ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

RAPHAËL

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 41

Numéro de table 041

Exercice 1 :

Partie 1

1) Soit $p \in]0,1[$, et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

a) $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$R_X(k) = P(X > k) = P\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right)$$

alors, par incompatibilité, $R_X(k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}$

$$= p \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^i = p \times \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = \underline{(1-p)^k}$$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on calcule :

$$\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} \quad \text{d'après 1a)}$$

$$= \frac{(1-p) \times (1-p)^{k-1}}{(1-p)^{k-1}} = \underline{1-p}$$

2)a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
on sait que $[X=k] \cup [X>k] = [X>k-1]$

alors par incompatibilité,

$$P(X=k) + P(X>k) = P(X>k-1)$$

$$\Rightarrow \quad P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)$$

$$\cancel{\Rightarrow \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^{k}}$$

Donc $\underline{P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}$,
On raisonne ici par double implication :
si X et Y suivent la même loi, alors,
$P(X=k) = P(Y=k)$
$\Rightarrow R_X(k-1) - R_X(k) = R_Y(k-1) - R_Y(k)$

Alors forcément $R_X(k) = R_Y(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

Supposons alors $R_X(k) = R_Y(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

Alors $R_X(k-1) - R_X(k) = R_Y(k-1) - R_Y(k)$

$\Rightarrow P(X=k) = P(Y=k)$

Donc X et Y suivent la même loi

Par double implication, X et Y suivent la même loi si et seulement si $R_X(k) = R_Y(k), \forall k \in \mathbb{N}$

Partie II.

3a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on résout :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a(n+1) - b}{(n+1)!} \Leftrightarrow n = an + a - b$$

Alors on a : $\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}}$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!}$$

et par <u>téléscopage</u>,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

or $\lim\limits_{N \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{(N+1)!} = 1$

Donc $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{n}{(n+1)!}$ <u>converge</u> et <u>vaut 1.</u>

4) a) Tout d'abord, comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$,
$(X+1)(\Omega) \subset [\![2 ; +\infty [\![$.
Montrons alors la convergence de $\sum\limits_{n \geq 2} nP(X+1=n)$

Soit $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} nP(X+1=n) = \sum_{n=2}^{N} nP(X=n-1) = \sum_{n=2}^{N} n \times \frac{(n-1)}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!}$$

on reconnait ici le terme général d'une <u>série géométrique,</u>

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 41

Numéro de table 041

donc X+1 admet une espérance, et

$$E(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Ensuite, par linéarité de l'espérance,

$$E(X)+1 = e \Rightarrow E(X) = e-1$$

b) D'après le théorème du transfert, $(X-1)(X+1)$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq 1} (n-1)(n+1)P(X=n)$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} (n-1)(n+1)\, P(X=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n\ )!}$$

Donc de manière analogue,

$$E((X-1)(X+1)) = e.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Or d'après Koenig-Huygens,

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= E((X-1)(X+1)) + 1 - E(X)^2$

$= e + 1 - (e-1)^2 = e+1 - e^2 + 2e - 1 = -e^2 + 3e$

Donc $\underline{V(X) = e(3-e)}$

Partie III :

5) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
on note l'évènement A_k : "Le module continue à fonctionner après la fin de l'année k".
~~$R_X(k) = P(X > k) = P($ X~~

$R_X(k) = P(X > k) = P([X > k-1] \cap A_k)$

$= P(X > k-1) P_{[X > k-1]}(A_k)$ d'après la formule des probabilités composées,

et alors, d'après l'énoncé, on obtient :

$R_X(k) = P(X > k-1)(1 - \alpha_k)$ Donc $\underline{R_X(k) = R_X(k-1)(1-\alpha_k)}$

6) On raisonne ici par <u>récurrence</u>,

<u>Initialisation</u> : soit $k = 1$,

d'un côté, on a $R_X(k) = R_X(1) = P(X > 1) = P($ "le module ne tombe pas en panne la première année" $)$.

Donc $R_X(k) = 1 - \alpha_1 = \prod_{i=1}^{1} (1-\alpha_i)$

Donc l'initialisation est vérifiée.

<u>Hérédité</u> : On suppose, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, que
$R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)_{k+1}$
Montrons que $R_X(k+1) = \prod_{i=1}^{} (1-\alpha_i)$

d'après la question 5), $R_X(k) = (1-\alpha_k) R_X(k-1)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$R_X(k+1) = (1-\alpha_{k+1}) R_X(k) = (1-\alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)$$

d'après l'hypothèse de récurrence,

Alors, $R_X(k+1) = \prod_{i=1}^{k+1} (1-\alpha_k)$

<u>Conclusion</u> : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_k)$

7) D'après la question 2a),
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)$
Donc
$$P(X = k) = \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_k) - \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_k)$$

8) Alors, ici, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-p) - \prod_{i=1}^{k}(1-p)$$
$$= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = p(1-p)^{k-1}$$

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on reconnait que X suit une <u>loi géométrique de paramètre p</u>.

9) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
on a ici : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et

$$P(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{i+1}\right) - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{i}{i+1}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i+1}\right) - \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \underline{\frac{k}{(k+1)!}},$$

Donc X suit la même loi que la variable introduite dans la partie 2.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 41

Numéro de table 041

Partie IV

9a) SELECT COUNT (id) FROM ordinateur

9b) SELECT COUNT (id) FROM ordinateur
WHERE annee_panne = 2001

c) Comme si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $P(X=1) = p$

Alors, en divisant les résultats de la question 9a sur 9b, on trouve une estimation de p.

10) SELECT

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

11a) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$. $E(X) = \frac{1}{p}$

Ainsi la commande renvoie une approximation de $1/p$. On peut donc facilement estimer p.

b)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 13 / 41

Numéro de table 041

Exercice 2

Partie I :

1a) Comme $\frac{e^{-2at-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 \times \frac{1}{e^{2at+t^2}}$

par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{2at+t^2}} = 0$

Donc $e^{-2at-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

b) comme $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-2at-t^2} \geq 0$
et d'après les critères de convergence de Rieman

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge avec $\alpha = 2 > 1$
Alors, d'après le théorème de comparaison d'intégrales à termes positifs, $\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or, comme J_a est uniquement impropre en $+\infty$, alors, $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ converge.

Donc J_a est convergente.

2) Comme on a montré que

$\int_0^{+\infty} |e^{-2at-t^2}| dt$ converge, alors par convergence absolue $e^{2ax} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ converge aussi.

Donc $I_a : x \longmapsto \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3a) Comme $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ est convergente,

et $\forall t \geq 0,\ e^{-2at-t^2} \geq 0$

~~Alors, $\forall x > 0,$ $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt \geq \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$~~

Alors, $\forall x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt + \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt$$

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt$ d'après 1b)

Donc $\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = 0.}$

b) Soit $a \geq 0$,
$\forall x \in \mathbb{R}$,
Soit $A > x$,
alors, comme $a \geq 0$, $-2at - t^2 \leq -t^2$

$$\Rightarrow e^{-2at-t^2} \leq e^{-t^2}$$

alors, par croissance de l'intégrale,

$$\int_x^{A} e^{-2at-t^2}dt \leq \int_x^{A} e^{-t^2}dt$$

or comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge d'après le cours, Alors, par comparaison, ces deux intégrales converge.

Donc on a bien

$$I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

~~On a donc~~

c) Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge

si $a \geq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0$$

or d'après la question précédente,

$$0 \leq I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Donc par encadrement, $\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

si $a < 0$, $e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-2at-t^2}$

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$

et d'après la question 3a) $\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$ par encadrement

Donc $\forall a \in \mathbb{R}$ $I_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 17 / 41

Numéro de table 041

Partie II :

4) L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{ y : t \longmapsto \lambda e^{2at}, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$,
$t \longmapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème central de l'analyse,

$F_a : x \longmapsto \int_0^x e^{-2at-t^2} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc dérivable, et

$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2} dt = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$= e^{2ax}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}\,dt\right)$$

$$= e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right)$$

Donc $\underline{I_a(x) = e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right)}$

c) Comme $x \mapsto e^{2ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

Alors, par produit I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$,

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_a'(x) = 2a I_a(x) - e^{2ax} \times \left(e^{-2ax-x^2}\right)$

$$= 2a I_a(x) - e^{-x^2}$$

Ainsi, $\underline{I_a \text{ est bien solution de } (1)}$ car elle vérifie

bien $y' = 2ay - e^{-x^2}$

6) I_a est donc une solution particulière de (1)

Donc l'ensemble des solutions de (1) est :

$$S : \{ y : t \longmapsto \lambda e^{2at} + I_a(t) \, , \, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

7) a) Soit $a < 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \lambda e^{2at} = 0$$

or on a montré aussi $\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

Donc l'ensemble de solution ne change pas et est :

$$\{ y : t \longmapsto \lambda e^{2at} + I_a(t) \, , \, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

b) Si $a = 0$

comme $\lim_{t \to +\infty} I_a(t) = 0$

l'ensemble des solutions est

$$\{ y : t \longmapsto I_a(t) \}$$

c) Si $\underline{a>0}$,

Comme $\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$

on veut $\lim_{t \to +\infty} \lambda e^{2at} = 0$

Donc forcément, $\lambda = 0$

Alors, l'ensemble est le même que celui de la question 7c, soit

$$\underline{\{ y : t \mapsto I_a(t) \}}$$

Partie $\underline{III}$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-a, \frac{1}{2})$

8a) L'expression d'une densité est :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+a)^2}{2 \times \frac{1}{2}}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+a)^2}}$$

b) si $a = 2$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2}$$

f est $\underline{\text{dérivable}}$ sur $\mathbb{R}$,

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 21 / 41

Numéro de table 041

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_x'(x) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \times 2(x+2)\, e^{-(x+2)^2}$$

$$= \frac{-2(x+2)}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2}$$

Donc $f_x'(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$

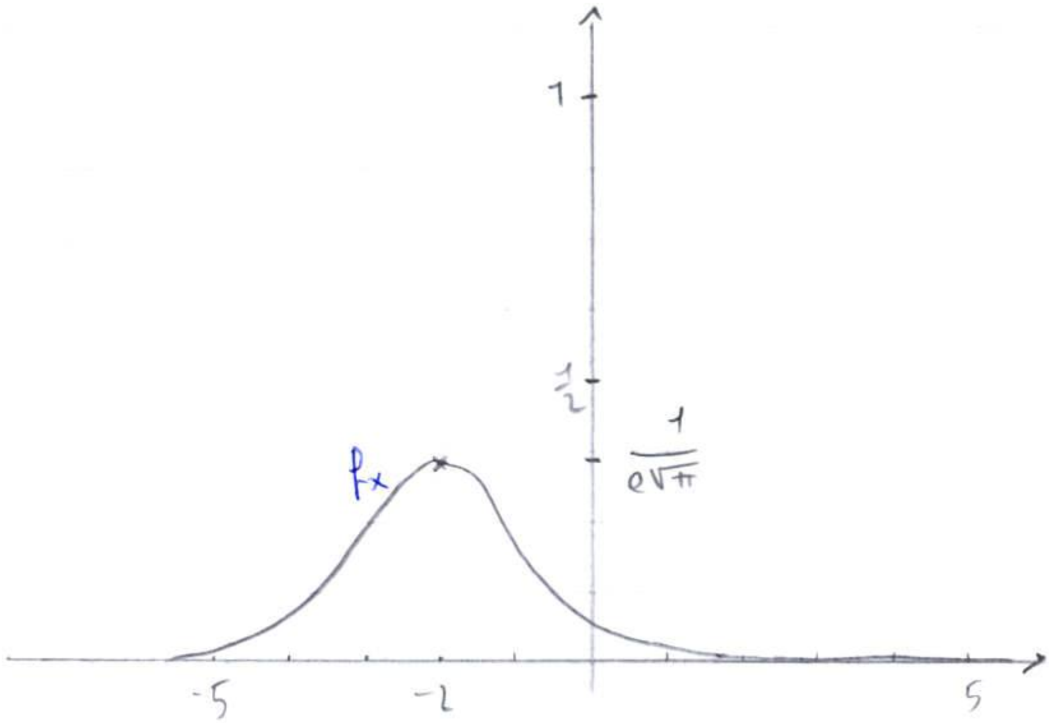
Donc on a : f_x croissante sur $]-\infty, -2]$ et décroissante sur $[-2, +\infty[$.

Aussi, $f_x(-2) = \dfrac{1}{e\sqrt{\pi}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20



Le point $\frac{1}{e\sqrt{\pi}}$ a été placé approximativement

sachant $\frac{1}{2} > \frac{1}{e\sqrt{\pi}} > 0$

9) Soit $x \in \mathbb{R}$,

Comme $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x)$
car X est à densité, alors,

$$P(X \geq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \int_{x}^{+\infty} f_X(x)dx$$

b) Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t+a)^2} dt$$

$$\Rightarrow P(X \geq x) = (\sqrt{\pi})^{-1} \int_x^{+\infty} e^{-t^2 - 2at - a^2} dt$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} \times e^{2ax + a^2} P(X \geq x) = e^{2ax+a^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2 - 2at - a^2} dt$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} \times e^{2ax+a^2} P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$$

or $$\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt = I_a(x)$$

Donc $$\underline{I_a(x) = \sqrt{\pi} \times e^{2ax+a^2} P(X \geq x)}$$

10) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On raisonne à l'aide de l'espérance et de la variance,

$E(X) = -a$, et $V(X) = \frac{1}{2}$.

On résout :

$$\begin{cases} E(X) = E(Z) \\ V(X) = V(Z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = \alpha E(Z) + \beta \\ \frac{1}{2} = \alpha^2 V(Z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = \beta \\ \frac{1}{2} = \alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -a \\ \alpha = \left|\frac{1}{4}\right| \end{cases}$$

Ainsi, pour que $\alpha Z + \beta$ suivent la même loi que X, il faut : $\beta = -a$ et $\alpha = \frac{1}{4}$ ou $-\frac{1}{4}$

Donc $\underline{X = \frac{1}{4} Z - a}$

b)
```
import numpy as np
import numpy.random as rd.
def estim_proba (a, x):
    num = 0
    for i in range (10000):
        Z = rd. normal ()
        X = -a + Z/4
        if X >= x :
            num = num + 1
    return num / 10000
```

4)
```
def approx _ I (a,x):
    return np.sqrt(np.pi) * np.exp (2*a*x + a**2) * estim_proba(a,x)
```

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 25 / 41

Numéro de table 041

Exercice 3 :

1) a) Ici, M est symétrique, donc elle est diagonalisable.

b) On calcule :

$M+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)$

Donc $(M+I)^2 - 3M - 3I = 0_3$

Le polynôme annulateur de M est donc :

$P : X \longmapsto (X+1)^2 - 3X - 3$

Alors $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$

c) Par conséquent,

$$\underline{Sp(A) \subset \{-1, 2\}}$$

or $\quad A + I = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Donc soit $\quad X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A+I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \iff x+y+z=0$$

$$\iff x = -y-z$$

Alors, $\quad E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

ces deux vecteurs étant non colinéaires.

Alors $\quad \underline{-1 \in Sp(A)}$

Aussi, $\quad A - 2I = \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$

or $\quad (A-2I)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0_{3,1}$

Ainsi, $\quad \underline{2 \in Sp(A)}$

et $\quad E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$,

car $\dim E_2(A) + \dim E_{-1}(A) \leq 3$

On peut donc conclure que
$\underline{Sp(A) = \{-1, 2\}}$.

et une base de chaque sous espace propre de A est :

pour -1 : $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

pour 2 : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (base car vecteur non nul)

d) Comme P est constituée de colonnes étant des <u>vecteurs propres associés</u> aux valeurs propres -1 et 2, ses colonnes forme donc une base, ce qui <u>garantit l'inversibilité de P.</u>

Aussi, on vérifie :

$$PP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I.$$

Donc on a bien $\underline{P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

e) Comme P constitue ~~la~~ une matrice de passage A est donc semblable à D.

et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

f) On raisonne par récurrence :

Initialisation : Soit $n = 0$

$A^0 = I$. et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$.

Donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}$

Montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence et l'énoncé,

alors $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

On peut donc conclure.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 29 / 41

Numéro de table 841

9) Soit $k \in \mathbb{N}$,
Tout d'abord, $A^0 = I$.

Donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$

on cherche alors à calculer A^k.

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^{k+2} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^{k+2} + 2^k \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

En remarquant que $(-1)^{k+2} = (-1)^k$.

On trouve :

$$A^k = \frac{1}{3}\left(2(-1)^k + 2^k\right) I + \frac{1}{3}\left((-1)^{k+1} + 2^k\right) A$$

Donc on trouve :

$$\boxed{\begin{cases} a_k = \frac{1}{3}\left((-1)^{k+1} + 2^k\right) \\ b_k = \frac{1}{3}\left(2(-1)^k + 2^k\right) \end{cases}}$$

2) Soit $n \geq 2$,

a) On raisonne <u>par récurrence</u> :

<u>Initialisation</u> : soit $k = 1$,

$$J_n^1 = J_n$$

et $n^{1-1} J_n = J_n$

Donc l'initialisation est vérifiée

Hérédité : on suppose que $J_n^k = n^{k-1} \times J_n$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$,

$J_n^{k+1} = n^{k-1} J_n^2$ d'après l'hypothèse.

or $J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$= n \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = n J_n$

Donc $J_n^{k+1} = n^{k-1} \times n J_n = n^k J_n$

On conclue ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\underline{J_n^k = n^{k-1} J_n}$.

b) On a : $A_n = J_n - I_n$.

c) Comme J_n et I_n commutent $(I_n \times J_n = J_n \times I_n)$ d'après le binôme de Newton,

$A_n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i \times (-I_n)^{k-i}$

$= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} J_n \times (-1)^{k-i} I_n^{k-i} + (-I_n)^k$

or $I_n^{k-i} = I_n$, $\forall (k,i) \in \mathbb{N}^2$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i} I_n + (-I_n)^k$$

$$= J_n \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} + (-1)^k I_n$$

d) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} - (-1)^k \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left((n-1)^k + (-1)^{k+1} \right)$$

$$= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 33 / 41

Numéro de table 041

e) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

les coefficients non diagonaux de $(A_n)^k$ sont donc égaux

à $\quad c_k = \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$

et ceux diagonaux à : $\frac{1}{n}\left((n-1)^k + (-1)^k\right) + (-1)^k$

Partie II.

$n \geq 2$,

3) on a :

K_2 : 

K_3 :

K_4 : 

K_5 : 

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

4a) La matrice d'adjacence du graphe K_n est

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_n$

b) On s'intéresse ici à la valeur

de $c_4 + (-1)^4$ avec $n = 4$.

qui vaut $\frac{3^4 + (-1)^5}{4} = \frac{1}{4}(3 \times 3 \times 3 \times 3 - 1) = 20$

5) Le degré de chaque sommet de K_n vaut $n-1$.

6) Comme c'est un graphe non orienté, on divisera par 2 pour éviter de compter les arêtes deux fois, et comme il y a n sommet on a donc

$n \times (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes au total pour K_n

Partie III.

7) Comme à l'étape 0 on est au sommet 1 :

$$V_0 = (1 \quad 0 \ldots \quad 0)$$

et $V_1 = \frac{1}{n-1}(0 \quad 1 \ldots \quad 1)$ car on change forcément

8) Soit N_n la matrice de transition de (X_n)

on a la relation, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$V_{k+1} = V_k N_n$$

Donc $N_k = \begin{pmatrix} P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=1) & \cdots & P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=n) \\ P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=1) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{[X_k=n]}(X_{k+1}=1) & & P_{[X_k=n]}(X_{k+1}=n) \end{pmatrix}$

et donc d'après l'énoncé,

$$\underline{N_k = \frac{1}{n-1} \times \Pi_n}$$

a) Soit π un état stable de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

- $\pi = (\pi_1 \dots \pi_n)$
- $\sum_{k=1}^{n} \pi_k = 1$

et $N_n {}^t\pi = {}^t\pi$

b) On calcule :

$${}^tV = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aussi, $N_n {}^tV = \frac{1}{n(n-1)} \Omega_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{n-1}{n-1} = {}^tV$$

Donc V est bien un état stable

10a) $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $V_{k+1} = \frac{1}{(n-1)} V_k \Omega_n$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 38 / 41

Numéro de table 041

b) On raisonne par récurrence

Initialisation : pour $k=0$

$V_0 = \frac{1}{(n-1)^0} V_0 (M_n)^0$, donc l'initialisation est vérifiée

Hérédité : on suppose que $V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k$, pour un $k \in \mathbb{N}$,

or $V_{k+1} = \frac{1}{(n-1)} V_k M_n$

$= \frac{1}{(n-1)} \times \frac{1}{(n-1)^k} V_0 M_n^k \, M_n$ d'après l'hypothèse

$= \frac{1}{(n-1)^{k+1}} V_0 M_n^{k+1}$

Donc on peut conclure

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c) On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 \times \left(c_k S_n + (-1)^k I_n \right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^k} \left(c_k + (-1)^k \quad c_k \quad \cdots \quad c_k \right)$$

or $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{(-1)^k}{(n-1)^k} = 0$ car $\frac{-1}{n-1} \in]-1,1[$.

on cherche alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{c_k}{(n-1)^k}$

or $\frac{c_k}{(n-1)^k} = \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{-1}{n-1} \right)^k \right)$

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{c_k}{(n-1)^k} = \frac{1}{n}$

comme $(X_k)(\Omega) = [\![0, n]\!]$,

et $\forall i \in [\![0, n]\!], \lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = i) = \frac{1}{n}$

Alors, (X_n) converge en loi vers une loi uniforme discrète :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{U}, \quad \text{où} \quad \mathcal{U} \sim \mathcal{U}(⟦0,n⟧)$$

11) On remarque que l'état stable ✓ confirme la convergence en loi trouvé question 10c).