ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

AYMERIC

Note de délibération : 18.3 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appl.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 08

Numéro de table 060.

Commencez à composer dès la première page...

d) $c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i}$

$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} - (-1)^k \right)$

d'après la formule du binôme de Newton.

$= \frac{1}{n} \left((n-1)^k - (-1)^{k-1} \right)$

or $-(-1)^k = (-1)^{k+1}$

D'où $c_k = \boxed{\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}}$

e) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!],\ i \neq j$:

$\boxed{m_{ij} = c_k}$

et $\boxed{m_{ii} = c_k + (-1)^k}$

NE RIEN ÉCRIRE

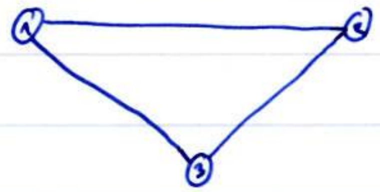
DANS CE CADRE

18.3 / 20

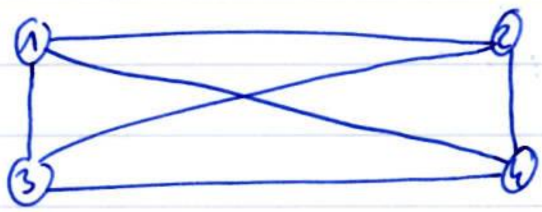
Partie II

3 K_2 :

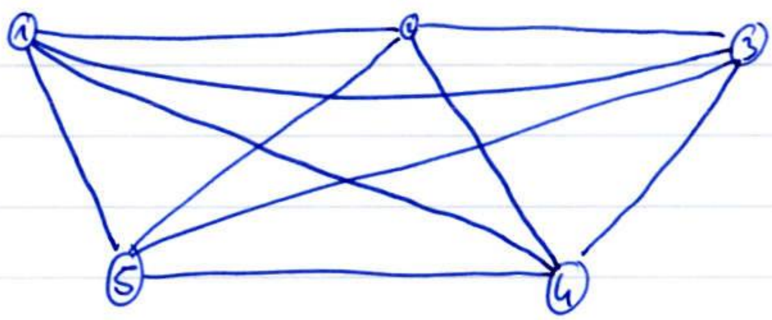
K_3 :



K_4 :



K_5 :



4 a La matrice d'adjacence de K_n est M_n

b $\boxed{\dfrac{3^4 - 1}{4} + 1}$

⑤ Chaque sommet du graphe K_n est de degré : $\boxed{n-1}$

⑥ Une arête relie 2 sommets
donc il y a $\binom{n}{2}$ arrêtes possibles

or $\boxed{\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}}$

Partie III

⑦ $V_0 = (1, 0, \dots, 0)$

$V_1 = \left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$

⑧ $(\mathrm{Mat}(X_k))_{i,j} = P_{(X_k=1)}(X_k = j) \cdot P(X_k = i)$.

Et d'après le cours : $\boxed{\mathrm{Mat}(X_k) = V_0 \cdot M_n^k}$

⑨ ⓐ V état stable ssi :

- $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$
- $M_n {}^tV = {}^tV$

ⓑ On remarque : $\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \boxed{1}$

De plus $M_n \cdot {}^tV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1/n \\ \vdots \\ n-1/n \end{pmatrix}$

10 a $\boxed{V_{k+1} = V_k \cdot M_n \cdot \frac{1}{n-1}}$

b pour $k = 0$:

$$V_0 = \frac{1}{1} V_0 \cdot I = V_0$$

Supposans que proposition vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$:

$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k.$$

$$V_k \cdot M_n = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^{k+1} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{(n-1)^{k+1}} V_0 (M_n)^{k+1}$$

La propriété est vérifiée et héréditaire.

$\forall k \in \mathbb{N} : \boxed{V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k}$

c

$\lim_{+\infty}$

$\boxed{X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])}$

11 L'état stable V donne les proba vers lesquelles tendent les proba pour la variable X_n.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 060

Commencez à composer dès la première page...

~~Donc $X+1$ admet une espérance :~~

$$E(X+1) = e - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow E(X)+1 = e - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{E(X) = e - \frac{3}{2}}$$

(b) $(X-1)(X+1)$ admet une espérance ssi :

$\sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)(n+1) \cdot \frac{n}{(n+1)!}$. D'après la formule de transfert

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\frac{n}{n!} = \sum_{n=0}$

4) a) $X+1$ admet une espérance ssi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \cdot \frac{n}{(n+1)!}$$ converge absolument : (transfert)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

Posons $n' = n-1 \iff n = n'+1$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \boxed{e}$$

Donc X admet une espérance

$$E(X+1) = e \iff E(X)+1 = e \iff \boxed{E(X) = e-1}$$

b) $(X+1)(X-1)$ admet une espérance ssi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(n-1) \frac{n}{(n+1)!}$$ converge absolument :

Etant en somme à terme positifs la convergence absolue revient à la convergence simple :

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(n-1) \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1)(n-1) \frac{n}{(n+1)!} + 0$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}$$ posons $n' = n-2 \iff n = n'+2$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1$$

Donc $\boxed{E((X-1)(X+1)) = e}$

$$\Leftrightarrow E(X^2 - 1) = e$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) - 1 = e \quad \Leftrightarrow E(X^2) = e+1$$

Donc X admet un moment d'ordre 2 et une variance
Or d'après Koëning - Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (e+1)^2 - (e-1)^2$$
$$= (e+1+e-1).(e+1-e+1)$$
$$= 2e.2 = \boxed{4e}$$

Partie III $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in]0;1[$

5. $R_X(k) = P(X > k)$

D'après l'énoncé on remarque la relation suivante :

$$P(X > k) = P(X > k-1) . P_{(X>k-1)}(X > k)$$

c'est a dire que la proba que X soit plus grand que k ~~ca~~ vaut : la proba que X soit déjà arrivé à k-1 fois la proba que elle continue à vivre ~~alors~~ qu' au $k^{\text{ème}}$ c-a-d $(1-\alpha_k)$.

D'où : $P(X > k) = P(X > k-1) \cdot (1-\alpha_k)$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_X(k) = (1-\alpha_k). R_X(k-1)}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 08

Numéro de table 060

Commencez à composer dès la première page...

⑥ $R_X(k) = P(X > k)$

or $[X>k]$ = « X a fonctionné pour tout i inférieur à k ».

pour $k = 1$:

$R_X(1) = P(X>1) = 1 - \alpha_1$

Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ on ait

$R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)$

$\cancel{R_X(k+1) = (1-\alpha_k)}$.

$\Leftrightarrow R_X(k).(1-\alpha_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} (1-\alpha_i)$

or d'après la q° prec : $R_X(k)(1-\alpha_{k+1}) = R_X(k+1)$

$\Leftrightarrow R_X(k+1) = \prod_{i=1}^{k+1} (1-\alpha_i)$

Donc la proposition est initialisée au rang 1 et est héréditaire : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* : R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.3 / 20

(7) On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}^* : P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$ (c.))

D'où : $P(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)$

$= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)\left(1-(1-\alpha_k)\right)$

$= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) \cdot \alpha_k$

$= \boxed{\alpha_k \cdot R_X(k-1) = \alpha_k \cdot \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i).}$

(8) a) $\forall k \in \mathbb{N}^* : \alpha_k = p$:

$P(X=k) = p \cdot \prod_{i=1}^{k-1}(1-p)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$= p\,(1-p)^{k-1}$

$\boxed{X \hookrightarrow G(p).}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^* : \alpha_k = \frac{k}{k+1}$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$P(X=k) = \frac{k}{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{i+1}\right)$

$= \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i+1}\right)$

$$= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k}{(k+1)} = \boxed{\frac{k}{(k+1)!}}$$

X suit la même loi que celle de X dans la question 4.

Partie IV

9 ⓐ SELECT COUNT(*) FROM ordinateur

ⓑ SELECT COUNT(*) FROM ordinateur WHERE annee_panne = « 2001 »

ⓒ L'esperance d'une loi geometrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$

Donc à l'aide des requêtes precedentes on peut trouver une approximation de l'espérance de la variable : $\frac{\text{résultat } 9b}{\text{résultat } 9a} \simeq E(X) = \frac{1}{p}$

D'où : $\boxed{p \simeq \frac{\text{resultat } (9a)}{\text{résultat } (9b)}}$

10 UPDATE duree_vie FROM ordinateur WHERE annee_panne <> « -1 » , durée_vie = annee_panne - 2000

11 a) Cette commande donne la moyenne des durée de vie des ordinateurs, c'est-à-dire une valeur approchée de l'espérance de la variable aléatoire ($\frac{1}{p}$)

il suffit de faire : $\frac{1}{\text{résultat de commande}}$

pour trouver la valeur approchée de p.

b) Il serait raisonnable de l'utiliser si l'estimation de p se trouve assez proche de α_k
(α_k étant la proba de panne au temps k)

Car. comme $X \hookrightarrow G(p)$. $p = \alpha_k$

On vérifie donc avec les commandes ci-dessous une estimation de α_k. (pour la commande de la k-ième ligne)

$\boxed{\text{et on vérifie que la commande de la ligne } k \text{ renvoie bien une valeur proche de } p.}$

Exercice 2.

Partie I

1 a) $t^2 \cdot e^{-2at-t^2} = \frac{t^2}{e^{2at+t^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{e^{t^2}} \xrightarrow{+\infty} 0$

D'où $\boxed{e^{-2at-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appl.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 08

Numéro de table 060

Commencez à composer dès la première page...

(b) $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est une fonction continue sur $[0;+\infty[$

Donc l'intégrale est impropre en $+\infty$

or $e^{-2at-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Rieman convergente car $2 > 1$

Donc par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives :

$\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ converge.

De plus $\int_0^1 e^{-2at-t^2}\,dt$ étant bien définie :

Par Chasles d'intégrales convergentes :

$\boxed{J_a = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt \text{ converge}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.3 / 20

② On vient de montrer que $\int_0^{+\infty} e^{2at - t^2} dt$ converge

$t \mapsto e^{2a(x-t)-t^2} dt \in C^0(\mathbb{R})$

Donc l'intégrale est doublement impropre :

Etudions : $\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$, $\forall x \geq 0$

or remarque $(x-t) \leq 0$ car $t \in [x;+\infty[$
donc d'après le même raisonnement que la question précédente :
$\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$ converge.

De plus : $\forall x < 0$:

on a déjà $\int_0^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$ converge
et on somme par chasles de intégrales convergente avec l'autre partie :
$\int_x^0 e^{2a(x-t)-t^2} dt$ qui est bien définie

Donc $\boxed{I_x \text{ est définie } \forall x \in \mathbb{R}}$

③ ⓐ On sait que l'intégrale converge vers un réel l :

Or par Chasles : $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt + \int_0^{x} e^{-2at-t^2}\,dt$

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$

or lorsque $x \to +\infty$ on obtient :

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = l - l = 0}$$

ⓑ $I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt$ or $a \geq 0$

On a déjà : $2a(x-t)-t^2 \leq -t^2$, car $a \geq 0$ et $(x-t) \leq 0$

$\Rightarrow e^{-2at-t^2} \leq e^{-t^2}$, car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

par croissance de l'intégrale convergente :

$$\Rightarrow \boxed{I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$$

ⓒ D'après le même raisonnement que la q b)
on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0$$

Donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{+\infty} I_a(x) = 0}$$

Partie II

4) $y' - 2ay = 0 \quad (2)$

Les solutions de cette équation sont :

$$\boxed{S_0 = \{ y : t \longmapsto \lambda e^{2at},\ \lambda \in \mathbb{R} \}}$$

5) a) Notons $f(t) = e^{-2at - t^2}$

On remarque $f \in \mathcal{C}^1([0;x])$

Donc Notons F une primitive de f.

$F_a(x) = F(x) - F(0)$

par somme de fonctions dérivables : $F_a(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$F_a'(x) = f(x) - f(0)$$
$$= \boxed{e^{-2ax - x^2} - 1}$$

b) $e^{2ax}(J_a - F_a(x)) = e^{2ax} . J_a - e^{2ax} F_a(x)$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2at - t^2} . e^{2ax}\, dt - \int_0^x e^{2ax} . e^{-2at - t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2a(x-t) - t^2}\, dt - \int_0^x e^{-2a(x-t) - t^2}\, dt$$

D'après Chasles d'intégrales convergentes :

$$= \boxed{\int_x^{+\infty} e^{-2a(x-t) - t^2}\, dt = I_a(x).}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appli

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 08

Numéro de table 060

Commencez à composer dès la première page...

5) Posons $A > x$:

$H = \int_x^A e^{2a(x-t)-t^2} dt.$

avec $g : t \mapsto e^{2a(x-t)-t^2} \in \mathcal{C}^{1}([x;A])$.

Notons G primitive de g :

$H = G(A) - G(x)$.

$H' = g(A) - g(x)$

$\xrightarrow{A \to +\infty} -g(x)$

or :

$\boxed{\text{Supposons} \quad I_a' = 2a I_a - e^{-x^2}}$

6) $(N) : y' - 2ay = -e^{-x^2}$

une solution particulière est I_a donc

$\boxed{S_{(N)} = \{y : t \mapsto \lambda e^{2at} + I_a, \ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.3 / 20

7: On cherche λ tq:

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} + I_a = 0$$

$\Leftrightarrow$ on cherche lambda tq:

$$\lim_{x \to +\infty} I_a = -\lambda e^{2ax}$$

or $\lim_{x \to +\infty} I_a = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$\cancel{\boxed{S = \{ y : t \mapsto I_a \}}}$

⚠ j'ai inversé les questions : ici cas positif:

c) $\forall a > 0$:

on cherche λ tq : $-\lambda e^{2ax} \xrightarrow{+\infty} 0$

or $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^{2ax} > 0$

donc nécessairement $\lambda = 0$

$$\boxed{S = \{ y : t \mapsto I_a \}}$$

b) $\forall a = 0$: on cherche λ tq : $-\lambda \xrightarrow{+\infty} 0$

$\lambda = 0$

et $\boxed{S = \{ y : t \mapsto I_a \}}$

ⓐ $\forall a < 0$: on cherche λ tq : $-\lambda e^{2ax} \longmapsto 0$

or $\forall x$: $e^{2ax} \longmapsto 0$

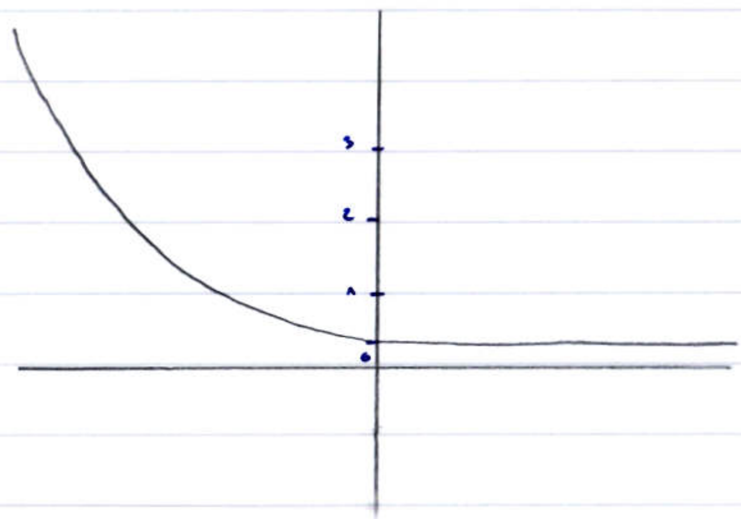
Donc $\boxed{S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a \right\}}$.

Partie II

⑧ $X \hookrightarrow N(-a, \frac{1}{2})$

ⓐ $f_X(x) = \boxed{e^{-(x-a)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \forall x \in \mathbb{R}.}$

ⓑ



⑨ ⓐ $P(X \geq x) = \boxed{\int_x^{+\infty} f_X(t)\, dt}$

ⓑ On a :

$\sqrt{\pi} \cdot e^{2ax + a^2} \cdot P(X \geq x)$

$= \sqrt{\pi} \cdot e^{2ax+a^2} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-(t-a)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, dt$

$= \int_x^{+\infty} e^{2ax+a^2 - (t^2 - 2at + a^2)}\, dt = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\, dt$

par linéarité de l'intégrale $\boxed{= I_a}$

10 a) $Z \hookrightarrow N(0,1)$

On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq : $\alpha Z + \beta \hookrightarrow X$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

or $1 - F_{\alpha Z+\beta}(x) = P(\alpha Z + \beta \geqslant x)$

$= P\left(Z \geqslant \frac{x-\beta}{\alpha}\right)$ car $\alpha > 0$

$$= \int_{\frac{x-\beta}{\alpha}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

avec le changement de variable $u = \alpha t + \beta$

Posons $A > \frac{x-\beta}{\alpha}$

Posons $\varphi : \left[\frac{x-\beta}{\alpha} ; A\right[\longrightarrow [x ; B[$

$t \longmapsto \alpha t + \beta$

Bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ donc changement licite. De plus : $dt = \alpha du$:

$$= \int_x^B \frac{e^{-\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt.$$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \int_x^{+\infty} (\ldots)$ inachevé.

$\boxed{\text{Il faudrait que } \alpha = -a \text{ et } \beta = \frac{1}{2}}$

b)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Écricome Épreuve : Maths appl.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 08

Numéro de table 060

Commencez à composer dès la première page...

(10)
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a, x):
    num = 0
    for i in range(10000):
        Z = rd.normal()
        X = -a + Z/2
        if X >= x:
            num = num + 1
    return num/10 000
```

(11) (on garde les importations précédentes).
```
def approx_I(a, x):
    return (np.sqrt(np.pi) * np.exp(-2*a*x + a**2) * estim_proba(a, x)).
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.3 / 20

Exercice 3 Partie I

1) a) M étant $\boxed{\text{symétrique elle est diagonalisable}}$

b) $\boxed{(M+I)^2 = 3(M+I)}$

Un polynôme annulateur de M est :

$$\boxed{(X+1)^2 - 3(X+1)}$$

c) $= (X+1)(X+1-3) = (X+1)(X-2)$

Donc les racines du polynôme annulateur étant -1 et 2 :

$\text{spec}(M) \subset \{-1; 2\}$

$E_{-1}(M) = \ker(M+I)$: Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(M+I)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ x+y+z=0 \right. \Leftrightarrow \left\{ x = -y-z \right.$

$\boxed{E_{-1}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ et -1 est bien valeur propre

De plus $\boxed{E_2(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ et 2 est bien valeur propre

$$\boxed{\text{spec}(M) = \{-1; 2\}}$$

(d) Admis.

(e) $\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

(f) pour $k = 0$: $M^0 = I = P.D^0 P^{-1} = PP^{-1} = I$

Supposons que pour un certain k naturel fixé :

$M^k = PD^k P^{-1}$

$\Leftrightarrow M^{k+1} = M . PD^k P^{-1}$

$= PDP^{-1} PD^k P^{-1}$, car $M = PDP^{-1}$ car diagonalisable

$= PD^{k+1} P^{-1}$

Donc la propriété étant initialisée au rang 0 et hérédité :

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : M^k = PD^k P^{-1}.}$

(g) $M^k = PD^k P^{-1}$

(2) (a) pour $k = 1$:

$J_n = n^0 J_n$

Supposons que pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé on ait :

$(J_n)^k = n^{k-1} J_n$

$\Leftrightarrow J_n^k . J_n = n^{k-1} . J_n . J_n$

or $J_n^2 = n . J_n$.

$\Leftrightarrow J_n^{k+1} = n^{k-1} . n \; J_n$

$\Leftrightarrow J_n^{k+1} = n^k J_n$.

La propriété étant initialisée au rang 1 et hérédité :

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* : (J_n)^k = n^{k-1} J_n}$.

(b) $\boxed{M_n = J_n - I_n.}$

(c) pour $k = 1$:

$$M_n = \ , \ J_n - I_n$$

or

$$c_1 J_n - I_n = J_n - I$$

Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ fixé on ait :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n.$$

$$M_n^k . M_n = (c_k J_n + (-1)^k I_n) M_n. \quad \text{on remarque : } c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} J_n + (-1)^k I_n \right) (J_n - I_n)$$

$$= \left(\frac{1}{n} (n-1)^k . J_n + (-1)^k I_n \right) (J_n - I_n)$$

$$= \frac{1}{n} (n-1)^k J_n^2 + (-1)^k J_n - \frac{1}{n} (n-1)^k J_n + (-1)^{k+1} I_n$$

$$= (n-1)^k J_n + (-1)^k J_n - \frac{1}{n} (n-1)^k J_n + (-1)^{k+1} I_n$$

$$= (n-1)^k J_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) + (-1)^k J_n + (-1)^{k+1} I_n.$$

$$= \frac{1}{n} (n-1)^{k+1} J_n + (-1)^k J_n + (-1)^{k+1} I_n.$$

$$= c_{k+1} J_n + (-1)^{k+1} I_n.$$

La propriété étant initialisée au rang 1 et héréditaire :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n.}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

18.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 08

Numéro de table 060

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1

$R_X(k) = P(X > k)$

Partie I

1 a) $X \hookrightarrow G(p)$, $p \in]0,1[$:

$\forall k \in \mathbb{N} : R_X(k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p$

$= p \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1}$

Posons le changement : $i' = i-(k+1)$

$= p \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{i+k}$

$= p (1-p)^k \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i$

$= p(1-p)^k \cdot \frac{1}{1-p} = \boxed{p(1-p)^{k-1}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.3 / 20

(b) $\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{p(1-p)^{k-1}}{p(1-p)^{k-2}} = \boxed{(1-p)}$

(2) (a) $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad P(X=k) = P(X > k-1) - P(X > k)$
$= \boxed{R_X(k-1) - R_X(k)}$

~~Supposons $R_X(k) \neq R_Y(k)$:~~
~~alors $\Leftrightarrow P(X > k) \neq P(Y > k)$~~
~~$\Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=k) \neq \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(Y=k)$~~

~~or on sait que comme $P(X=k)$ et $P(Y=k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ sont des probas elles sont positives strictement~~
~~Or pour obtenir une égalité de somme dont les termes sont tous strictement positifs, les termes doivent~~

(b) $R_X(k) = R_Y(k)$
$\Leftrightarrow 1 - F_X(k) = 1 - F_Y(k)$
$\Leftrightarrow F_X(k) = F_Y(k)$
Or la fonction de répartition caractérise la loi donc par raisonnement par équivalence :
X et Y sont de même loi ssi $R_X(k) = R_Y(k)$

Partie II

③ ⓐ Cherchons $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tq :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot n!}{(n+1)!} = a - \frac{b}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a - \frac{bn}{(n+1)!}$$

Lorsque $n \to 0$: $a = 1$

De plus :

$$n = \frac{a(n+1)!}{n!} - b$$

$$\Leftrightarrow n = a(n+1) - b$$

Lorsque $n \to 0$: $1 - b = 0 \Leftrightarrow b = 1$

$$\boxed{\frac{n}{(n+1)!} = \frac{-1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \text{, avec } a = -1 \text{, } b = 1}$$

bon résultat ; juste problème dans les calculs au dessus.

(b) D'après la question précédente :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{1\geq 1} \frac{1}{n!}$$

or on reconnait une difference de 2 séries exponentielles à un indice près donc la série sera convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 + 1$$

$$= e^1 - e^1 - 0 = \boxed{0}$$

(9) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $P(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}$

(a) $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$

~~$E(X+1) =$~~

$X+1$ admet une espérance ssi : $\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) \frac{n}{(n+1)!}$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} + \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{e - \frac{1}{2}}$$