ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

ADRIEN

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 09

Numéro de table 2

Exercice 1 :

Partie 1

1. a) : $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$$B_X(\ell) = P(X > \ell)$$
$$= \sum_{i=\ell+1}^{+\infty} P(X=i)$$
$$= \sum_{i=\ell+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p$$
$$= p \times \sum_{i=\ell}^{+\infty} (1-p)^{i} \text{ (changement d'indice)}$$
$$= p(1-p)^{\ell} \times \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{i} \text{ (2ème changement d'indice)}$$

Or $p \in]0;1[$
donc $(1-p) \in]0;1[$
On reconnait donc une série géométrique convergente de raison $1-p$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$= p(1-p)^{k} \times \frac{1}{1-(1-p)}$$

D'où pour tout k de $\mathbb{N}$ $R_X(k) = (1-p)^k$

1. c): $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $R_X(k-1)$ est différent de zéro et on a :

$$\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1-p$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p$$

2. a): $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $R_X(k) = P(X > k)$

et $R_X(k-1) = P(X > k-1)$

$= P(X \geq k)$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

D'où $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X > k)$

$= R_X(k-1) - R_X(k)$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$$

2. c): (⇒) Supposons que X et Y suivent la même loi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = P(Y=k)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(Y=k)$$

$$\Leftrightarrow \quad r_X(k) = r_Y(k)$$

Donc si X et Y suivent la même loi on a
$r_X(k) = r_Y(k)$ (Si $k=0$ on a dans tous les cas $r_X(k) = r_Y(k)$ puisque X et Y ont comme support $\mathbb{N}^*$)

(⇐) Réciproquement, supposons que pour tout k de $\mathbb{N}$ $r_X(k) = r_Y(k)$

On a donc pour tout k de $\mathbb{N}^*$
$$r_X(k-1) = r_Y(k-1)$$
D'après 2. a) :

$$r_X(k-1) - r_X(k) = r_Y(k-1) - r_Y(k)$$
$$\Leftrightarrow \quad P(X=k) = P(Y=k)$$

Donc pour tout entier naturel k X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout entier naturel k $r_X(k) = r_X(k)$.

Partie II

3. a) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)a - b}{(n+1)!}$

Par identification :

$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $a = 1$ et $b = 1$

3. b) : Soit $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(N+1)!} \text{ (par télescopage)}$$

Or $\lim\limits_{N \to \infty} 1 - \dfrac{1}{(N+1)!} = 0$

Donc $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{n}{(n+1)!}$ est convergente et sa somme vaut 1.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 2

5. a): $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ Donc $(X+1)(\Omega) = [\![2 ; +\infty[\![$

$\forall n \in [\![2;+\infty[\![\ P(X+1 = n) = P(X = n-1)$
$= \frac{n-1}{n!}$

Donc $n P(X+1 = n) = n \times \frac{n-1}{n!}$

$= \frac{n-1}{(n-1)!}$

Soit $N \geq 2$, $X+1$ admet une espérance si, et seulement si, la serie de terme générale $n P(X+1=n)$ est (absolument) convergente :

$\sum_{n=2}^{N} n P(X+1=n) = \sum_{n=2}^{N} \frac{n-1}{(n-1)!}$

$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!}$

$= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!}$

$= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1^n}{n!}$

On reconnait le terme général d'une serie

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

exponentielle de paramètre 1, qui est donc convergente. $X+1$ admet donc une espérance

$$E(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{(par le cours)}$$

D'où $E(X+1) = e$

X est donc la différence de $X+1$ et de 1 qui admettent toutes deux une espérance donc X admet une espérance.

Par linéarité de l'espérance $E(X) = e - 1$.

5. $(X-1)(\Omega) = \mathbb{N}$ et $(X+1)(\Omega) = [2; +\infty[$

Donc $((X-1)(X+1))(\Omega) = [0; +\infty[$

Soit $N \geq 0$, par le théorème de

$$\sum_{n=1}^{N} (n-1)(n+1) \times P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n+1) \times \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} \quad \text{On reconnait le terme générale}$$

d'une série exponentielle de paramètre 1 donc par le cours et par le théorème de transfert
$(X+1)(X-1)$ admet une espérance
et $E((X+1)(X-1)) = e$.

Par linéarité de l'espérance on a :

$$E((X+1)(X-1)) = E(X^2-1)$$
$$= E(X^2) - 1$$

X admet son moment d'ordre 2 et donc une variance et par König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= e+1 - (e-1)^2$$
$$= e+1 - (e^2 - 2e + 1)$$
$$= -e^2 + 3e$$
$$= e(3-e)$$

(Puisque $e<3$ la variance est bien positive)

D'où $V(X) = e(3-e)$

Partie III :

5. $\forall \ell \in \mathbb{N}^* \quad P_{(X>\ell-1)}(X>\ell) = 1 - a_\ell$

d'après l'énoncé

Par Bayes, puisque $P(X>\ell-1)$ est non nul :

$$P_{(X>\ell-1)}(X>\ell) = \frac{P((X>\ell)\cap(X>\ell-1))}{P(X>\ell-1)}$$
$$= \frac{P(X>\ell)}{P(X>\ell-1)}$$

$$= \frac{R_X(\ell)}{R_X(\ell-1)}$$

D'où pour tout ℓ non nul $R_X(\ell) = (1-\alpha_\ell) R_X(\ell-1)$

6. Montrons par récurrence cette propriété (sur ℓ non nul)

Initialisation :

$\ell = 1$ $\quad R_X(1) = 1-\alpha_1$ puisque $R_X(0) = 1$

Et $\prod_{i=1}^{1}(1-\alpha_i) = 1-\alpha_1$

La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, non fixé

Supposons la propriété vraie pour ℓ et montrons qu'alors elle est vraie pour au rang $\ell+1$.

Par l'hypothèse de récurrence :

$$R_X(\ell+1) = (1-\alpha_{\ell+1}) R_X(\ell) \quad \underline{5.}$$

$$= (1-\alpha_{\ell+1}) \prod_{i=1}^{\ell}(1-\alpha_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{\ell+1}(1-\alpha_i)$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

La propriété est initialisée et héréditaire donc par le principe de récurrence elle est vraie pour

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 2

tout k non nul.

7. D'après 2.a, pour tout entier k non nul

$$P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) \quad \underline{6.}$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)\left(1-(1-\alpha_k)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)(\alpha_k)$$

D'où pour k non nul $P(X=k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)$

8. a) On a alors par 7.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = p \times \prod_{i=1}^{k-1}(1-p)$$

$$= p \times (1-p)^{k-1}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

8- b): Toujours d'après 7.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = \frac{k}{k+1} \times \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1} \times \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1} \times \prod_{i=2}^{k} \left(\frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k!}$$

D'où pour tout k non nul

$$P(X=k) = \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{(k-1)!}$$

Partie IV :

9. a): SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs

9. b): SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs
WHERE annee-panne = annee-fabrication + 1

9. c): En divisant le résultat de la requête 2. par le résultat de la requête n° 1. on peut estimer la probabilité $(1-p)$ parce qu'un

ordinateur cesse de fonctionner au bout d'un an. Donc en faisant 1 moins ce résultat, on peut estimer p.

10-

11- a): Le résultats de cette requête permet d'obtenir la moyenne de la durée de vie de tous les ordinateurs construits. On devrait alors avoir comme résultat un nombre égal à $\frac{1}{p}$ (l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p).

11- b): Si l'on peut réellement représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p la première requête devra être égal à p, la suivante à $p(1-p)$ jusqu'à $p(1-p)^{23}$

Exercice 2:

Partie I:

1. a): $$t^2 \times e^{-2at-t^2} = t^2 \times e^{(-\frac{2a}{t}-1)t^2}$$
$$= t^2 \times e^{-(\frac{2a}{t}+1)t^2}$$

Avec $\frac{2a}{t}+1 \geq 1$

Donc par croissance comparée
$$\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2(\frac{2a}{t}+1)} = 0$$

D'où $e^{-2at-t^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

1- e). Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par critère de négligeabilité de fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ $\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ est donc convergente.

Or $\int_0^1 e^{-2at-t^2}\,dt$ est convergent comme intégrale sur des bornes finies d'une fonction continue et définie sur ses bornes.

D'où par Chasles d'intégrales convergentes, J_a est convergente

2. I_a est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ car pour tout $t \geq x$ et $x \in \mathbb{R}_+$

$$e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-2at-t^2}$$

et donc par critère de comparaison d'intégrale à fonction continue et positive I_a converge sur $\mathbb{R}_+$ puisque J_a converge.

Soit $A \geq x$

~~$t \mapsto e^{2a(x-t)-t^2}$ est définie sur~~

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Math appliqué

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 2

$t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_0^A e^{-2at-t^2}dt$ aussi.

Soit $u=-t$ (changement de variable licite car la dernière fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$)

$\frac{du}{dt} = -1$

$\Leftrightarrow du = -dt$

$$\int_0^A e^{-2at-t^2}dt = \int_0^{-A} e^{2au-u^2} - du$$

$$= \int_{-A}^0 e^{2au-u^2} du$$

Or $\lim\limits_{u \to -\infty} u^2 e^{-u^2(1-\frac{2a}{u})} = 0$ par croissances comparées

donc $e^{-u^2(1-\frac{2a}{u})} \underset{u \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$

Et $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{u^2} du$ converge comme intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$. D'où par critère de négligeabilité d'intégrales à fonctions continues et positives $\int_{-\infty}^{1} e^{2au-u^2} du$ converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

et donc par Chasles $\int_{-\infty}^{0} e^{-2au-u^2} du$ aussi

$g(x) = \int_{x}^{0} e^{-2au-u^2} du$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}_-$ et puisque $x \mapsto e^{2ax}$ est aussi définie sur $\mathbb{R}_-$

$e^{2ax} \int_{x}^{0} e^{-2au-u^2} du$ est définie sur $\mathbb{R}_-$ et donc I_a est bien définie sur $\mathbb{R}$ avec le premier résultat.

3- a) : Soit $A \geq x$

$$\int_{x}^{A} e^{-2at-t^2} dt = \left[\frac{1}{-2a-2t} e^{-2at-t^2} \right]_{x}^{A}$$

$$= \frac{1}{-2a-2A} e^{-2aA-A^2} - \frac{1}{-2a-2x} e^{-2ax-x^2}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} - \frac{1}{2a-2x} e^{-2ax-x^2}$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

D'où ~~pour tout~~ $\lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0$

3. b): $a \geq 0$ et $x \leq t$ ($t \in [x; +\infty[$)

Donc $2a(x-t) \leq 0$

et donc $2a(x-t) - t^2 \leq -t^2$

$\Leftrightarrow e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2}$ par bijection croissante de

Et $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente sur $\mathbb{R}$ par critère de négligeabilité de fonction continue et positive puisque $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge

$I_a(x)$ aussi d'après 2.

D'où par croissance de l'intégrale avec ses bornes dans l'ordre croissant de fonction continue sur $[x; +\infty[$ on a :

$I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ pour tout réel x.

3. c): Pour $a \geq 0$:

$$0 \leq I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$\leq$ car I_a est l'intégrale avec ses bornes dans le sens croissant d'une fonction positive sur $[x; +\infty[$

Soit $A \geq x$:

$$\int_x^A e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right]_x^A$$

$$= -\frac{1}{2A} e^{-A^2} + \frac{1}{2u} e^{-u^2}$$

$$\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2u} e^{-u^2}$$

$$\underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où par encadrement $\lim_{u \to +\infty} I_a(u) = 0$ quand a positif.

Soit $a < 0$ $t \in [u; +\infty[$ et u positif

$$-2a(u-t) - t^2 \leq -2at - t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2a(u-t)-t^2} \leq e^{-2at-t^2}$$ par bijection croissante de $u \mapsto e^u$ sur $\mathbb{R}$

Par croissance de l'intégrale (avec ses bornes dans l'ordre croissant) qui sont toutes les deux convergentes :

$$\Leftrightarrow \quad I_a(u) \leq \int_u^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$$

Or $I_a(u) \geq 0$ (car $I_a(u)$ est l'intégrale avec ses bornes dans l'ordre croissant d'une fonction positive)

Puisque $\lim_{u \to +\infty} \int_u^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0$ (quelque soit a donc pour $a < 0$ cela fonctionne

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Math appliqué

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 03

Numéro de table 2

d'après 3.a)

Par encadrement, pour $a<0$

$\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

Pour tout réel a, on a bien $\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$

Partie II :

4. D'après le cours
$\{y_\lambda(t) = \lambda e^{2at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$
est l'ensemble des solutions de (2)

5. a) : $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue et définie sur $\mathbb{R}_+$ (*) donc F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$)
(F_a est la primitive de $t\mapsto e^{-2at-t^2}$ qui s'annule en 0)
(*) Comme composée de $t \mapsto e^t$ et $t\mapsto -2at-t^2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

toutes deux définies et continues sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}$

S. C): Si $x \geq 0$

$J_a - F_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ par Chasles d'intégrale convergentes

$\Leftrightarrow e^{2ax}(J_a - F_a(x)) = I_a(x)$

Si $x < 0$

$I_a(x) = \int_x^0 e^{2a(x-t)-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$

par Chasles car les deux intégrales convergent

$= e^{2ax}\left(\int_x^0 e^{-2at-t^2} dt + J_a\right)$

$= e^{2ax}\left(J_a - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt\right)$

D'où $I_a(x) = e^{2ax}(J_a - F_a(x))$ pour $x < 0$

Pour tout réel x on a donc bien

$$I_a(x) = e^{2ax}(J_a - F_a(x))$$

5. c) : F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$

J_a est convergente, elle a donc une valeur constante et est donc dérivable.

$x \mapsto e^{2ax}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto 2ax$ par $x \mapsto e^x$ toutes deux deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

I_a est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad I_a'(x) = 2ae^{2x}(J_a - F_a(x)) + e^{2ax}(-F_a'(x))$$

$$= 2ae^{2x}(J_a - F_a(x)) - e^{-x^2} \quad (5.a)$$

$$= 2a\, I_a(x) - e^{-x^2}$$

I_a est donc bien solution de l'équation différentielle 1.

6. Par le cours on a alors grâce à 4. et 5.c :

$\{y(x) = \lambda e^{2ax} + I_a(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des solutions de (1).

7. a) : $a < 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$ d'après 3.c

Donc pour $a<0$, l'ensemble des solutions est le même qu'en 5.

b): Si $a=0$

$$\{y(x) = \lambda + I_0(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(x) = \lambda + \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0$

Donc si $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ on doit avoir $\lambda = 0$

D'où $y(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

c): $a>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$ (3-c)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda e^{2ax} = 0$

$\iff \lambda = 0$

Alors $y(x) = I_a(x)$

Partie III

8- a): D'après le cours :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+a)^2}{1/2}}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

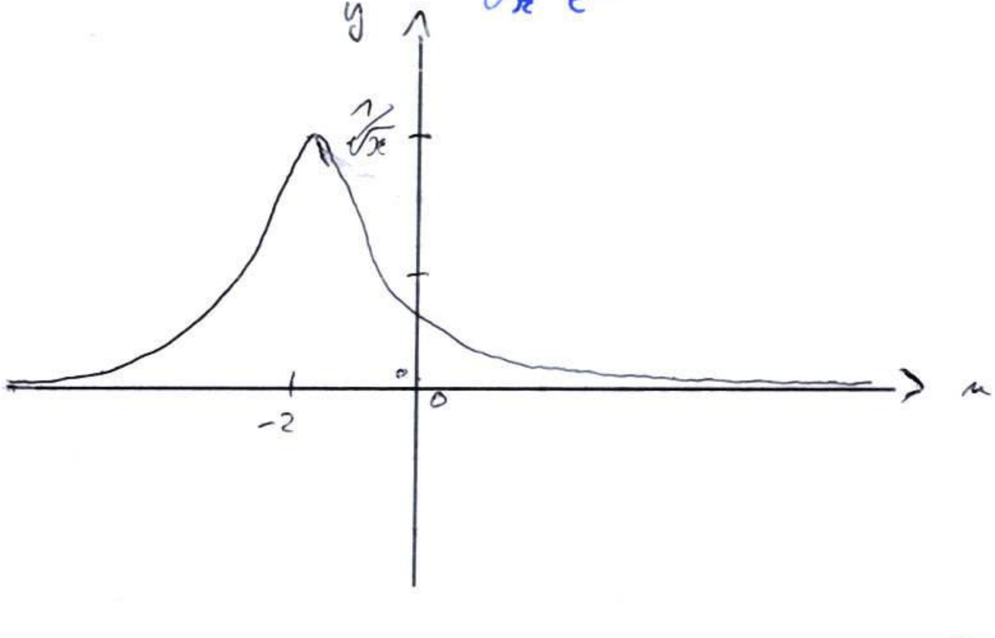
Numéro de table 2

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+a)^2}$ est une

densité de X.

7- e) : $a = 2 \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, e^{(x+2)^2}}$$



Preuve :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X'(x) = -2(x+2)\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2}$

car f_X dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$f'_X(x) > 0 \iff -2(x+2) > 0$ car $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2} > 0$

$\iff -2x > 4$

$\iff x < -2$

f_X admet donc un maximum global en -2 $f_X(-2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\lim_{x \to +\infty} f_X(x) = \lim_{x \to -\infty} f_X(x) = 0$

9. a) : D'après le cours
$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t+a)^2} dt$

9. c) : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\pi} P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2} dt$

$\iff \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} P(X \geq x) = e^{2ax+a^2} \times \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2at-a^2} dt$

$\cancel{= \int_x^{+\infty} e^{-t^2-a-a^2+2ax} dt}$

$= \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2ax-2at} dt$

$= \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2a(x+t)} dt$

$=$

D'où pour tout x réel

$$I_a(x) = \sqrt{\pi}\, e^{2ax+a^2} P(X \geq x)$$

10 a) : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$E(\alpha Z + \beta) = \alpha E(Z) + \beta = \beta$$

$$V(\alpha Z + \beta) = \alpha^2 V(Z) = \alpha^2$$

On veut donc $\begin{cases} \beta = -a \\ \alpha^2 = 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -a \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

~~On veut $P(\alpha Z + \beta \leq x) = P(X \leq x)$~~

$\cancel{\iff P\left(Z \leq \frac{x-\beta}{\alpha}\right) = P(X \leq x)}$ ~~avec $\alpha \neq 0$~~

$\cancel{\iff \int_{-\infty}^{\frac{x-\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t+a)^2}\, dt}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}} Z - a$ suit la même loi que X.

10. e)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a, x):
    num = 0
```

```
for i in range(10000):
    z = rd.normal()
    X = a + z/np.sqrt(2)
    if 1 - X >= 0 :
        num = num + 1
return (num/10000)
```

11.

```
def approx_I(a, n):
    return (np.sqrt(np.pi) * np.exp(2*a*n
        + a**2) * estim_proba(a, n))
```

Exercice 3 :

Partie 1 :

1- a) : M est symétrique donc diagonalisable

b) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)$$

Donc $P(X) = (X+1)^2 - 3(X+1)$ est un polynôme annulateur de M.

c) : $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématique appliqué

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 2

2. a): $k=1$

$J_n = J_n$ et $n^0 \times J_n = J_n$

La propriété est donc initialisée

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$, k fixé

$(J_n)^k = n^{k-1} \times J_n$ par H.R

$\Leftrightarrow J_n^{k+1} = n^{k-1} J_n^2$

Or $J_n^2 = n J_n$ (généralisation du résultat 1. b avec une matrice carré d'ordre n)

D'où $J_n^{k+1} = n^k J_n$

La propriété est héréditaire.

Conclusion:

D'après le principe de récurrence pour tout k naturel $(J_n)^k = n^{k-1} \times J_n$

b): $J_n = M_n + I_{n,n}$

Donc $M_n = J_n - I_n$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c) : Or I_n et J_n commutent donc par la formule du binôme de Newton :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^* \ (M_n)^\ell = (J_n - I_n)^\ell$$
$$= \sum_{i=0}^{\ell} (J_n)^i \times (-I_n)^{\ell-i} \binom{\ell}{i}$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell} \binom{\ell}{i} n^{i-1} J_n \times (-1)^{\ell-i} (I_n) + \binom{\ell}{0}(-1)^\ell (I_n)^\ell$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell} \binom{\ell}{i} n^{i-1} \times (-1)^{\ell-i} \times J_n + (-1)^\ell I_n$$
$$= c_\ell J_n + (-1)^\ell I_n$$

2. d) : $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$$c_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{\ell}{i} n^{i-1} (-1)^{\ell-i}$$
$$= \cancel{\sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{i+1} n^i (-1)^{\ell-(i+1)}}$$
$$= \cancel{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{i+1} n^{i+1} (-1)^{\ell-(i+1)}}$$
$$= \frac{1}{n} ($$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} \binom{\ell}{i} n^i (-1)^{\ell-i}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} n^i (-1)^{\ell-i} - (-1)^\ell \right)$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$c_\ell = \frac{1}{n} \left((n-1)^\ell - (-1)^\ell \right)$$

e) : Les coefficients diagonaux de $(K_n)^\ell$ sont de la forme $c_\ell + (-1)^\ell$ et ceux non diagonaux de la forme c_ℓ

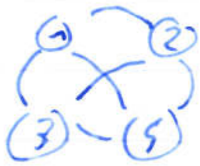
Partie II

3.

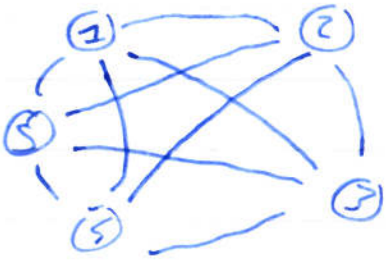
K_2 :

K_3 :

K_4 :



K_5 :



5. a)i Soit M_n la matrice d'adjacence du graphe K_n

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ & & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. b): $(M_n)^5$ On cherche le coefficient situé à la première ligne et la première colonne de $(M_5)^5$.

Or $(M_n)^5 = c_5 J_n + I_n$
$$= \frac{(n-1)^5 - 1}{n} J_n + I_n$$

$$(M_5)^5 = \frac{3^5 - 1}{5} \times J_5 + I_5$$

$$= \frac{80}{5} \times J_n + I_5$$

$$= 20 \times J_5 + I_5$$

Il existe donc 21 chemins de longueur 5 menant du sommet numéro 1 à lui même.

5. Le degré de chaque sommet du graphe K_n est $n-1$ parce que c'est un graphe complet.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table 2

~~$-\lambda^2+\lambda+1=0 \quad \Delta = 1^2+5$~~
~~$= 5$~~
~~$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} \quad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2}$~~

1. c) : La valeur propre de M sont à chercher dans les racine de P

$P(x) = x^2+2x+1-3x-3$
$= x^2-x-2$
$\Delta = (-1)^2+4\times 2$
$= 9$
$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$
$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \in \ker(M+I_{3,3})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-b-c$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Donc $X = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $(b,c) \in \mathbb{R}^2$

D'où $\ker(M + I_{3,3}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Les deux vecteur colonne sont clairement non colinéaires donc -1 est valeur propre de M et $\dim(E_{-1}) = 2$.

Soit $X \in \ker(M - 2I_3)$, $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 3c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = c \end{cases}$$

Donc $X = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$

D'où $\ker(M - 2I_{3,3}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul d'où 2 est valeur propre de M et $\dim(E_2) = 1$.

1- d) : Soit $(\lambda, \beta, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$\lambda . P_1 + \beta P_2 + \mu P_3 = O_{3,1}(\mathbb{R})$
avec $P_{i \in [1;3]}$ les colonnes de P

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \beta + \mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \\ -\beta + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \beta + \mu = 0 \\ \lambda = \mu \\ \beta = \mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu = 0 \\ \lambda = \mu \\ \beta = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \beta = \mu = 0$$

Les trois colonnes de P sont donc libres donc P est inversible.

$$\cancel{(P|I_3) = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}$$

On a donc bien $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) : D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de M d'où

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

f) : Pour $n = 0$

$M^0 = I_{3,3}$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$

La propriété est donc initialisée.

Hérédité Soit $\ell \in \mathbb{N}$, ℓ fixé
Supposons que la propriété soit vraie pour ℓ et montrons qu'alors elle est vraie pour $\ell+1$

$$M^{\ell} = PD^{\ell}P^{-1} \quad \underline{H.R}$$
$$\Leftrightarrow M^{\ell+1} = M \times PD^{\ell}P^{-1}$$
$$= PDP^{-1} \times PD^{\ell}P^{-1} \quad \underline{D = P^{-1}MP}$$
$$= PD^{\ell+1}P^{-1}$$

La propriété est héréditée.

Conclusion
D'après le principe de récurrence pour tout entier naturel ℓ on a $M^{\ell} = PD^{\ell}P^{-1}$

g): $\forall \ell \in \mathbb{N}$ $M^{\ell} = PD^{\ell}P^{-1}$

$$PD^{\ell} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\ell} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (-1)^{\ell} & (-1)^{\ell} & 2^{\ell} \\ (-1)^{\ell+1} & 0 & 2^{\ell} \\ 0 & (-1)^{\ell+1} & 2^{\ell} \end{pmatrix}$$
$$1/3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$M^{\ell} = \begin{pmatrix} (-1)^{\ell} & (-1)^{\ell} & 2^{\ell} \\ (-1)^{\ell+1} & 0 & 2^{\ell} \\ 0 & (-1)^{\ell+1} & 2^{\ell} \end{pmatrix} 1/3 \begin{pmatrix} 2(-1)^{\ell}+2^{\ell} & +2(-1)^{\ell+1} & (-1)^{\ell}+2^{\ell} & (-1)^{\ell+1}+2^{\ell} \\ (-1)^{\ell+1}+2^{\ell} & 2(-1)^{\ell+1}+2^{\ell} & (-1)^{\ell+1}+2^{\ell} \\ (-1)^{\ell+1}+2^{\ell} & (-1)^{\ell+1}+2^{\ell} & 2(-1)^{\ell+1}+2^{\ell} \end{pmatrix}$$

On obtient avec $a_{\ell} = (-1)^{\ell+1} + 2^{\ell}$
$b_{\ell} = 2(-1)^{\ell+1} + 2^{\ell}$

mais j'ai fait une erreur de calcul quelque part

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 09

Numéro de table 2

6. Par la formule d'Euler on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (n-1) = 2p$$ où p le nombre de ~~sommet~~ d'arête

D'où $n(n-1) = 2p$

$$\iff p = \frac{n(n-1)}{2}$$

Partie III.

7. $V_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$

$V_1 = \left(0 \ \frac{1}{n-1} \ \frac{1}{n-1} \ \dots \ \frac{1}{n-1}\right)$

8. $$M_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice M_n mais avec des $\frac{1}{n-1}$ à la place des 1.

9. a) : Un état stable de la chaîne de Markov $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une loi de probabilité sous la forme d'un vecteur ligne π positif et dont la somme des coefficients vaut 1, tel que $\pi M = \pi$