \bigcap_{j=1}^{p} \ker(f_j)$.

Donc $\ker f \subset \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$.

$\forall j \in [\![1, p]\!], f_j(x) = 0$ donc $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0$,

donc $f(x) = 0$,

donc $x \in \ker f$.

Par double inclusion, $\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$.

8. a) f est surjective de $\mathbb{R}^p$ dans E.

Par définition : $\forall y \in \mathbb{R}^p, \exists x \in E / f(x) = y$.

Comme $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = \varepsilon_1$.

b) Soit $j \in [\![1, q]\!]$. Pour $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^q$, on note x_j un antécédent de ε_j par f. On a ainsi $f(x_j) = \varepsilon_j$.

(f étant surjective de $\mathbb{R}^q$ dans E)

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}^q$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_q f_q = 0_{E^*}$ $(*)$

On remarque que : $\forall j \in [\![1, q]\!]$,

$$f(x_j) = (f_1(x_j), \dots, f_q(x_j)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

où le 1 est à la j-ème position.

Donc : $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $\forall k \in [\![1, q]\!] \setminus \{j\}$, $f_k(x_j) = 0$,

et $f_j(x_j) = 1$.

Soit $j \in [\![1, q]\!]$.
En évaluant $(*)$ en x_j,

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f_i(x_j) = 0$$

d'où $\lambda_j f_j(x_j) = 0$
d'où $\lambda_j = 0$.

Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$.

Ainsi, $(f_1, \dots, f_q)$ est libre dans E^*.

9. a) Comme f n'est pas surjective, $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^q$.

On sait toutefois que $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^q$, donc que $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim \mathbb{R}^q$
$\leq q$.

Ainsi, $m < q$ donc $m \leq q - 1$ (car $m \in \mathbb{N}$).

b) Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $\operatorname{Im} f$.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_{m+1}, \dots, e_q) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)^{q-m}$ tels que

$(e_1, \dots, e_m, \dots, e_q)$ est une base de $\mathbb{R}^q$.

Si $m = q-1$:

~~Alors $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m) = \operatorname{Im} f$~~
~~et $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{q-1})$.~~

~~Comme sous-famille d'une famille libre de $\mathbb{R}^q$, $(e_1, \dots, e_{q-1})$ libre~~

$\operatorname{Im} f$ est alors un hyperplan car $(e_1, \dots, e_{q-1})$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^q$, $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^q$.

Si $m \leq q-2$:

On a $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m, \dots, e_{q-1})$.

Comme $(e_1, \dots, e_q)$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^q$), $(e_1, \dots, e_{q-1})$ est libre comme sous-famille d'une famille libre.
Ainsi, $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{q-1})$ est de dimension $q-1$ car $(e_1, \dots, e_{q-1})$ en est une base (elle en est libre et génératrice).

Par conséquent, $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^q$.

c) On appelle H un hyperplan dans lequel $\operatorname{Im} f$ est inclus, qui est $H = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{q-1})$.
Soit $x \in E$. On reprend l'application ℓ définie en 6.b) pour ce nouvel hyperplan H (un hyperplan de $\mathbb{R}^q$).

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

~~Comme $(f_1(x), \dots, f_q(x)) \in \mathbb{R}^q$, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$~~
~~tels que $(f_1(x) \dots f_q(x)) = (\mu_1, \dots, \mu_q)$.~~

$\cancel{= \sum_{i=1}^{q} \mu_i e_i}$

~~(où $(e_1, \dots, e_q)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^q$)~~

~~Donc~~

φ est donc un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$.

Comme $(f_1(x), \dots, f_q(x)) \in \mathbb{R}^q$,

il existe $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $(f_1(x) \dots f_q(x)) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i e_i$

où $(e_1, \dots, e_q)$ est la base ~~canonique~~ construite en 9. b) de $\mathbb{R}^q$

Donc $\varphi((f_1(x), \dots, f_q(x))) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \varphi(e_i)$

$= \mu_q \varphi(e_q)$

$= \mu_q \; (= f_q(x))$

Or $(f_1(x), \dots, f_q(x)) \in \ker \varphi$, donc $\mu_q = 0$.

Par conséquent : $\forall x \in E,\ f_p(x) = 0$.

Donc $f_p = 0_{E^*}$,
et on a ainsi $0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_{p-1} + 1 \cdot f_p = 0_{E^*}$.

Par contraposée de la définition d'une famille libre,

$(f_1, \dots, f_p)$ est liée.

~~10. a). Soit $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.~~

~~Soit $j \in [\![1, p]\!]$. f_j est une forme linéaire sur E. De plus, $(f_1 \dots f_p)$ est libre, donc f_j est non nulle (ou $(f_1 \dots f_p)$ serait liée).~~

~~Par conséquent, la question 2. b) assure que f_j est surjective.~~
~~Par conséquent, il existe $x_j \in$~~

Dans la question 9., on a démontré que si f n'est pas surjective, alors $(f_1 \dots f_p)$ est liée dans E^*.

Par contraposée, si $(f_1 \dots f_p)$ est libre dans E^*, alors f est surjective.

Donc f est surjective.

b) D'après 7., on a $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{1} \ker f_i\right) = \dim \ker f$.

Comme f est surjective, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^1$, donc $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \ker f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f$
$= n-1$

donc $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{1} \ker f_i\right) = n-1$.

III.

11. a) Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$.

$f_a(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y \rangle$

$= \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle \in \mathbb{R}$ par linéarité à droite du produit scalaire

$= \lambda f_a(x) + f_a(y)$.

Donc $f_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

b) Soit $x \in E$.

$x \in \ker f_a \iff \langle a, x \rangle = 0$

$\iff x \in \operatorname{vect}(a)^{\perp}$ car (a) est génératrice de $\operatorname{vect}(a)$

Donc $\operatorname{vect}(a)^{\perp} = \ker f_a$

c) Supposons que $f_a = 0_{E^*}$. $\forall x \in E$, $f_a(x) = 0$

$\forall x \in E$, $\langle x, a \rangle = 0$

donc $a \in E^{\perp}$
donc $a \in \{0_E\}$
donc $a = 0_E$.

12. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_1, a_2) \in E^2$.

$\forall x \in E$, $\Phi(\lambda a_1 + a_2)(x) = f_{\lambda a_1 + a_2}(x)$

$= \langle \lambda a_1 + a_2, x \rangle$

$= \lambda \langle a_1, x \rangle + \langle a_2, x \rangle$ par linéarité ~~à dr~~ gauche du produit scalaire

$= \lambda \Phi(a_1)(x) + \Phi(a_2)(x)$.

$= \lambda f_{a_1}(x) + f_{a_2}(x)$.

Donc $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

b) Soit $a \in \operatorname{Ker} \Phi$.

$\Phi(a) = 0_{E^*}$ donc $f_a = 0_{E^*}$. D'après 11. c), $a = 0_E$.

Donc $\operatorname{Ker} \Phi \subset \{0_E\}$. Comme $\operatorname{Ker} \Phi$ est un espace vectoriel, $0_E \in \operatorname{Ker} \Phi$ d'où $\operatorname{Ker} \Phi = \{0_E\}$.

Donc Φ est injective. Comme $\dim E = \dim E \dim \mathbb{R}$
$= \dim E^*$,
d'après le corollaire du théorème du rang, Φ est bijective, donc c'est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, E^*)$.

c) Soit $\varphi \in E^*$. Φ étant ~~un~~ bijective, il existe par définition un unique $a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$.

On a alors : $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \Phi(a)(x)$
$= \langle a, x \rangle$.

CQFD.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13.

a) • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = Tr({}^t(\lambda A + B)C)$$

$= Tr((\lambda\, {}^tA + {}^tB)C)$ par propriétés de la transposée

$= \lambda Tr({}^tAC) + Tr({}^tBC)$ par linéarité de la trace.

Donc $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche.

• Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$.

$Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB))$ par propriété de la trace

$= Tr({}^tB\,{}^t({}^tA))$

$= Tr({}^tBA)$.

Donc $\langle , \rangle$ est symétrique. Elle est donc bilinéaire.

• Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$\langle A, A \rangle = Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{p} [{}^tAA]_{i,i}$

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} [{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i}$

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} [A]_{j,i}^2 \geq 0$.

Donc $\langle , \rangle$ est positive.

Si $\langle A,A\rangle = 0$, alors $Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} [A]_{j,i}^2 = 0$.

Par somme de termes positifs ou nuls :
$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $[A]_{j,i}^2 = 0$

i.e. $[A]_{j,i} = 0$.

Donc $A = 0$. Ainsi, ~~donc~~ $\langle , \rangle$ est défini.

Donc $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.

b). On considère les résultats de la question 12. avec l'espace $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle , \rangle$.

D'après 12.c), si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, alors il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \langle B, M\rangle = Tr({}^tBM).$$

On pose alors $A = {}^tB$, et on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = Tr(AM).$$

* * * * * * * *

N.B. : pour la question 13.a), on peut montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{p}(\lambda [A]_{i,i} + [B]_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{p} [A]_{i,i} + \sum_{i=1}^{p} [B]_{i,i} = \lambda Tr(A) + Tr(B)$$

D'où la linéarité de Tr.

et $Tr({}^tA) = \sum_{i=1}^{p} [{}^tA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} [A]_{i,i} = Tr(A)$