ECRICOME PREPA 2024 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique

AMGHAR

MOHAMED

Note de délibération : 18.39 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom AMGHAR

Prénom (s) MOHAMED

18.39 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 06

Numéro de table 0 06

Commencez à composer dès la première page...

Ex1

$r_0 = 2 \qquad s_0 = 10 \qquad t_0 = 1$

$$\begin{cases} R_{n+1} = -\frac{1}{4} s_n + 2t_n \\ s_{n+1} = r_n + s_n - T_n \\ t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n + 1 \end{cases}$$

1_ On pose $M = A - I$

a_

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b_ $(2M + I)^3 = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.39 / 20

Calculons d'abord $2M + I$

- $2M + I = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculons $(2M+I)^2$

$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 1 \\ -2+2 & -1+1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(2M+I)^3 = (2M+I)^2 (2M+I)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c- On a $(2M+I)^3 = 0$

$(2M+I)^3 = (2M+I)^2(2M+I)$

$= (4M^2 + 4MI + I^2)(2M+I)$

$= \{ 8M^3 + 4M^2 + 8M^2 + 4MI^2 + 2MI^2 + I^3$

$= 8M^3 + 12M^2 + 6M + I^3 = 0$

$= \boxed{M(8M^2 + 12M + 6I) = -I.}$

d) On a $M(8M^2 + 12M + 6) = -I$

$$M(\overbrace{-8M^2 - 12M - 6I}^{M^{-1}}) = I$$

On conclut donc que M est inversible et son inverse

$\boxed{M^{-1} = -8M^2 - 12M - 6I.}$

e-

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0r_n & -\frac{1}{4}s_n & +2t_n \\ r_n & s_n & -t_n \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= A X_n + B.$$

3) a-

$$AC + B = C$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0-8+16 \\ 8+32-8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ 32 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = C.$$

b- $I - A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -M$$

$I - A = -M \Rightarrow I = A - M$

Donc $I - A$ est inversible

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom AMCHAR

Prénom (s) MOHAMED

18.39 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 06

Numéro de table 006

c) D'après la question 3)a- On a $AC+B=C$

On remplace C par X $\Rightarrow AX+B=X$, donc C est l'unique matrice colonne telle que $X=AX+B$.

4) Initialisation

Pour $n=0$ on a $X_0-C=A^0(X_0-C)$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}} \Leftrightarrow X_0-C=I(X_0-C)$$

$$\underbrace{X_0-C=X_0-C}_{\text{Vrai}}$$

Heredité

On suppose que $X_n-C=A^n(X_0-C)$, Mq $X_{n+1}-C=A^{n+1}(X_0-C)$

$$X_{n+1}-C=A^{n+1}(X_0-C)$$

$$\begin{aligned} X_{n+1}-C &= AX_n+B-AC-B \\ &= AX_n-AC \\ &= A(X_n-C) \\ &= AA^n(X_0-C) \\ &= A^{n+1}(X_0-C) \end{aligned}$$

On deduit par recurrence que $X_n-C=A^n(X_0-C)$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.39 / 20

5) a - Calculons $(2A - I)^3$

- Calculons $(2A - I)^2$

- Calculons $2A - I$

$$2A - I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -4 + 1 \\ -2 + 2 & -1 + 1 & 8 - 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2A - I)^3 = 0$ $\Rightarrow$ un polynome annulateur de A

$$(2X - 1)^3 = 0 \Rightarrow 2X - 1 = 0$$
$$X = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ est la seule valeur propre possible de A

b)

6) $P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\varphi P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

b) On a $\varphi P = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}\varphi P = \cancel{2}I$
donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\varphi$.

c) Calculons $A = \frac{1}{4} P T \varphi$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\cancel{= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}} \quad \cancel{= \frac{1}{4} \times \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}}$

$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \cancel{= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom AMGHAR

Prénom (s) MOHAMED

18.39 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 06

Numéro de table 006

d) Initialisation

Pour $n = 0$ on a $A^0 = \frac{1}{2^{0+1}} PT^0 \varphi$

$$I = \frac{1}{2} P\varphi$$

$$\underbrace{I = I}_{\text{Vrai}}$$

Heredité

On suppose que $A^n = \frac{1}{2^{n+1}} PT^n\varphi$, Mq $A^{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} PT^{n+1}\varphi$

$$A^{n+1} = A^n A$$

$$= \frac{1}{\cancel{2^{n+1}}} PT^n\varphi \; \frac{1}{\cancel{4}} PT\varphi$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} PT^n\varphi \frac{1}{2^2} \times \cancel{4} PT\varphi$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} PT^n T\varphi \; \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} PT^{n+1}\varphi$$

Conclusion

On deduit par recurrence que $A^n = \frac{1}{2^{n+1}} PT^n\varphi$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.39 / 20

2-

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $n = 1 \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'affirmation est Juste.

$$. A^n = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & -6n+6 & -6n(n-1)+16n+4 \\ 6 & 12n & 12n(n-1) \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12n+12 & -6-6n+6 & +12n-\cancel{12} -18n(n-1)+48n\cancel{+12} \\ 24n & 12+12n & -12n+36n(n-1) \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+22n \\ 4n & 2n+2 & 36n^2-20n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7-

8) a-

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \ln(n^2) - \ln(2^n)$$

$$= 2\ln(n) - n(\ln(2))$$

$$= n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

$$\lim_{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \cancel{\lim_{+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \cancel{+\infty}.$$

7) -

On a $X_n - C = A^n(X_0 - C)$

$$X_n = A^n X_0 - A^n C + C$$

Calculons

$$A^n X_0 = \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+22n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-20n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} -4n+4-20n-3n^2+22n \\ 8n+20n+20+6n^2-20n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} -3n^2-4n+4 \\ 6n^2-28n+20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n C = \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+22n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-20n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \begin{pmatrix} -4n+4-8n-6n^2+22n \\ 8n+16n+16+12n^2-20n \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6n^2-10n+4 \\ 12n^2+4n+16 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$A^n X_0 - A^n C + C$$

$$\frac{1}{2^{n+2}}\begin{pmatrix}-3n^2-4n+4\\ 6n^2-28n+20\\ 2\end{pmatrix} - \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix}-6n^2-20n+4\\ 12n^2+4n+26\\ 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2^{n+2}}\left(\begin{pmatrix}-3n^2-4n+4\\ 6n^2-28n+20\\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6n^2-20n+4\\ 12n^2+4n+26\\ 4\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2^{n+2}}\begin{pmatrix}-9n^2+6n\\ -18n^2-24n+4\\ -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix}$$

$$X_n = A^n\left(X_0 - C\right) + C$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix}-2n+2 & -n & -3n^2+11n\\ 4n & 2n+2 & 6n^2-20n\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2\\ 20\\ 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}}\begin{pmatrix}-2n+2 & -n & -3n^2+11n\\ 4n & 2n+2 & 6n^2-20n\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}}\begin{pmatrix}-2n+3n^2-11n\\ 4n+4-6n^2+20n\\ -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ 8\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_n\\ s_n\\ t_n\end{pmatrix}$$

$$r_n = \frac{1}{2^{n+2}}\left(\cancel{-2n+} -13n+3n^2\right) + 2$$

$$s_n = \frac{1}{2^{n+2}}\left(-6n^2+24n+4\right) + 8 = \frac{1}{2^n}\left(-3n^2+7n+2\right) + 8$$

$$T_n = \frac{1}{2^{n+2}}\left(-2\right) + 2 = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom AMGHAR

Prénom (s) MOHAMED

18.39 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 006

Commencez à composer dès la première page...

Ex2

$$f(x) = \frac{4}{1+e^x}$$

1) a -

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x)$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{4}{1+e^x}$$

$$= 4$$

car $\lim_{-\infty} e^x = 0$. Cf admet une asymptote horizentale d'equation $y=4$.

b) $\lim_{+\infty} f(x) = \cancel{\frac{4}{1+}} \lim_{+\infty} \frac{4}{1+e^x}$

$$= 0$$

car $\lim_{+\infty} e^x = 0$. Cf admet une asymptote horizentale d'equation $y=0$.

2) a - f est derivable sur IR

$$f'(x) = \left(\frac{4}{1+e^x}\right)'$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.39 / 20

$$= \frac{(4)'(1+e^x) - (1+e^x)' \, 4}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

Etude de signe

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) < 0$. car $-4e^x < 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$.

b-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	
f	4	2	0

$f(0) = 2$

c)

$$f(x) - y = \frac{4}{1+e^x} - 4 = \frac{4-4-4e^x}{1+e^x} = \frac{-4e^x}{1+e^x}$$

$$= -\frac{4e^x}{1+e^x} < 0$$

(C_f) est au dessous de la droite (D).

d) $y: f'(x_0)(x-0) + f(0)$

$y: -x + 2.$

3) a- f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \left(\frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}\right)'$$

$$= \frac{(-4e^x)'(1+e^x)^2 + ((1+e^x)^2)' \cancel{+} 4e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{-4e^x(1+e^x)^2 + 2e^x(1+e^x) \cancel{+} 4e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \cancel{\frac{(1+e^x)(-4e^x(1+e^x) - 2e^x) \cancel{+} 4e^x}{(1+e^x)^4}}$$

$$= \cancel{\frac{-4e^x(1+e^x) - 2e^x + 4e^x}{(1+e^x)^3}}$$

$$= \cancel{\frac{-4e^x(1+e^x) - \cancel{6e^x}\ 2e^x}{(e^x+1)^3}}$$

$$= \cancel{\frac{e^x(-4(1+e^x) - 6)}{(e^x+1)^3}} = \cancel{\frac{e^x(-4 - 4e^x - 6)}{(e^x+1)^3}}$$

$$= \frac{-4e^x(1+e^x)^2 + 2e^x(1+e^x)\ 4e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{4e^x(1+e^x)(-1-e^x+2e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

b- Etude de signe

~~On a~~ $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geq 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$

On resoud l'equation $e^x - 1$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
La concavité	$\cap$	f possède un pt d'inflexion $A(0; f(0))$ $A(0;2)$	$\cup$

$\forall x \in]-\infty; 0]$ $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ est concave

$\forall x \in [0; +\infty[$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ est convexe.

c) f est concave donc f est au dessous de la droite(D)

f est convexe donc f est au dessus de la droite(D).

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom AMGHAR

Prénom (s) MOHAMED

18.39 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

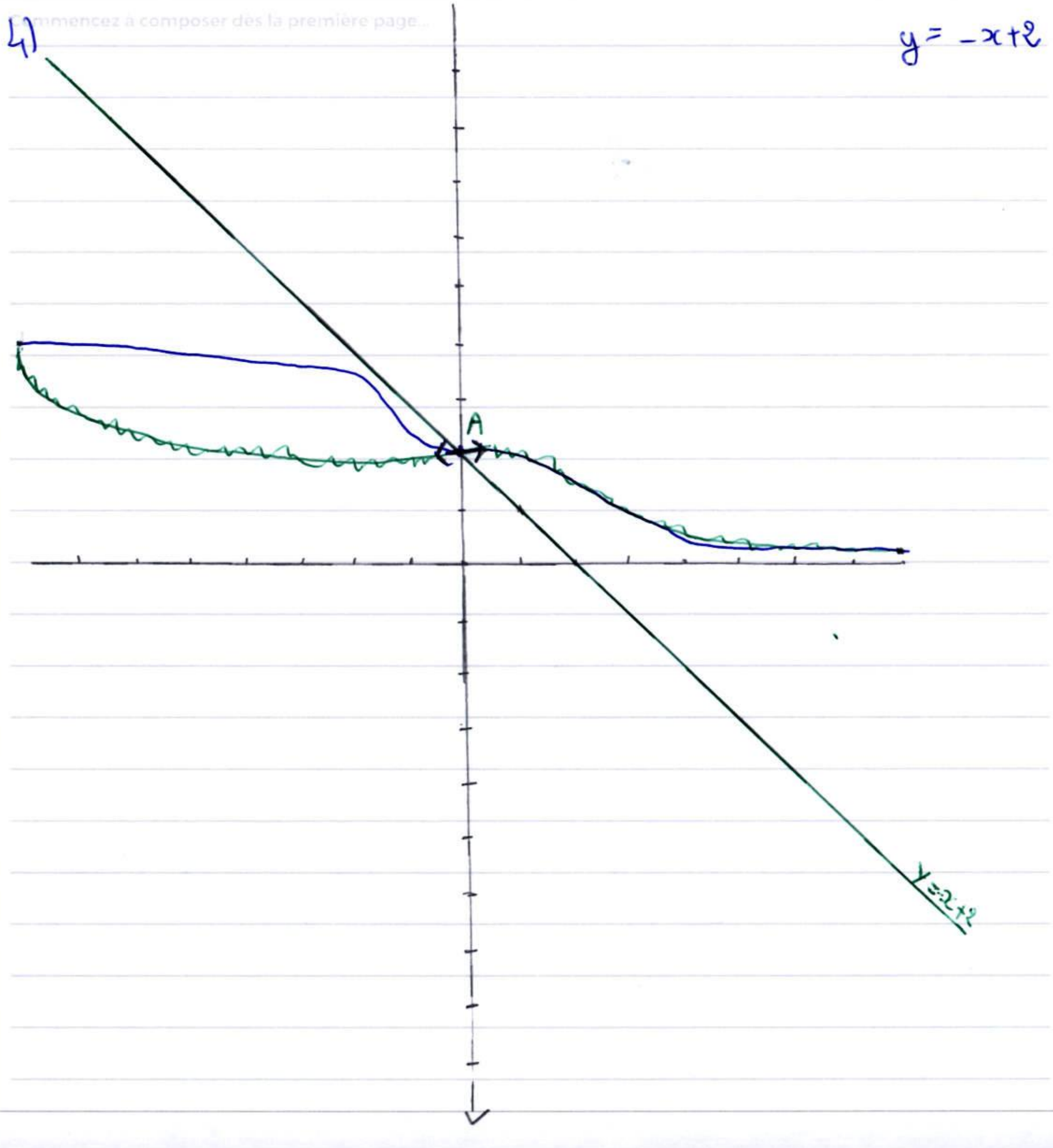
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Numéro de table 006

4)



NE RIEN ÉCRIRE

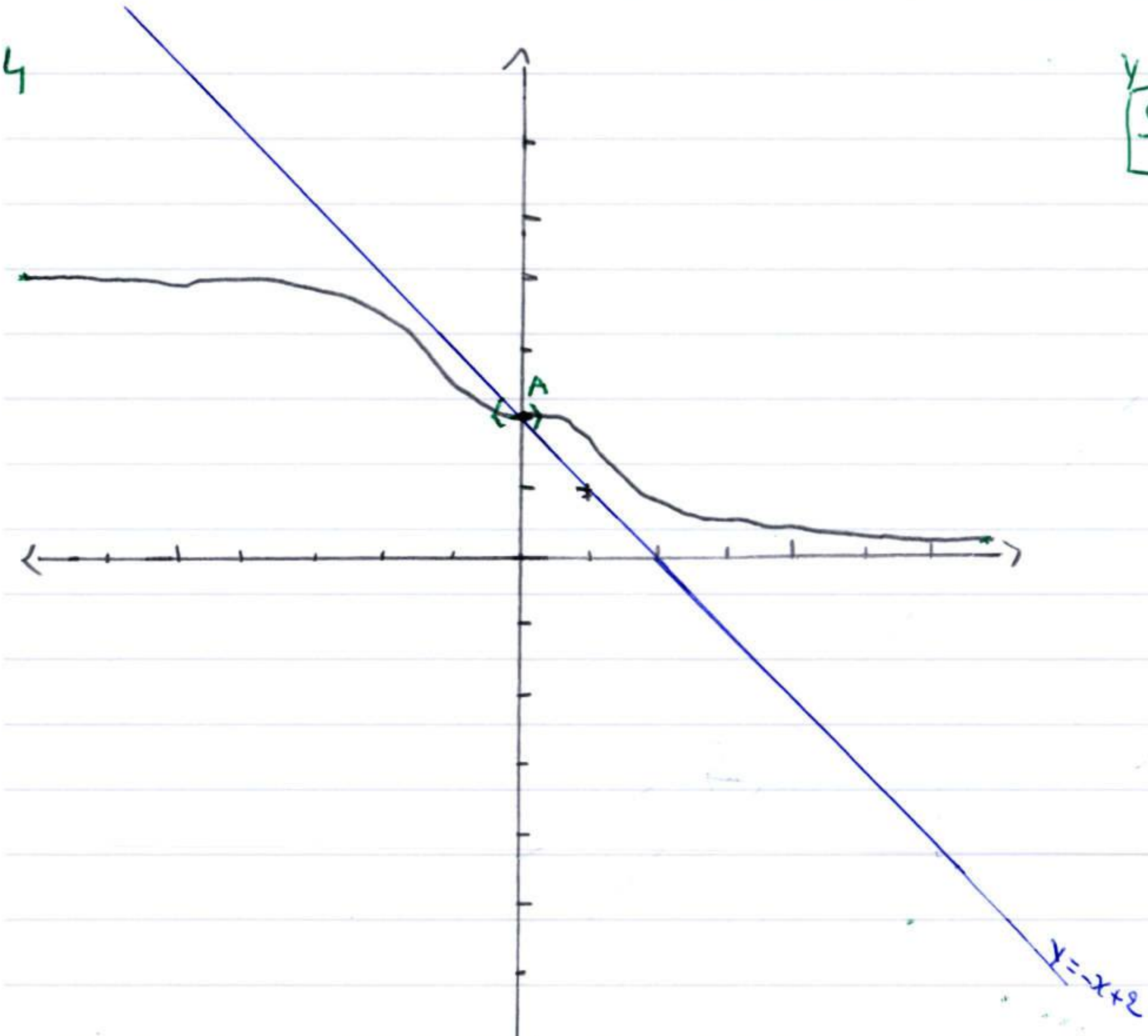
DANS CE CADRE

18.39 / 20

4

$y = -x + 2$

0	1	2
2	1	0



5) $f(x) = 4\,\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$= 4\,\dfrac{e^{-x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 4\,\dfrac{e^{-x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = 4 \times \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$

$= \dfrac{4}{e^x+1}$

b- $f(x) = 4\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$F(x) = 4\ln\left(1+e^{-x}\right)+k$

La primitive de f qui s'annule en 0

$\cancel{F(x) = 0 \Rightarrow 4\ln(1+e^{-x}) = 0}$

$\cancel{\ln(1+e^{-x}) = 0}$

$\cancel{e^{-x}+1 = 1}$

$\cancel{e^{-x} = 0}$

Partie 2.

$$g(y) = \ln\left(\frac{4}{y}-1\right) \quad y \in \left]0,4\right[$$

a)

- La continuité

On a f est ~~continue~~ une fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}$

- La monotonie

f est strictement decroissante

f realise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;4[= f(]f(4);f(0)[)$

$= f\left(\frac{4}{1+e^{4}};2\right)$.

b- Pour tout $y \in]0;4[$

$$f(g(y)) = \cancel{f}\,\frac{4}{1+e^{\ln\left(\frac{4}{y}-1\right)}}$$

$$= \frac{4}{1+\frac{4}{y}-1} = \frac{4}{\frac{4}{y}} = 4\times\frac{y}{4} = y.$$

c) g ~~represen~~ represente la fonction reciproque de f.

Partie 3

$$x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a- $$\int_0^{+\infty} f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{4}{1+e^t}\, dt$$

$$= \int_0^x \frac{4}{e^t+1}\, dt = \int_0^x 4\, \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dt$$

$$= 4 \ln \left[e^{-t}+1 \right]_0^x$$

$= 4\ln(e^{-x}+1) - 4\ln(e^0+1)$

$= \cancel{0 \Rightarrow}\ 0 + 4\ln(2) \Rightarrow$ converge.

b- On a $$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 4\ln(2)$$

Pour que h admet une densité de probabilité elle faut qu'elle soit positive, continue, convergence

convergence faut que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 4\ln(2)$

normalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

$4\ln(2) + \cancel{x} = \cancel{1} \Rightarrow \ln(16) + x = 1$

$x = 1 - \ln(16)$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom AMGHAR

Prénom (s) MOHAMED

18.39 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Numéro de table 006

Commencez à composer dès la première page

$x = \ln(e) - \ln(16)$

$x = \ln\left(\frac{e}{16}\right).$

c) U une variable aleatoire de loi uniforme sur $]0;1[$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

d)

On a $0 \leq x \leq 1$

$-1 \leq -x \leq 0$

$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$

$1+e^{-1} \leq 1+e^{-x} \leq 2$

$\ln(1+e^{-1}) \leq \ln(1+e^{-x}) \leq \ln(2)$

$\frac{\ln(1+e^{-1})}{\ln(2)} \leq \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} \leq 1$

$-1 \leq -\frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} \leq -\frac{\ln(1+e^{-1})}{\ln(2)}$

$0 \leq 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} \leq 1 - \frac{\ln(1+e^{-1})}{\ln(2)}.$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.39 / 20

e) $\forall x \in [0;+\infty[$, $P([X \leqslant x])$

$= P\left(\left[-\ln\left(e^{(1-U)\ln(2)}-1\right) \leqslant x\right]\right)$.

$= P\left(\left[-x \leqslant \ln\left(e^{(1-U)\ln(2)}-1\right)\right]\right)$

$= P\left(\left[e^{-x} \leqslant e^{(1-U)\ln(2)}-1\right]\right)$

$= P\left(\left[1+e^{-x} \leqslant e^{(1-U)\ln(2)}\right]\right)$

$= P\left(\left[\ln(1+e^{-x}) \leqslant (1-U)\ln(2)\right]\right)$

$= P\left(\left[\frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} \leqslant 1-U\right]\right)$

$= P\left(\left[U-1 \leqslant -\frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right]\right)$

$= P\left(U \leqslant 1-\frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right)$.

Ex3

1- Initialisation

Pour $n=1$ on a $a_1+b_1+c_1 = \frac{3}{8}+\frac{5}{8} = 1$.

Heredité

On suppose que $a_n+b_n+c_n = 1$, Mq $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} = 1$

$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{11} a_n + \frac{4}{11} a_n + \frac{5}{11} a_n + \frac{3}{11} b_n + \frac{3}{11} b_n + \frac{5}{11} b_n + \frac{3}{11} c_n + \frac{4}{11} c_n + \frac{4}{11} c_n = a_n + b_n + c_n = 1$

Conclusion

On deduit par recurrence que $a_n + b_n + c_n = 1$.

2) D'après la question 1, $a_n + b_n + c_n = 1$

et on sait que $x_n = a_n + b_n + c_n = 1$

donc (X_n) est constante.

3)a. Mq ~~la suit~~ (y_n) est une suite geometrique de raison $-\frac{1}{11}$.

$$y_{n+1} = -a_{n+1} + 2b_{n+1} - c_{n+1}$$
$$= -\frac{2}{11} a_n - \cancel{\frac{3}{11} b_n} - \frac{3}{11} c_n + \frac{8}{11} a_n + \frac{6}{11} b_n + \cancel{\frac{8}{11} b_n}$$
$$- \frac{5}{11} a_n - \cancel{\frac{5}{11} b_n} - \frac{4}{11} c_n$$
$$= \frac{1}{11} a_n - \frac{2}{11} b_n + \frac{1}{11} c_n$$
$$= \frac{1}{11} a_n - 2 \frac{1}{11} b_n + \frac{2}{11} c_n$$
$$= -\frac{1}{11} (-a_n + 2b_n - c_n)$$
$$= -\frac{1}{11} y_n.$$

y_n est une suite geometrique de raison $q = -\frac{1}{11}$.

b) y_n est une suite geometrique ~~d~~ de raison $q = -\frac{1}{11}$

$$Y_n = Y_1 (q)^{n-1} = -\frac{13}{3} \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

$Y_1 = -a_1 + 2b_1 - c_1$

$= -\frac{8}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{13}{3}$

4) a-

$$Z_{n+1} = -5a_{n+1} - 5b_{n+1} + 7c_{n+1}$$

$$= -\frac{10}{11}a_n - \frac{15}{11}b_n - \frac{15}{11}c_n - \frac{20}{11}a_n + \frac{15}{11}b_n + \frac{20}{11}c_n$$

$$+ \frac{35}{11}a_n + \frac{35}{11}b_n + \frac{28}{11}c_n$$

$$= \frac{5}{11}a_n + \frac{35}{11}b_n - \frac{7}{11}c_n$$

$$= -\frac{1}{11}(-5a_n - 5b_n + 7c_n)$$

$$= -\frac{1}{11}Z_n.$$

b) Z_n est une suite geometrique de raison $q = -\frac{1}{11}$

$$Z_n = Z_1 (q)^{n-1} = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$$

$$Z_1 = -5a_1 - 5b_1 + 7c_1$$

$$= -\frac{25}{8} + \frac{35}{8} = \frac{20}{8} = \frac{20}{4} = \frac{5}{2}$$

~~5) a-~~

6) $\lim\limits_{+\infty} b_n = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{13}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{3}$$

car $-1 < -\frac{1}{11} < 1 = \lim\limits_{+\infty}\left(-\frac{1}{11}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{+\infty}$

$$\lim_{+\infty} c_n = \lim_{+\infty} \frac{1}{12}(5x_n + Z_n)$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{1}{12}\left(5 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) = \frac{5}{12}$$