

ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques approfondies

CHALANCON

ARTHUR

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription



Né(e) le

Nom

CHALANCON

Prénom (s)

ARTHUR

20 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

Problème :

Partie 1:

① f est de classe C^0 sur \mathbb{R} ($x^2 + a^2 > 0$)

f est positive sur \mathbb{R}

+ Soient $A, B \in \mathbb{R}^+$. t_g $A < 0 < B$

$$\int_A^B \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} dx = \frac{a}{\pi a^2} \int_A^B \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_A^B$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{B}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{A}{a}\right)$$

lorsque $B \rightarrow +\infty$

$$\int_A^B \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} dx \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{A}{a}\right)$$

lorsque $A \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{A}{a}\right) \right) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(x^2+a^2)} dx$ converge et vaut 1

donc f est une densité de probabilité.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{a}{\pi(t^2+a^2)} dt$$

Soit $B < 0$

$$\int_B^x \frac{a}{\pi(t^2+a^2)} dt = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_B^x$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{B}{a}\right)$$

$$\xrightarrow{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_x(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$

3) $E(X)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$

converge absolument, c'est-à-dire
si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{a}{\pi(t^2+a^2)} dt \text{ converge}$$

$$a \quad \frac{t a}{\pi(t^2+a^2)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a t}{\pi t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\pi t}$$

or $\frac{a}{\pi t}$ diverge en $+\infty$ d'après les

critères de comparaison de Riemann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \text{ diverge}$$

donc X n'admet pas d'espérance.

4) Supposons, X suit une loi de Cauchy standard.

$$\text{ainsi } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

$$\text{posons } Y = aX$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_Y(x) = \frac{1}{|a|} \times f_X\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|} \times \frac{1}{\pi\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{1}{\pi(x^2+a^2)} \times a^2 = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$$

On vient donc de démontrer que Y suit une loi de Cauchy de paramètre a .

Réciproquement par un procédé similaire en posant de la variable Y .

$$\frac{1}{a} Y = X$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) &= |a| f_Y(xa) \\ &= a \times \frac{a}{\pi(xa)^2 + a^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{a^2} \times \frac{1}{\pi(x^2+1)} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

donc X suit une loi de Cauchy standard
Ainsi on a bien l'équivalence!

5) Soit $h \in \mathbb{N}^+$ Soit $x \in \mathbb{N}^+$

a) $\forall t \in \mathbb{N}$

$$g(t) = \frac{\alpha t + B}{t^2 + h^2} + \frac{\alpha(x-t) + \gamma}{(x-t)^2 + 1}$$

$$= \frac{(\alpha t + B)((x-t)^2 + 1) + (\alpha(x-t) + \gamma)(t^2 + h^2)}{(t^2 + h^2)((x-t)^2 + 1)}$$

=

Numéro d'inscription



Né(e) le

Nom

C H A L A N C O N

Prénom (s)

A R T H U R

20 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

b) or a:

$$\begin{cases} B + y = \alpha x \\ \alpha(x^2 + 1 - a^4) = 2\beta x \\ B(x^2 + 1) + \alpha x h^2 + y h^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + y = \alpha x \\ (x^2 + 1 - a^4)(B + y) = 2\beta x \\ B(x^2 + 1) + \alpha x h^2 + y h^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B + y = \alpha x \\ B(x^2 + 1 - a^4) + y(x^2 + 1 - a^4) = 2\beta x^2 \\ B(x^2 + 1) + B h^2 + y h^2 + y h^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B + y = \alpha x \\ B(x^2 + 1 - a^4) + y(x^2 + 1 - a^4) = 2\beta x^2 \\ B(x^2 + 1 + h^2) + 2y h^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B + y = \alpha x \\ B(1 - a^4) + y(x^2 + 1 - a^2) = \beta x^2 \end{cases}$$

c) m a :

$$\begin{cases} B(x^2+h^2+1)+2yh^2=1 \\ 2B+y(x^2+h^2+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(x^2+h^2+1)+2yh^2=1 \\ 2B+y(x^2+h^2+1)=1 \end{cases}$$

d) $\forall t \in \mathbb{R}$

f est dérivable par somme

de fonctions dérivables sur \mathbb{R}

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = \frac{\alpha}{2} \times \frac{(2t(x-t)^2 + 2x)}{((x-t)^2+1)^2} \times \frac{((x-t)^2+1)}{(t^2+h^2)} +$$

$$\frac{B}{h} \times \frac{1}{h} + \frac{1}{1+(\frac{t}{h})^2} + \gamma \times \frac{1}{1+(t-x)^2}$$

$$= \alpha \frac{(t(x-t)^2+x)}{(x-t)^2+1} \times \frac{1}{(t^2+h^2)} + \frac{B}{h^2+t^2} + \gamma \frac{1}{1+(t-x)^2}$$

$$= \alpha \frac{(t(x-t)^2+x) + B(1+(t-x)^2)}{(h^2+t^2)(x-t)^2+1} + \gamma (h^2+t^2)$$

$$= \underline{g(t)}$$

donc f est une primitive de g

6) Soit $h \in \mathbb{N}^*$

a) X, Y sont deux variables indépendantes.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\pi(h^2+t^2)} \times \frac{1}{\pi(x-t)^2+1} dt$$

$$= \frac{h}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$$

$\left. \begin{array}{l} \int \\ \int \end{array} \right\} g$ admet comme primitive G .

$$= \frac{h}{\pi^2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) \right)$$

b) Déterminons $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{\alpha}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{t^2+h^2}{(x-t)^2+1} \right) + \frac{B}{h} \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \frac{t^2+h^2}{(x-t)^2+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} \rightarrow 1$$

$$\alpha \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{B}{h} \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{B+\gamma h}{h} \right).$$

de même on montre que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = -\frac{B}{h} \frac{\pi}{2} - \gamma \frac{\pi}{2}$$

$$\text{aussi } \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = \frac{B}{h} \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{B}{h} \frac{\pi}{2} - \gamma \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{h} (B+\gamma h)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$f^{(n)}(x) = \frac{h}{\pi^n} \prod_{k=1}^n (B + y_k)$$

$$= \frac{1}{\pi} (B + y) \underset{f(x)}{\uparrow} = \frac{1}{\pi} \frac{h+1}{x^2 + (h+1)^2}$$

on reconnaît une loi de Cauchy de paramètre $h+1$.

donc $X+Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $h+1$

7) $\forall h \in \mathbb{N}^+$ montrons $\dots P_h$: si X_1, \dots, X_h sont mutuellement indépendantes et suivent la loi Cauchy de paramètre a , alors $X_1 + \dots + X_h$ suit la loi de Cauchy de paramètre ha .

(I) si h égale 1. X_1 suit une loi de Cauchy de paramètre a et donc P_1 est vrai

Supposons qu'il existe $h \in \mathbb{N}^+$ tel que P_h soit vrai
posons $Y = \sum_{i=1}^h X_i$

montrons $Y + X_{h+1}$ suit une loi de Cauchy de paramètre $(h+1)a$.

Y suit une loi de Cauchy de paramètre ha
posons $X_{h+1} = a + bT_{h+1}$ où T_{h+1} suit une loi Cauchy standard.

d'après la question 6)

donc d'après le produit de convolution (6) a)

entre Y et X_{h+1} admet une densité et suit une loi de Cauchy de paramètre $(h+1)a$



Né(e) le

Nom

CHALANÇON

Prénom(s)

ARTHUR

20 / 20



Épreuve: Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille /

Numéro de table

Commencez à composer dès la première page...

Partie II:

8) $\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(a \tan\left(\left(U - \frac{1}{2}\right)\pi\right) \leq x\right)$$

$$= P\left(\tan\left(\left(U - \frac{1}{2}\right)\pi\right) \leq \frac{x}{a}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } a > 0 \\ \text{tan strictement} \\ \text{croissante sur } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$= P\left(U \leq \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } U \in \mathcal{U}([0, 1]) \end{array} \right\}$$

donc Y suit bien une loi de Cauchy de paramètre a .

9) def cauchy(a):

$$y = a + \text{mp.tan}\left(\text{mp.pi}\left(\text{rd.random()}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

return y

10) def. realisation (n, a) :

$$A = \text{mp. jets } (n)$$

fa h in in range $(0, n)$:

$$A[h] = \text{cauchy}(a)$$

return A.

11) def moyennes (n, a)

$$B = \text{mp. jets } (n)$$

fa h in range $(0, n)$:

$$B[h] = 1/n * \text{realisation}(n, a)$$

return B.

12) on en déduit que la variable X suivant
cette loi de Cauchy de paramètre a n'a pas
d'espérance car les queues sont fatiguement
différentes. Cela fait sens avec la question 3)

Partie 3:

$$13) Y_n(1) = \mathbb{I}_{[0, 1]}$$

$$P(Y_n = 1) = P(|X_n| \leq 1)$$

$$= P(-1 \leq X_n \leq 1) = F(1) - F(-1)$$

$$\text{aussi } Y_n \sim \text{Ber}(F(1) - F(-1))$$

$$P(Y_n = 1) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(-\frac{n}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$$

↙ $t \mapsto \arctan(t)$ est impaire

14) Y_1, \dots, Y_n sont mutuellement indépendantes, de même loi, admettant la espérance.

Ainsi d'après la loi faible des grands nombres comme \bar{Y}_n est une moyenne empirique

$$\bar{Y}_n \xrightarrow{P} E(Y_1) = p(a) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$$

$\bar{Y}_n \rightsquigarrow \text{Ber}(p(a))$

15) a) $V > 0$ Soit $n > 0$

$$\frac{n}{a} > 0 \quad \text{donc} \quad \arctan\left(\frac{n}{a}\right) > 0$$

↘ $t \mapsto \arctan(t)$ croissante sur \mathbb{R} .

$$\text{donc} \quad \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right) = p(a) > 0$$

posons $f(n) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$

f est strictement croissante sur \mathbb{N}_+

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad f(n) < \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

$$\text{or} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 1$$

$$\text{donc} \quad f(n) < 1$$

$$\text{ie} \quad \underline{p(a) < 1}$$

posons $x = p(a)$ donc $x \in]0, 1[$

posons $g(x) = x(1-x)$

g est dérivable sur $]0, 1[$ et $g'(x) = 1 - 2x$

$$1 - 2x > 0$$

$$\frac{1}{2} > x$$

ainsi g admet un maximum en $\frac{1}{2}$

$$\text{et } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ainsi } \forall x \in [0, 1] \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \underline{\varphi(a)(1-\varphi(a)) \leq \frac{1}{4}}$$

⊙ ϕ est une fonction continue sur \mathbb{N} .
de plus ϕ est une fonction strictement
croissante sur \mathbb{N}

$$\text{de plus } \phi(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 < 0,975$$

$$\text{et } \phi(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1 > 0,975$$

donc d'après le théorème de la bijection

$$\exists! z \in \mathbb{N} \text{ tq } \phi(z) = 0,975$$

$$\text{a } \phi(0) = \frac{1}{2} < 0,975$$

donc $\phi(0) < \phi(z)$ car $\phi(n)$ est strictement croissante

$$\text{donc } 0 < z$$

$$\text{donc } \underline{\exists! z \in \mathbb{N}^+, \text{ tq } \phi(z) = 0,975}$$

16) On remarque que lorsque $n \rightarrow \infty$

les intervalles de confiance de a se réduisent

autour de valeur 1. Donc plus la

valeur de n est grande, plus il y a de

chances que "la valeur se trouve proche de 1"

17) On attend d'un intervalle de confiance qu'il soit
précis, c'est-à-dire avec un taux de prédiction de
la valeur finale élevé. On remarque que plus $\frac{n}{a}$ est petit, plus
l'intervalle est précis

Numéro d'inscription



Né(e) le

Nom

C H A L A N S O N

Prénom (s)

A R T H U R

20 / 20



Épreuve: Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0	4
---	---

 /

0	7
---	---

Numéro de table

0	0	2
---	---	---

Commencez à composer dès la première page...

Ex 1:

① $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$ et
divergente si $\alpha \leq 1$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha > 1$
et divergente si $\alpha \leq 1$.

2) a) pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$
 f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^*
 $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(t) = -\frac{2}{t^3} < 0$
donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^*

$\forall n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$
Ainsi $\forall t \in [n, n+1]$ et $\forall h \in [n-1, n]$

$$f(t) \leq f(n) \leq f(h)$$

d'où $\int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt$ par croissance de l'intégrale comme $n+1 > n$

ie $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} \leq \frac{(n+1-n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

de même en intégrant entre $[n-1, n]$, par croissance de l'intégrale

$$\int_{n-1}^n f(t) dt \leq \int_{n-1}^n f(h) dh$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{h^2} dh$$

Ainsi on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt$$

b) $\forall N \in \mathbb{N}^+$ en sommant de $N+1$ à $A \in \mathbb{N}$, $A > N+1$
l'inégalité précédente

$$\sum_{n=N+1}^A \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{n=N+1}^A \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^A \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_{N+1}^{A+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{n=N+1}^A \frac{1}{n^2} \leq \int_N^A \frac{1}{t^2} dt$$

$$\left[-\frac{1}{t} \right]_{N+1}^{A+1} \leq \sum_{n=N+1}^A \frac{1}{n^2} \leq \left[-\frac{1}{t} \right]_N^A$$

$$-\frac{1}{A+1} + \frac{1}{N+1} \leq \sum_{n=N+1}^A \frac{1}{n^2} \leq -\frac{1}{A} + \frac{1}{N}$$

lorsque $A \rightarrow \infty$ comme la série est convergente (2)

$$\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$$

$$3) \quad |S_n - S| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} |S - S| = 0$$

donc $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0 \quad |S_N - S| < 10^{-3}$ par
définition de la limite

$$\text{par } N_0 = 100000000$$

$$\text{alors } \forall N \geq N_0 \quad |S_n - S| < 10^{-3}$$

$$a) a) \quad \forall N \in \mathbb{N}^+$$

$$|T_N - S| = \left| S_N + \frac{1}{N+1} - S \right|$$

$$= \left| S_N - S + \frac{1}{N+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N+1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{N+1} - R_N \right|$$

$$2) b) \quad \leq R_N - \frac{1}{N+1} \quad \text{par } R_N \geq \frac{1}{N+1}$$

$$\leq \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{N^2}$$

$$\text{ainsi } \forall N \in \mathbb{N}^+ \quad |T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$$

$$b) \quad \text{Or a donc}$$

$$0 \leq |T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$$

$$\text{à } \frac{1}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

donc par encadrement quand $N \rightarrow \infty$

$$T_N - S \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

donc par définition de la limite

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall N \geq N_1 \quad |T_N - S| \leq 10^{-3}$$

posons $N_1 = 10000000 < N_0$

5) a) Soit $p \in \mathbb{N}^+$

$$\textcircled{a} \quad U_m(p) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{m^{p+1}}$$

$$\textcircled{b} \quad \forall p \in \mathbb{N}^+ \quad p+1 > 1$$

et $U_m(p) > 0$

alors $\sum_{m \geq 1} U_m(p)$ converge

6) a) $U_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} &= \frac{(n+1)a + bn}{n(n+1)} \\ &= \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} \end{aligned}$$

par identification on a :

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

ainsi $U_n(1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b) Soit $N > m$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N U_n(1) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

\swarrow $m = m+1$

Numéro d'inscription



Né(e) le

Nom

CHALANCON

Prénom(s)

ARTHUR

20 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table

002

Commencez à composer dès la première page
 $= 1 - \frac{1}{N+1}$ (par télescopage)

$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$

ainsi $U(1) = 1.$

7) a) $\forall (m, p) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+, \forall n$

$U_m(p-1) - U_{m+1}(p-1) = \frac{1}{m(m+1) - (m+p-1)} - \frac{1}{(m+1)(m+2) - (m+1+p-1)}$

$= \frac{1}{m(m+1) - (m+p-1)} - \frac{1}{(m+1) - (m+p)}$

$= \frac{m+p - m}{m(m+1) - (m+p)} = \frac{p}{m(m+1) - (m+p)} = p U_m(p).$

b) $\forall p \in \mathbb{N}^+$ on a $P(p) : " U(p) = \frac{1}{p \cdot p!} "$

Initialisation : $U(1) = 1$ (d'après 6b)

et $\frac{1}{1 \times 1!} = 1.$

d'où $P(1)$ est vraie

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Supposons qu'il $p \in \mathbb{N}^+$ tq $P(p)$ soit vraie
montrons $P(p+1)$ est vraie.

$$U(p+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(p+1)$$

$$\text{a } \forall p \in \mathbb{N}^+ \quad U_n(p+1) = \frac{1}{p+1} (U_n(p) - U_{n+1}(p))$$

$$\begin{aligned} \text{donc } U(p+1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p+1} (U_n(p) - U_{n+1}(p)) \quad \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{+\infty}} \right\} \text{ séries convergentes} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(p) - \frac{1}{p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} U_{n+1}(p) \\ &= \frac{1}{p+1} U(p) - \frac{1}{p+1} (U(p) - U_1(p)) \\ &= \frac{1}{p+1} \frac{1}{p e!} - \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{p! e^p} - \frac{1}{(p+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{p+1} \frac{1}{(p+1)!} \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence

8) a) Procédure par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^+$

Initialisation : $p=1$.

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{1!}{n^2(n-1)} + 0! \cdot U_n(1) = \frac{1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1+n}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2} \quad \text{donc l'initialisation est vraie}$$

Supposons qu'il existe $\forall p \in \mathbb{N}^+ + 1$ la relation soit vraie

$$\frac{(p+1)!}{m^2(m+1) - (m+p+1)} + \sum_{h=1}^{p+1} (h-1)! U_m(h)$$

~~$$= \frac{(p+1)!}{m^2(m+1) - (m+p+1)} + \sum_{h=1}^{p+1} \frac{(h-1)!}{m(m+1) - (m+h)}$$~~

~~$$= \frac{(p+1)!}{m^2(m+1) - (m+p)} + \sum_{h=1}^{p+1} \frac{(h-1)! (m-1)!}{(m+h)!}$$~~

$$= \frac{(p+1)!}{m^2(m+1) - (m+p+1)} + \sum_{h=1}^p (h-1)! U_m(h) + \rho! U_m(p+1)$$

$$= \frac{(p+1)!}{m^2(m+1) - (m+p+1)} + \frac{1}{m^2} - \frac{\rho!}{m^2(m+1) - (m+p)} + \frac{\rho!}{m(m+1) - (m+p+1)}$$

hypothesis
de
récurrence

$$= \frac{1}{m^2} + \frac{(p+1)! - \rho!(m+p+1) + \rho! m}{m^2(m+1) - (m+p+1)}$$

$$= \frac{1}{m^2} + \frac{(p+1)!(m+p+1) - \rho!(m+p+1 - m)}{m^2(m+1) - (m+p+1)}$$

$$= \frac{1}{m^2} \frac{(p+1)! - (p+1)!}{m^2(m+1) - (m+p+1)} = \frac{1}{m^2}$$

Ce qui achève la récurrence

b) $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^2(n+1) - (n+p)} \sim \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^{p+2}}$$

$$\text{a } \forall p \in \mathbb{N}^* \quad p+2 > 1$$

$$\text{et } \forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n^2(n+1) - (n+p)} > 0$$

$$\text{donc } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1) - (n+p)} \text{ converge}$$

Ainsi en sommant l'égalité de la question 8) a) de n allant de 1 à $+\infty$:

on a:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) - (n+p)} + \sum_{h=1}^p (h-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(h)$$

$$S = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) - (n+p)} + \sum_{h=1}^p (h-1)! U(h) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} U(h) = \frac{1}{h!}$$

$$= p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1) - (n+p)} + \sum_{h=1}^p \frac{1}{h^2}$$

g) pour $\forall x > 0$ $f(x) = \frac{1}{x^{p+2}}$

f est de classe C^1 sur \mathbb{N}_+^*

$$\text{d'où } \forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{-(p+2)}{x^{p+3}} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur \mathbb{N}_+^*

Numéro d'inscription



Né(e) le

Nom

CHALANCON

Prénom(s)

ARTHUR

20 / 20



Épreuve: Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 66 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...
ainsi: $\forall h \in [n-1, n]$

$$\frac{1}{n^{p+2}} \leq \frac{1}{h^{p+2}}$$

$$\int_{n-1}^n \frac{1}{n^{p+2}} dh \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{h^{p+2}} dh$$

par croissance de l'intégrale comme $n > n-1$

$$\frac{1}{n^{p+2}} \leq$$

10)

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \\ |U_n - S| = \left| \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^n \frac{1}{n^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right|$$

11)

On peut voir que $|U_n - S|$ tend "plus vite" vers 0 que $|T_n - S|$ et $|S_n - S|$ et $|S_n - S|$ tend "moins vite" vers 0 que $|T_n - S|$ et $|U_n - S|$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Ex 2:

① $\forall (P, Q) \in \mathbb{N}_m[x]$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\phi(\alpha P + Q) &= (\alpha P(x_0) + Q(x_0), \dots, \alpha P(x_{m-1}) + Q(x_{m-1})) \\ &= \alpha \phi(P) + \phi(Q)\end{aligned}$$

donc ϕ est linéaire

Soit $P \in \mathbb{N}_m[x]$

$$P \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow \phi(P) = \mathbf{0}_{\mathbb{N}^{m+1}}$$

$$\Leftrightarrow (P(x_0), \dots, P(x_{m-1})) = \mathbf{0}_{\mathbb{N}^{m+1}}$$

$$\text{donc } \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \quad P(x_i) = 0$$

ce qui veut dire que P admet $m+1$ racines

et P est de degré inférieur ou égal à m

$$\text{donc } P = 0$$

$$\text{donc } \text{Ker}(\phi) = \{0\}$$

Ainsi ϕ est injective

$$\begin{aligned}\text{v) } \dim \text{Im } \phi &= \dim \mathbb{N}_m[x] - \dim \text{Ker}(\phi) \\ &= m+1\end{aligned}$$

$$\text{donc } \dim \text{Im } \phi = m+1 = \dim \mathbb{N}^{m+1}$$

donc ϕ est surjective

Ainsi ϕ est bijective

ce qui prouve $\exists! (y_0, \dots, y_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$ tq
 $P(x_0) = y_0 \quad \dots \quad P(x_m) = y_m$

$$2) \quad \forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket$$

$$\forall j \in \llbracket 0, m \rrbracket$$

$$\begin{aligned} \phi(L_i) &= (L_i(x_0) \quad \dots \quad L_i(x_m)) \\ &= e_i = (0 \quad \dots \quad \underset{i}{1} \quad \dots \quad 0) \end{aligned}$$

Ainsi d'après la bijectivité de ϕ ,

il existe un unique polynôme L_i tel que

$$\forall j \in \llbracket 0, m \rrbracket \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$3) \quad L_0(x) = Q \times (x-1)(x-2)(x-3)$$

or $\deg L_0 \leq 3$ donc $Q \in \mathbb{N}$.

$$L_0(-1) = Q \times (-2)(-3)(-4)$$

$$= -24Q = 1.$$

$$\text{d'où } Q = -\frac{1}{24}$$

$$\underline{L_0(x) = -\frac{1}{24} (x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\text{Soit } L_1(x) = \alpha (x+1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1(-1) = \alpha \times 2 \times (-1)(-2)$$

$$= 4\alpha = 1$$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\underline{L_1(x) = \frac{1}{4} (x+1)(x-2)(x-3)}$$

$$L_2(x) = \alpha (x+1)(x-1)(x-3)$$

$$L_2(2) = \alpha (3)(-1) \\ = -3\alpha = 1$$

$$\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{L_2(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$L_3(x) = \alpha (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$L_3(3) = \alpha \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\underline{L_3(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$h) \forall i \in \{0, n\}$$

$$\forall j \in \{0, m\} \text{ tq } i \neq j$$

$$L_i(x_j) = 0$$

$$\text{dac } L_i(x) = \alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$$

$$a \text{ deg } L_i \leq n$$

$$\text{et } \text{deg} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right) = n$$

$$\text{dac } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$L_i(x_i) = \alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) = 1$$

$$\text{dac } \alpha = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

Numéro d'inscription



Né(e) le

Nom

CHALANCON

Prénom(s)

ARTHUR

20 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 002

Comptence à démontrer la première page
donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{1}{x - x_j}$

Ainsi on a $\deg L_i = \deg \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m (x - x_j) = m$

donc $\deg L_i = m$
et son coefficient dominant sera $\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m (x_i - x_j)}$

5) $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$
 $\langle Q, P \rangle = \sum_{h=0}^n P(x_h) Q(x_h) = \langle P, Q \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique
 $\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[x])^3 \quad \forall \alpha > 0$
 $\langle \alpha P + Q, R \rangle = \sum_{h=0}^n (\alpha P(x_h) + Q(x_h)) R(x_h)$
 $= \alpha \sum_{h=0}^n P(x_h) R(x_h) + \sum_{h=0}^n Q(x_h) R(x_h)$
 $= \alpha \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

donc $\langle - \rangle$ est linéaire par rapport à la 1^{ère} variable
et donc pas symétrique $\langle - \rangle$ est bilinéaire

$\forall P \in \mathbb{R}_m[x]$

$$\langle P, P \rangle = \sum_{h=0}^m P^2(x_h) \geq 0 \quad (\text{somme de termes positifs})$$

$\forall P \in \mathbb{R}_m[x]$

$$\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{h=0}^m P^2(x_h) = 0$$

donc $P^2(x_h) = 0$ d'où $P(x_h) = 0$

$$\forall h \in \{0, \dots, m\} \quad P(x_h) = 0$$

donc P admet $m+1$ racines et P est
un polynôme de degré m donc $P = 0$
aussi $\langle - \rangle$ est un produit scalaire

2) pour $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_m)$

\mathcal{L} est composé de polynômes de degrés distincts
donc la famille est libre

$$\text{et } \text{card}(\mathcal{B}) = m+1 = \dim \mathbb{R}_m[x]$$

donc \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_m[x]$

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, m\} \text{ tq } i \neq j$$

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{h=0}^m L_i(x_h) L_j(x_h)$$

donc \mathcal{L} est une base \perp orthogonale

$$\text{et } \langle L_i, L_i \rangle = \sum_{h=0}^n L_i^2(x_h) = L_i^2(x_i) = 1.$$

à ceci est vraie $\forall i \in \{0, n\}$
 car \mathcal{L} est une base orthogonale

7)

Partie II :

$$8) a) \quad N_0 = 1$$

$$N_1(x) = \prod_{j=0}^1 (x - x_j) = x - x_0 = (x + 1)$$

$$N_2(x) = \prod_{j=0}^2 (x - x_j) = (x + 1)(x - 1)$$

$$N_3(x) = \prod_{j=0}^3 (x - x_j) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

$$b) \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (N_0(x_0) - N_0(x_3)) = (1, 1, 1, 1) \\ (N_1(x_0), N_1(x_1), N_1(x_2), N_1(x_3)) \\ = (0, 2, 3, 4) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (N_2(x_0), N_2(x_1), N_2(x_2), N_2(x_3)) \\ = (0, 0, 3, 8) \end{matrix}$$

$$(N_3(x_0) - N_3(x_3)) = (0, 0, 0, 8)$$

M est triangulaire inférieure donc elle est invertible.

13) a)

def prodX(x, i, h):

U = 0

for a in (0, h):

if a \neq i:

U = mp.log(x - a) + U

return mp.exp(U)

15) a) $\forall h \in]1, m-1]$

$\forall i \in \mathbb{N}$ $Q_h(x) = \sum_{j=0}^h a_j N_j(x)$

$\forall j \in]0, h]$

$N_j \in \mathbb{N}_n[x]$

donc $Q_h \in \mathbb{N}_n[x]$