ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

LOUIS

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 11

Numéro de table 6

Exercice 1 :

Partie I :

① Soit $p \in]0,1[$, soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

a) Soit $k \in \mathbb{N}$
On a $R_X(k) = P(X > k)$

$= 1 - P(X \leq k)$

Si $k = 0$, on a alors $R_X(k) = 1 - 0 = 1$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a $R_X(k) = 1 - P(X \leq k)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{k} P(X = i)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1}$

$j = i-1$

$= 1 - p \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$= 1 - p \, \frac{1-(1-p)^k}{1-1+p}$$

$$= 1 - 1 + (1-p)^k$$

$$= (1-p)^k$$

On a donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ (1-p)^k & \text{si } k > 0 \end{cases} = (1-p)^k$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

On a alors $\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = (1-p)^{k-k+1} = 1-p$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p$

2) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ soit $k \in \mathbb{N}^*$

a)
On a $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$
$= R_X(k-1) - R_X(k)$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)$

b) Si $k = 0$, $P(X=k) = 0$ et $R_X(k) = 1$

Si $k > 0$

On a $R_X(k) = R_Y(k) \Leftrightarrow R_X(k-1) - R_X(k) = R_Y(k-1) - R_Y(k)$

$\Leftrightarrow P(X = k) = P(Y = k)$

On a bien X et Y suivent la même loi si et seulement si $R_X(k) = R_Y(k)$ pour tout entier naturel k.

Partie II :

(3)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)a - b}{(n+1)!}$

$$= \frac{an + a - b}{(n+1)!}$$

On cherche a et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}}$

b) Soit $N \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{N} \frac{1^n}{n!} - 1 - \sum_{n=0}^{N} \frac{1^n}{n!} - \frac{1}{2}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 11

Numéro de table 6

~~On reconnaît deux séries exponentielles~~

~~Donc~~ $\cancel{\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!}}$ ~~converge~~

~~Et on a :~~

$$\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)!}$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} - \left(\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n!}\right)$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} - \left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= -1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or a donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{2}$

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ converge et on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2}}$$

(4) Soit $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$

a) D'après le théorème de transfert,

$(E(X+1)$ existe$) \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} (n+1) \frac{n}{(n+1)!}$ converge absolument

car c'est une somme de termes positifs.

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!}$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge

On reconnaît une série exponentielle (convergente)
Ainsi, $E(X+1)$ existe bien.

Et on a : $E(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

$$\boxed{E(X+1) = e}$$

Par linéarité de l'espérance, on a alors :

$E(X+1) = E(X) + 1$

Donc $E(X) + 1 = e$

Autrement dit, $E(X)$ existe et on a :

$$\boxed{E(X) = e - 1}$$

b) $E((X-1)(X+1))$ existe $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} (n-1)(n+1)\frac{n}{(n+1)!}$ converge absolument

pour les mêmes raisons que (4) a)

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}(n-1)$ converge

$1-1=0$

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + 0$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge

On a donc bien l'existence de $E((X-1)(X+1))$

Et de plus, $\boxed{E((X-1)(X+1)) = e}$

Or, $E((X-1)(X+1)) = E(X^2+1)$

$$= E(X^2) + 1$$

Donc $E(X^2) + 1 = e$

Autrement dit, $E(X^2) = e - 1$

Or on sait d'après la formule de Koenig-Huygens que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Ainsi, $V(X)$ existe, et on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= e - 1 - (e-1)^2 \\ &= e - 1 - e^2 + 2e - 1 \\ &= -e^2 + 3e - 2 \end{aligned}$$

.

$\boxed{X \text{ admet une variance et } V(X) = -e^2 + 3e - 2}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 11

Numéro de table 6

Partie III :

(5) D'après la formule des probabilités totales on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X > k) = P(X > k-1)\, P_{[X > k-1]}(X > k) + P(X \leqslant k-1)\, P_{[X \leqslant k-1]}(X > k)$$

$$= P(X > k-1)\, P_{[X > k-1]}(X > k) + 0$$

car si la durée de vie est de $k-1$ jours ou moins, elle ne peut pas être de plus de k jours.

$$= R_X(k-1)(1 - a_k)$$

$P_{[X > k-1]}(X > k)$ est la probabilité que si elle fonctionne à l'issue de la $(k-1)^{ième}$ année, alors elle fonctionne encore à la $k^{ième}$ année

Or $P(X > k) = R_X(k)$

Ainsi, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k) = R_X(k-1)(1 - a_k)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

(6) Montrons ce résultat par recurrence sur k.

Initialisation :

Soit $k = 1$, on a $R_X(k) = R_X(1) = (1-a_1)R_X(0) = 1-a_1$

Et $\prod_{i=1}^{k}(1-a_i) = \prod_{i=1}^{1}(1-a_i) = 1-a_1$

On a bien $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k}(1-a_i)$ dans ce cas.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k}(1-a_i)$

Montrons que $R_X(k+1) = \prod_{i=1}^{k+1}(1-a_i)$

On sait que $R_X(k+1) = (1-a_{k+1})R_X(k)$

~~Donc $R_X(k+1) = (1-a_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1a$~~

Donc, d'après l'hypothèse de recurrence, on a :

$R_X(k+1) = (1-a_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)$

$= \prod_{i=1}^{k+1}(1-a_i)$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-a_i)}$$

(7) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

On sait que $P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$

Donc $P(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-a_i)$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i)\left(1-1+a_k\right)$$

$$= a_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i)$$

Ainsi, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \boxed{P(X=k) = a_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i)}$

(8)

a) Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = p$, alors on a :

$P(X=k) = p\prod_{i=1}^{k-1}(1-p) = p(1-p)^{k-1}$

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

b) Si $a_k = \frac{k}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

On a alors $P(X=k) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right)$

$$= \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1}$$

$$= \frac{k}{k+1} \prod_{i=2}^{k} \frac{1}{i}$$

$$= \left(\frac{k}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k!}\right)\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!(k+1)}$$

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \frac{1}{(k-1)!(k+1)}$

Partie IV :

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematique appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 11

Numéro de table 6

Exercice 2 :

Partie I :

(1)

a) Pour t suffisamment grand on a :

$t^2 e^{-2at-t^2} = t^2 e^{-t^2} e^{-2at}$

Par croissances comparées, on a $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$

~~Et on sait que~~ $\cancel{\lim_{t \to +\infty} e^{-2at} = 0}$

~~Donc $0 \leq t^2 e^{-2at-t^2} \leq t^2 e^{-2at}$~~

~~Or $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-2at} = 0$ par croissances comparées~~

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b)

Or on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge

donc par critère de négligeabilité, $\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2}\, dt$ converge

et comme $\int_0^1 e^{-2at-t^2}\, dt$ n'est pas impropre, alors $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\, dt$ converge.

Finalement, $\boxed{\text{l'intégrale } Ja \text{ est convergente.}}$

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\, dt$ converge.
Il en est donc de même pour $\int_0^{+\infty} e^{2ax}\, e^{-2at-t^2}\, dt$

Et par conséquent, comme $x \in \mathbb{R}$, il en est de même pour $\int_x^{+\infty} e^{2ax}\, e^{-2at-t^2}\, dt$.

Finalement, I_a est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(3)

~~a) On sait que, pour $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^a e^{-2at-t^2}\,dt = 0$~~

~~Donc $\lim_{a \to +\infty} \int_a^a e^{-2at-t^2}\,dt = 0$~~

~~Autrement dit, $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = 0$~~

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$, soit $t \geq x$

On a : $x \leq t$

$\Rightarrow x - t \leq 0$

$\Rightarrow 2a(x-t) \leq 0$

$\Rightarrow e^{2a(x-t)} \leq 1$

$\Rightarrow e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2}$

Or on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge

Et on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (pour $t \geq x \geq 0$)

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge également

Ainsi, $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est bien définie et on peut passer à l'intégrale des deux côtés de l'inégalité

On trouve donc :

$$\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Autrement dit, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_a(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}$

~~$\forall x \in \mathbb{R}$,~~

c)

. Si $a > 0$

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0$

Et on a alors par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt = 0$

(car $I_a(x) \geqslant 0$)

. Si $a = 0$, on revient à $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

. Si $a < 0$, pour x assez grand, on a donc $2ax \leqslant 0$

Par conséquent, $e^{2ax} e^{-2at-t^2} \leqslant e^{-2at-t^2}$

Et ainsi, par encadrement, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 11

Numéro de table 6

Ainsi, dans tous les cas, on a $\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

Partie II :

4) On a $y' = 2ay \iff y' - 2ay = 0$

On sait alors que l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble :

$$\{t \mapsto \lambda e^{2at} \, / \, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

5)

a) On sait d'après le théorème fondamental de l'analyse que F_a est la primitive de $x \mapsto e^{-2ax - x^2}$ qui s'annule en 0.

Ainsi, F_a est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$F_a'(x) = e^{-2ax - x^2}$ pour tout x réel

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right) = e^{2ax}\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt - e^{2ax}\int_0^{x} e^{-2at-t^2}\,dt$

on a vu que Ja convergent $= e^{2ax}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$

$= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt$

$= I_a(x)$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right) = I_a(x)$

c) $x \longmapsto e^{2ax}$ est derivable sur $\mathbb{R}$.
J_a est une constante.
$x \longmapsto F_a(x)$ est derivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_a'(x) = 2a e^{2ax}(J_a - F_a(x)) - e^{2ax} F_a'(x)$

$$= 2a e^{2ax}(J_a - F_a(x)) - e^{2ax} e^{-2ax - x^2}$$

~~Ainsi, $I_a'(x) - 2a I_a(x) = 2a e^{2ax} J_a - 2a e^{2ax} F_a(x) + \dots$~~

~~$\dots e^{2ax} e^{-2ax - x^2} - 2a \quad e^{2ax}(J_a$~~

Ainsi, $I_a'(x) - 2a I_a(x) = 2a e^{2ax} J_a - 2a e^{2ax} F_a(x) - e^{2ax} e^{-2ax - x^2} - \dots$

$$\dots 2a e^{2ax} J_a - 2a e^{2ax} F_a(x)$$

$$= -e^{2ax} e^{-2ax - x^2}$$

$$= -e^{-x^2}$$

I_a est donc bien solution de l'équation différentielle (1).

(6) Ainsi, l'ensemble des solutions de (1) est :

$$\left\{ x \longmapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x) \,/\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

⑦ On a dans tous les cas $\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

(a) si $a < 0$

On a $\lim_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

Dans ce cas, l'ensemble des y possible reste :

$$\boxed{\left\{ y : x \longmapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x) \;/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) Si $a = 0$, on a $\lambda e^{2ax} = \lambda$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$

L'ensemble des solutions possibles est alors :

$$\boxed{\left\{ y : x \longmapsto I_a(x) \right\}}$$

(c) Si $a > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ y : x \longmapsto I_a(x) \right\}}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 11

Numéro de table 6

Partie III :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-a, \frac{1}{2}\right)$

1) a) On note f_X une densité de X.

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(x+a)^2\right)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(x+a)^2\right)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

(9) Soit $x \in \mathbb{R}$

a) On a $P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(t+a)^2\right) d.t$

b) On a :

$$\sqrt{\pi}\, e^{2ax+a^2} P(X \geq x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\, e^{2ax+a^2} \int_x^{+\infty} \exp\left(-(t+a)^2\right) dt$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2ax+a^2-t^2+2at-a^2}\, dt$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\, dt$$

$$= I_a(x)$$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_a(x) = \sqrt{\pi}\, e^{2ax+a^2} P(X \geq x)$

10

a) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On a $\sqrt{2}(X+a) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{\text{Donc } \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, Z - a \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-a, \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ et } \beta = -a}$$

b)

.
.
.
.
.

$\Big\}$ script de l'énnoncé

```
Z = rd.normal()
X = -a + Z / np.sqrt(2)
if X >= x :
        num = num + 1

return num / 10 000
```

(11) import numpy.random as rd
import numpy as np
def approx_I (a, x) :
    return np.sqrt(np.pi) * np.exp(2*a*x + a*a)...
... * estim_proba(a, x)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 11

Numéro de table 6

Exercice 3 :

Partie I :

1)
a) On remarque que M est symétrique.

Par conséquent, $\boxed{M \text{ est bien diagonalisable.}}$

b) $$(M+I)^2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3(M+I)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

On a $(M+I)^2 = 3M + 3I$

Or M et I commutent, donc on a :

$M^2 + 2IM + I - 3M - 3I = 0$

$\Rightarrow M^2 - M - 2I = 0$

~~$\Rightarrow M(M-I) = 2I$~~

~~$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}(M-I)\right) = I$~~

Ainsi le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de M.

c) Comme $(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$ et $2^2 - 2 - 2 = 0$
Alors -1 et 2 sont les deux seules valeurs propres possibles de M.

Or on remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

et on remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaire.

Ainsi, -1 est bien valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propre associés à 1.
Et 2 est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 2.

Et comme la somme de dimension de chaque sous espace propre est egale à 3 (car $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) alors on en deduit qu'on a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ comme base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
Et on a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ comme base du sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

Ainsi, $\boxed{Sp(M) = \{-1 ; 2\}}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre associé à -1.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre associé à 2.

~~d) Avec la méthode du pivot de Gauss :~~

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre comme concaténation de familles libres de vecteurs propres associé à des valeurs propres distincte.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

$\boxed{P \text{ est bien inversible.}}$

Déterminons P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

il y a certainement une erreur dans mon calcul...

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 11

Numéro de table 6

On admet que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $D = P^{-1} M P \iff M = PDP^{-1}$

Car M est diagonalisable est P est la matrice des vecteurs formant une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de M.

Ainsi, D est composé de 0 sauf sur sa diagonale où elle est composée des valeurs propres de M dans l'ordre adéquat.

Donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

f) Initialisation :

Pour $k = 0$, on a $M^k = M^0 = I$

et $PD^k P^{-1} = PD^0 P^{-1} = PP^{-1} = I$

On a bien $M^k = PD^k P^{-1}$ dans ce cas

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$

supposons que $M^k = PD^k P^{-1}$

On a alors $M^{k+1} = PD^k P^{-1} M$

Ou encore $M^{k+1} = PD^k P^{-1} PDP^{-1}$

$$= PD^k D P^{-1}$$

$$= PD^{k+1} P^{-1}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{M^k = PD^k P^{-1}}$

g) Ainsi $M^k = P D^k P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k + (-1)^k + 2^k & 2(-1)^{k+1} + (-1)^k + 2^k & (-1)^k + 2(-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^{k+2} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^{k+2} + 2^k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(-1)^{k+1}$$

(2)

a) Par récurrence sur k :

Initialisation :

Soit $k=1$, on a $(J_n)^1 = J_n$

et $n^{1-1} J_n = n^0 J_n = J_n$

On a bien $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$ dans ce cas.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$

Alors $(J_n)^{k+1} = n^{k-1} J_n J_n$

$= n^{k-1} J_n^2$ par hypothèse de récurrence

$= n^{k-1} n J_n$

$= n^k J_n$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}^*, (J_n)^k = n^{k-1} J_n$

b) $M_n = J_n - I_n$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Ecricome Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 11

Numéro de table 6

c) $(M_n)^k = (J_n - I_n)^k$ Jn et In commutent

$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} J_n^i (-I_n)^{k-i}$

$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i} I_n + \binom{n}{0} \quad (-1)^k I_n$

$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} n^{i-1} (-1)^{k-1} J_n +$

$=$

$= \sum_{i=1}^{k}$

$(M_n)^k = (J_n - I_n)^k$ formule du binôme de Newton car Jn et In commutent.

$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} J_n^i (-I_n)^{k-i}$

$= \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{k} J_n^i (-1)^{k-i} (I_n) + \binom{n}{0} (-1)^{k-0} I_n J_n^0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{k} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i} I_n + (-1)^k I_n$$

$$= C_k J_n + (-1)^k I_n$$

On a bien $\boxed{(M_n)^k = C_k J_n + (-1)^k I_n \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}_*}$

d) On a $C_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} n^i (-1)^{k-i-1}$$

non abouti

d)

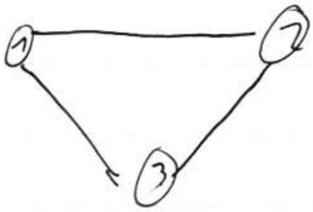
Le coefficients diagonaux de $(M_n)^k$ sont $(-1)^k + \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$

Le coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$ sont $\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$

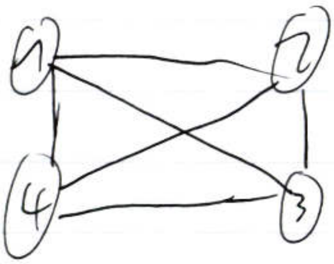
Partie II :

③ K_2 :

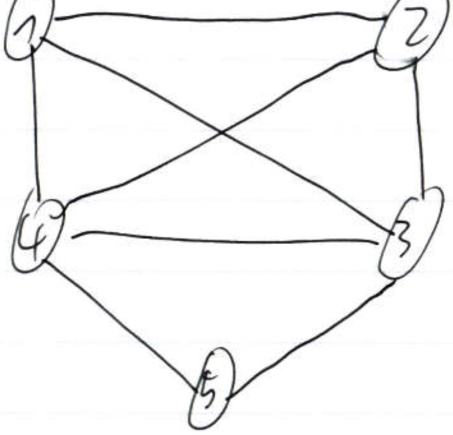
K_3 :



K_4 :



K_5 :



(4)

a) $\boxed{K_n = M_n}$

b) $(K_4)^4 = (M_4)^4$

Car $(-1)^4 = 1$

et $c_4 = \dfrac{(4-1)^4 + (-1)^5}{4} = \dfrac{3^4 - 1}{4} = \dfrac{80}{4} = 20$

Donc $(K_4)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 1 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 1 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

Il existe donc une seule chaîne de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui même.

(5)

Chaque sommet est relié à tous les autres sauf lui, il est donc adjacent avec $(n-1)$ sommet.

Ainsi, le degré de chaque sommet de K_n est $(n-1)$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 11

Numéro de table 6

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on pose d_i le degré du sommet i.
et $p \in \mathbb{N}$ le nombre d'arrêtes.
On sait alors que :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2p$$

Or on a vu que $d_i = (n-1)$

On obtient $\sum_{i=1}^{n} (n-1) = 2p$

ou encore $2p = n(n-1)$

Autrement dit, on a bien $p = \frac{n(n-1)}{2}$

Finalement, le nombre total d'arrêtes du graphe K_n est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Partie III :

7) $V_0 = \left(P(X_0=1) \quad P(X_0=2) \quad \cdots \quad P(X_0=n) \right)$
$= \left(1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right)$

car X_0 suit la loi certaine égale à 1.

En suite, chaque arrête à la probabilité $\frac{1}{n-1}$ d'être empruntée.
Autrement dit, $P(X_1=2) = P(X_1=3) = \cdots = P(X_1=n) = \frac{1}{n-1}$
En revanche, il est impossible que $[X_1 = 1]$ soit réalisé étant donné qu'à chaque étape on change de sommet.

Donc $P(X_1 = 1) = 0$

On obtient donc : $V_1 = \left(0 \quad \frac{1}{n-1} \quad \frac{1}{n-1} \quad \cdots \quad \frac{1}{n-1} \right)$

8) La matrice de transition de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$

⑨

a) Un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une matrice V de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ stochastique (par ligne) telle que $V = VX$ avec X la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$

b) La somme des coefficients de V est $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$

V est donc bien stochastique par ligne.

De plus, on a $VX = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n-1} \times \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n-1} \times \frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n-1} \times \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$= V$$

Ainsi, V est bien un état stable de $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

10

~~Soit~~ $\cancel{k \in \mathbb{N}}$ ~~, on a :~~

~~a)~~ $\cancel{V_{k+1} = V_0 \left(\frac{1}{n-1} M_n\right)^{k+1}}$

a) Soit $k \in \mathbb{N}$

On a $V_{k+1} = V_k \left(\frac{1}{n-1} M_n\right)$ car $\frac{1}{n-1} M_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots \\ \frac{1}{n-1} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ V_{k+1} = V_k \left(\frac{1}{n-1} M_n\right)}$$

b) Par récurrence immédiate, on montre alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_k = V_0 \left(\frac{1}{n-1} M_n\right)^k$$

D'où, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ V_k = V_0 \left(\frac{1}{(n-1)^k} M_n^k\right) = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k}$

c)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 11 / 11

Numéro de table 6

c)

~~Or on sait que si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet un état stable~~, alors ~~$(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi~~

Ainsi, $V_k = \frac{1}{(n-1)^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k + \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \cdots \\ \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{(n-1)^k}\begin{pmatrix} (-1)^k + \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \cdots & \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} \end{pmatrix}$

Ainsi, $P(X_k = 1) = \left(\frac{(-1)}{(n-1)}\right)^k + \frac{(n-1) + (-1)^{k+1}}{n\,(n-1)^k}$

et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $P(X_k = i) = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n\,(n-1)^k}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{n-1}\right)^k$

$= \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{-1}{n-1}\right)^k\right)$

non abouti.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE