Copie anonyme - n°anonymat :

E8-00041 Maths E

Code épreuve : 296 **Nombre de pages :** 23 **Session :** 2023

Épreuve de : Maths appliquées ECML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2

Partie I

1) a) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, si l'on note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A-2I$, on voit que $C_1 = C_2 = C_3$, ce qui assure que $\boxed{rg(A-2I) = 1}$ car le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul.

b) $rg(A-2I) = 1 \neq 3$ donc $A-2I$ est inversible
donc $\boxed{2 \text{ est valeur propre de } A}$

Et $(A-2I)X = 0 \iff x+y+z = 0$ (avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)
$\iff x = -y-z$

D'où : $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $E_2(A)$ et $\boxed{\dim(E_2(A)) = 2}$

c) Comme vu ci-avant, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_2(A)$.

d) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme elle est symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3. Comme $\dim(E_2) = 2$, A possède une autre unique valeur propre ~~de dimension~~ dont le sous-espace propre associé est de dimension 1.

2) a) Puisque l'on multiplie M par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les coordonnées de MU représentent la somme des coefficients ligne par ligne de M.

b) $$AU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$$

Or $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui assure que U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5.

Et $A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Donc $(A-5I)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -3y + 3z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x = 2y - z = 2z - z = z \end{cases}$$

D'où : $E_5(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{vect}(U)$

Or, $\underline{U \text{ forme une base de } E_5}$ car il est $\underline{\text{non nul}}$.

3) A est symétrique donc diagonalisable. Donc il existe P inversible et Δ diagonale telles que $A = P\Delta P^{-1}$ d'après la formule de changement de base. Δ contient en diagonale les valeurs propres de A et P est obtenue par concaténation des bases de E_2 et E_5.

On a alors : $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

4) On a un système du type $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 3x = y + z \\ y' - 3y = x + z \\ z' - 3z = x + y \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296
Nombre de pages : 23
Session : 2023

Épreuve de : Maths appliquées EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie III

6) λ est valeur propre de B ssi $\det(B-\lambda I) = 0$

ssi $(-1-\lambda)(3-\lambda)+4\times 1 = 0$

ssi $\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4 = 0$

ssi $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

ssi $(\lambda - 1)^2 = 0$

ssi $\lambda = 1$ donc $\boxed{Sp(B) = \{1\}}$

7) On suppose B diagonalisable. Alors, il existe P inversible et Δ diagonales telles que $B = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Donc $B = P\Delta P^{-1} = PIP^{-1} = I$

Or $B \neq I$, donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable}}$ en vertu du raisonnement par l'absurde.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8) a) $a v_1 + b v_2 = 0 \iff \begin{cases} 2a - b = 0 \\ -a = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{B}$ est une famille libre

De plus, $\left.\begin{array}{l} \mathrm{card}(\mathcal{B}) = 2 \\ \dim(\mathbb{R}^2) = 2 \end{array}\right)$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$

b) $f(v_1) = B v_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$

$f(v_2) = B v_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$

Donc $\boxed{T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}}$

c) On a $\cdot\, B = \mathcal{M}_{B}(f)$ avec B la base canonique

$\cdot\, T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

Donc en posant $\boxed{Q = Q_{B,\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}}$ la matrice de passage de B à $\mathcal{B}$, La formule de changement de base assure que $B = QTQ^{-1}$.

9)

Exercice 1 :

1) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

Et $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2} = \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

$$= \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

f' est du signe de $-x-1$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$.

$-x-1 \geq 0 \iff x \leq -1$

D'où :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	0

Et $\lim_{x \to 0} e^{-x} = 1$ donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ par quotient

De plus, $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$

b) Procédons par récurrence. Posons P_n : " u_n est bien défini et $u_n > 0$ " $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a $u_0 = 1$ donc u_0 est bien défini, $u_0 > 0$) P_0 est vraie

Supposons P_n vraie pour un certain entier n.

On a : u_n est bien défini, $u_n > 0$) par hypothèse de récurrence

Alors $\frac{e^{-u_n}}{u_n}$ est bien défini comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a $u_n > 0$

donc $f(u_n) > 0$ d'après le tableau de variations

donc $u_{n+1} > 0$

Ainsi, le principe de récurrence permet de conclure :

$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 23	Session : 2023

Épreuve de : Maths appliquées EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

2)a)
```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u <= a :
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

b) On déduit de ces résultats u_6 est le plus petit terme de la suite telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement supérieure à 1 000 000.

De même, u_5 est le plus petit terme de la suite telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit supérieure ou égale à 10^{-6}.

c)
```
import numpy as np

def u (n) :
    u = 1
    for i in range (1, n+1) :
        u = (np.exp(-1*u)) /u
        n = n+1
    return (u)
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) a) g est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme différence de telles fonctions.

$\forall x \in [0;+\infty[$, $g'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{<0} \underbrace{-2x}_{\leq 0} < 0$

Donc on a :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	1	0	$-\infty$

$g(0) = e^0 - 0 = 1$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - x^2 = -\infty$ par différence

g est strictement décroissante et continue comme différence de fonctions continues sur $[0;+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$ d'après le théorème éponyme.

b) $f(x) - x = \frac{e^{-x}}{x} - x = \frac{e^{-x} - x^2}{x} = \frac{g(x)}{x}$

~~Donc $(f(x)-x)' = \underbrace{f'(x)}_{<0} - \underbrace{1}_{<0} < 0$~~

Donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)-1$		$-$	
$f(x)-x$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - x = +\infty$ via 1)a)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$ par différence (via 1)a))

Donc $f(x) = x$

Donc $f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

$\iff \dfrac{g(x)}{x} = 0$

$\iff g(x) = 0$ car $x > 0$

Or on a vu que g établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;1]$ qui contient 0. Donc $f(x) = x$ possède une unique solution α qui appartient à $]0\,;+\infty[$ car $g(0) = 1 \neq 0$.

c) On a $g(\alpha) = 0$

Et $g(1) = \dfrac{1}{e} - 1 = \dfrac{1-e}{e}$ or $\dfrac{1}{e} \approx \dfrac{1}{2{,}7}$ donc $\dfrac{1}{e} - 1 < 0$

Et $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \dfrac{1}{e^2} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{e}}} - \dfrac{1}{e^2} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} - \left(\dfrac{1}{e}\right)^2$

Or, $e \simeq 2,7 > 2$

donc $\frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 2$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < \left(\frac{1}{e}\right)^2$

donc $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^2 < 0$

Mon raisonnement n'aboutit pas : j'admets $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.

Ainsi, on a $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$

donc $\underline{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$ par décroissance stricte de g sur $\mathbb{R}_+$

4)a) On a :

$u_1 = f(u_0) = \frac{e^{-1}}{1} = \frac{1}{e}$

$u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}} \times e = e^{\frac{e-1}{e}}$

Or, on sait que $e-1 \simeq 1,7 > 0$ donc $\frac{e-1}{e} > 0$

Donc $e^{\frac{e-1}{e}} > e^0 = 1 = u_0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

D'où : $\underline{u_2 > u_0}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 23 | Session : 2023

Épreuve de : Maths appliquées EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) Procédons par récurrence. On pose H_n : " $u_{2n+2} \geq u_{2n}$ " $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a $u_2 > u_0$ via 4 a) donc $u_{2\times 0+2} \geq u_{2\times 0}$

donc P_0 est vraie

Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n.

On a $u_{2n+2} \geq u_{2n} > 1$

~~donc~~ $\cancel{f(u_{2n+2})}$

donc $u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$

~~donc~~ $\cancel{f(u}$ Mon raisonnement n'aboutit pas.

5) b) h est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de telles fonctions.

. Et $h(0) = 0$

. $\cancel{\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} f\circ f(x) = \lim_{x\to 0} f(f(x))}$

5) a) $h(x) = f(f(x)) = \dfrac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}/x} = \dfrac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}} \times x$

$$= e^{\frac{-e^{-x}}{x}+x} = e^{\frac{-e^{-x}+x^2}{x}} = e^{-\frac{(e^{-x}-x^2)}{x}}$$

$$\boxed{= e^{-\frac{g(x)}{x}}}$$

5) b) (suite)

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{g(x)}{x}}$$

Or $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ donc $\lim_{x\to 0} -g(x)/x = -\infty$ par quotient

Donc $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{g(x)}{x}} = 0$ par composition

$$\underline{= \lim_{x\to 0} h(x) = h(0)}$$

Donc $\boxed{h \text{ est continue en } 0.}$

Finalement, $\boxed{h \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$

c) $h(x) = x \iff h(x) - x = 0$

$$\iff e^{-\frac{g(x)}{x}} = \cancel{0}\ x$$

$$\iff e^{-(f(x)-x)} = \cancel{0}\ x$$

$$\iff -f(x) + x = \ln(x) \iff f(x) = x - \ln(x)$$

car $x > 0$

donc $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

D'où :

x	0 $+\infty$

(impossible)

Exercice 3 :

Partie I

1)a) h est continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de telles fonctions bien définies car $x > 0$ donc $\ln(x)$ existe.

$\cdot\ h(0) = 0$

$\cdot\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée

donc h est continue en 0

Donc h est continue sur $\mathbb{R}^+$

b) $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x \ln(x) - 0}{x} = \ln(x)$

Or $x \mapsto \ln(x)$ n'est pas dérivable en 0 donc h non plus

(car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$)

c) · Si $x = 0$, $h(x) = 0 \iff x = 0$

· Si $x > 0$, $h(x) = 0 \iff x\ln(x) = 0$

$\iff \ln(x) = 0$ car $x > 0$

$\iff x = 1$

Donc les antécédents de 0 par h sont $\{0; 1\}$.

2) g est dérivable sur $[0;1]$ comme différence de telles fonctions.

Et $\forall x \in [0;1]$, $g'(x) = -h'(x) - h'(1-x)$

$$= -\left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - \left(-1 \times \ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x}\right)$$

$$= -\ln(x) - 1 - \left(-\ln(1-x) - 1\right)$$

$$= -\ln(x) \cancel{-1} + \ln(1-x) \cancel{+1}$$

$$= \ln(1-x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

Et $\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \geq 0 \iff \frac{1-x}{x} \geqslant 1 \iff 1-x \geqslant x$

$\iff 2x \leqslant 1$

$\iff x \leqslant \frac{1}{2}$

D'où :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 23 | Session : 2023

Épreuve de : Maths appliquées EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a $g(0) = -h(0) - h(1)$

$= 0 - 0 = \boxed{0}$

$g(1) = -h(1) - h(0) = \boxed{0}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = -h\left(\frac{1}{2}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right)$

$= -2h\left(\frac{1}{2}\right)$

$= -2 \times \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\ln(1) - \ln(2)\right)$

$= \boxed{\ln(2)}$

Partie II

3) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$

$H(U) = -\sum_{i=1}^{n} h\left(P(U=i)\right)$

$= -\sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right)$

$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\frac{1}{n} > 0$

$= -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} 1$

$= -\frac{n}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\left(\ln(1)-\ln(n)\right)$

$= \boxed{\ln(n)}$

4) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$\cancel{H(X) = -\sum_{i=0}^{1} h(1)}$

$H(X) = -h\left(P(X=0)\right) - h\left(P(X=1)\right)$

$= -h(p) - h(1-p)$ car $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$= g(p)$

Or, on a vu en 2) que $\forall p \in [0;1]$, $g(p) \leq \ln(2)$ et qu'il y a égalité ssi $p = \frac{1}{2}$ car $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

Donc $\boxed{H(X) \leq \ln(2) \text{ et } H(X) = \ln(2) \iff p = \frac{1}{2}}$.

5) a) $X_1(\Omega) = \{0;1\}$
$X_2(\Omega) = \{0;1\}$ donc $\boxed{(X_1+X_2)(\Omega) = \{0;1;2\}}$

1) $p = P(Z=1)$

$[Z=1] =$ " $X_1 + X_2$ est impair " $=$ " $X_1 + X_2$ vaut 1 "

Donc $[Z=1] = \left([X_1=0] \cap [X_2=1]\right) \cup \left([X_1=1] \cap [X_2=0]\right)$

Donc $P([Z=1]) = P\left([X_1=0] \cap [X_2=1]\right) + P\left([X_1=1] \cap [X_2=0]\right)$

car les événements sont incompatibles

$= P([X_1=0])P([X_2=1]) + P([X_1=1])P([X_2=0])$ par indépendance

$= (1-p_1) \cdot p_2 + p_1 \cdot (1-p_2)$

$= p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$

$= p$

c) $1-2p = 1-2\left(p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)\right)$

$= 1-2(p_1 - p_1p_2 + p_2 - p_1p_2)$

$= 1-2(p_1 - 2p_1p_2 + p_2)$

$= 1-2p_1 + 4p_1p_2 - 2p_2$

Or, $(1-2p_1)(1-2p_2) = 1-2p_1 + 4p_1p_2 - 2p_2$

Donc on a bien $\underline{1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)}$

6) a) S_n est la somme de n loi de Bernoulli de paramètre p.

~~Le cours assure que $S_n \hookrightarrow B(np)$~~

$S_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ Donc $\forall k \in [\![0;n]\!]$:

$$P(S_n = k) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X_k = k) \quad \text{par incompatibilité}$$

$$\cancel{= n\, (P(X=1)}$$

$$\cancel{= n \quad \text{donc } S_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\ )}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P((X=0)\cup(X=1))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (P(X=0) + P(X=1))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= n$$

III.

7) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$

donc une densité de U est
$$\cancel{f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}}$$

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 23	Session : 2023

Épreuve de : Maths appliquées EML

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

~~Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t))\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h($~~

Or, $\int_{-\infty}^{a} h(f(t))\,dt = \int_{b}^{+\infty} h(f(t))\,dt$

$$= \int_{b}^{+\infty} h(0)\,dt = 0$$

Et $\int_a^b h(f(t))\,dt = \int_a^b h\left(\frac{1}{b-a}\right) dt$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) dt$$

$$= \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) [t]_a^b$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) (\cancel{b-a})$$

$$= \ln(1) - \ln(b-a) = -\ln(b-a)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

bien défini car $a < b$ donc $b - a > 0$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t))\,dt$ converge et vaut $\ln(b-a)$.

Donc U admet une entropie

b) $H(U) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t))\,dt = -\ln(b-a)$

8) a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Donc une densité de X est $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t}\,dt$.

9) a) $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$

$\underline{E(X) = m}$ $\underline{V(X) = \sigma^2}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = E(X^2)$

On sait que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Koenig-Huygens)

Donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$

$= \underline{\sigma^2 + m^2}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(\phi(t))\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{\sigma^2 \times 2}}\right) dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{\sigma^2 \times 2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) dt$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \left(-\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) + \ln\left(e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right)\right) dt$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \left(-\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751