EXTRAIT CONCOURS BLANC 2 - MATHEMATIQUES

Correction exercice 4 :

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On considère les matrices M et N définies par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

1. a. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \end{pmatrix}$$

D'où : $N^2 = 4bN$.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k \times N$.

Initialisation : Au rang $k = 1$, en posant $u_1 = 1$, on a : $N^k = N$ et $u_1 \times N = N$.

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit k un entier naturel non nul fixé. Supposons qu'il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k \times N$.

On a alors $N^{k+1} = u_k \times N^2 = u_k \times 4bN = (4bu_k)N$.

Ainsi il existe bien $u_{k+1} = 4bu_k$, tel que $N^{k+1} = u_{k+1} \times N$.

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : Pour tout entier $k \geq 1$, il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k \times N$.

c. On a, pour tout entier k non nul :

$u_{k+1} = 4bu_k$ et $u_1 = 1$.

La suite (u_k) est une suite géométrique de raison $4b$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ u_k = (4b)^{k-1}$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ N^k = (4b)^{k-1}N$

Pour $k = 0$, on a $N^k = Id$ et $(4b)^{k-1}N = \frac{1}{4b}N \neq Id$

Donc la formule n'est pas valable pour $k = 0$.

2. On a :

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

D'où : $M = N + (a-b)I$

3. Comme les matrices N et I commutent, on peut utiliser le binôme de Newton.

On a, pour tout entier n, $n \geq 1$:

$$M^n = (N + (a-b)I)^n$$

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (a-b)^{n-k} I^{n-k}$$

$$M^n = \binom{n}{0} N^0 (a-b)^{n-0} I^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (4b)^{k-1} N (a-b)^{n-k}$$

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{1}{4b} N \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (4b)^k (a-b)^{n-k}$$

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{1}{4b} N \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4b)^k (a-b)^{n-k} - (a-b)^n \right)$$

On peut ainsi utiliser le binôme de Newton et on obtient :

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{1}{4b} N((4b + a - b)^n - (a-b)^n)$$

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N$$