Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1)a) $Rg(J_n) = \text{Dim}\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)\right)$

$= \text{Dim}\left(\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$

$= 1$

Donc d'après le théorème du rang,

$\text{Dim Ker}(J_n) = n - \text{Dim Im } J_n$

$= n-1$

Donc $0 \in Sp(J_n)$

1)b) Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Notons L_i la ième ligne du système $J_n V_n = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $((x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n)$

On a donc la ligne L_i qui donne

$\sum_{k=1}^{n} 1 = x_i$ Donc $n = x_i$

Donc comme les autres lignes sont identiques on a

$J_n V_n = n V_n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc V_n est vecteur propre de J_n associée à la valeur propre n

1)c) Ainsi, comme $n \in Sp(J_n)$ on a

$$\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n - nI_n) \geq 1$$

Mais $\dim \operatorname{Ker}(J_n) = n-1$

Donc $\dim \operatorname{Ker}(J_n) + \operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n - nI_n) \geq n$

Mais d'après le cours, $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n) + \operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n - nI_n) \leq n$

Donc $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n) + \operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n - nI_n) = n$

Donc $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(J_n - nI_n) = 1$ et J_n est diagonalisable, avec $Sp(J_n) = \{1, n\}$

2) f_n est polynômiale donc f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$

3)a) Soit $i \in [\![1;n]\!]$, $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial_i f_n(x) = \frac{1}{n} 2x_i - \frac{1}{n^2} \times 2 \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \frac{2}{n}\left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

3)b) Soit $A = (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$,

A est un point critique de f_n si et seulement si (ssi)

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \frac{2}{n}\left(a_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = 0$$

ssi : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $a_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$

ssi : $\begin{cases} a_1 = a_2 = \cdots = a_n \\ a_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_1 \end{cases}$

ssi $\{ a_1 = a_2 \cdots = a_n$

Ainsi : les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a \dots a) \in \mathbb{R}^n$

4)a) Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

~~$\partial_{i,j} f_n(x) =$~~

1er cas : $i = j$ alors :

$\partial_{i,j} f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n^2}(n-1)$

2nd cas : $i \neq j$ alors :

$\partial_{i,j} f_n(x) = -\frac{2}{n^2}$

4)b) Ainsi comme la hessienne de f_n en $(a \dots a) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

~~$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$; $\nabla^2 f_n(a \dots a)$~~

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $(\nabla^2 f_n(a \dots a))_{i,j} = \begin{cases} \frac{2}{n^2}(n-1) \text{ si } i=j \\ -\frac{2}{n^2} \text{ sinon} \end{cases}$

désigne le terme général de la hessienne

On a donc :

$$\nabla^2 f_n(a \dots a) = \frac{2}{n^2}\left(n I_n - J_n \right)$$

4) c) I = np.eyes (n)
J = np.ones. (n)
Hessienne = (2/n**2) * (n*I - J)

4) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a, \dots a) \in \mathbb{R}^n$

$\lambda \in Sp\, \nabla^2 f_n(a \dots a) \iff \nabla^2 f_n(a \dots a) - \lambda I_n$ non inversible

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Rg(A) = Rg(-A)$

$\iff \frac{2}{n^2}(n I_n - J_n) - \lambda I_n$ non inversible

$\iff \frac{2}{n^2}(J_n - n I_n) + \lambda I_n$ non inversible

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Rg(A) = Rg(\lambda A)$

$\iff J_n - \frac{n^2}{2} n I_n + \frac{\lambda n^2}{2} I_n$ non inversible

$\iff J_n - \left(\frac{n^3}{2} - \frac{\lambda n^2}{2} \right) I_n$ non inversible

$\iff \frac{n^3}{2} - \frac{\lambda n^2}{2} = 0$ ou $\frac{n^3}{2} - \frac{\lambda n^2}{2} = n$

$(n > 0)$

$\iff \frac{n}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$ ou $\frac{n^2 - \lambda n}{2} = 1$

$\iff n = \lambda$ ou $n^2 - \lambda n = 2$

$n > 0$

$\iff \lambda = n$ ou $\lambda = n - \frac{2}{n}$

Bilan : $\forall (a \dots a) \in \mathbb{R}^n$, $Sp\, \nabla^2 f(a \dots a) = \left\{ n, n - \frac{2}{n} \right\}$

Je pense que je me suis trompé sur la valeur propre $n - \frac{2}{n}$ (normalement on devrait trouver une valeur propre négative et comme $n > 0$, on ne peut pas conclure

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5)a) Considérons $u = (1 \dots 1)$ et $v = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$(\langle u, v\rangle)^2 \leq \|u\|^2 \times \|v\|^2$$

i.e $\displaystyle \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

5)b) Ainsi :

$\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{n}$ $(n > 0)$

Donc : $\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_n(x) \geq 0$

~~Or, pour tout $(a \dots a) \in \mathbb{R}^n$, $f_n(a \dots a) = 0$~~

~~Donc : $\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_n(x) \geq f_n(a \dots a)$~~

~~Donc f_n~~

Or : $\forall (a \dots a) \in \mathbb{R}^n$, $f_n(a \dots a) = \frac{1}{n} n a^2 - \frac{1}{n^2}(na)^2$

$= a^2 - a^2 = 0$

Donc : $\forall (a \dots a) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$f_n(x) \geq f_n(a \dots a)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi : f_n admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ atteint en chaque point critique de f_n

6)a) z = 1/2 (x ** 2 + y ** 2) - (1/4)* (x + y) ** 2

6)b) • La surface 2 n'a qu'un seul minimum global donc ce n'est pas elle

• La surface 3 n'atteint pas de minimum global en tous les points $(a,a) \in \mathbb{R}^2$ d'après le tracé

Donc la surface 1 représente f_2

Exercice 2 :

1) a) D'après le cours Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1)b) Notons $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$

h est une somme de composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h l'est aussi

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(-\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \lambda$

$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ (car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$) donc

$\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = \lambda$

Donc $\frac{2\pi}{4} = \lambda$

Donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

1)c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0}$

$= \text{Arctan}'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$

Donc $\frac{\text{Arctan}(x)}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 1$

Donc : $\text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

2)a) • La fonction $f : x \mapsto \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$)

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est ~~im~~ impropre en $+\infty$ et en $-\infty$

• D'une part on remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

Donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ssi

$2\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ssi $I = \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

f est continue sur $[1;+\infty[$ donc I est impropre en $+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 2}{\pi(e^x+e^{-x})} = 0$ par croissances comparées

donc $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

- $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont positives sur $[1;+\infty[$

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2>1$ donc convergente)

Donc par critère d'équivalent pour les fonctions positives

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Comme $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge (intégrale de fonction continue sur un segment)

par la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Donc $2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge par parité de f

2) b) Soit $A \in \mathbb{R}$, $A<B$. f est continue et positive sur $\mathbb{R}$

- $\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^A \frac{2}{\pi} \times \frac{e^x}{e^x} \times \left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right) dx$

$$= \int_0^A \frac{2}{\pi} \times \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{Arctan}(e^x)\right]_0^A$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\mathrm{Arctan}(e^A) - \mathrm{Arctan}(1)\right)$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi f est une densité

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}([X \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Soit $B \in]-\infty, x[$,

$$\int_{B}^{x} f(t)\,dt = \left[\frac{2}{\pi}\text{Arctan}(e^t)\right]_B^x$$

$$= \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(e^x) - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(e^B)$$

$$\xrightarrow[B\to-\infty]{} \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(e^x)$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}([X \leq x]) = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(e^x)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4)a) • X est à densité et $X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}, \ F'(x) = f(x) > 0$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ (X est à densité)

F définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$

dans $\left]\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) \, ; \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)\right[=]0;1[$

4)b) • Soit $x \in \mathbb{R}$,

• Si $x \in]0;1[$:

$\mathbb{P}([U \leq x]) = \mathbb{P}([F(X) \leq x])$

$= \mathbb{P}([X \leq F^{-1}(x)])$ ↓ F définit une bijection strictement croissante

$= F(F^{-1}(x))$ ↓ $F^{-1}(x) \in \mathbb{R}$

$= x$

~~Donc $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$~~

• Si $x \leq 0$:

$\mathbb{P}([U \leq x]) = \mathbb{P}([F(X) \leq x]) = 0$

• Si $x \geq 1$: $\mathbb{P}([U \leq x]) = \mathbb{P}([F(X) \leq x]) = 1$

Donc $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$

4)c) Soit $y \in]0,1[$, $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = y \iff \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x) = y$$

$$\iff \operatorname{Arctan}(e^x) = \frac{\pi}{2} y$$

$$\iff e^x = \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

$$\iff x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right) > 0$$

Ainsi : $\forall x \in]0;1[$, $F^{-1}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)$

```
def simulX(x)
    U = rd.random()
    return(np.log(np.tan(np.pi/2 * x)))
```

5)a) $\mathbb{E}(X)$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge absolument

Or : $h : x \mapsto x f(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = -h(x)$)

Donc $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut 0.

5)b) $\mathbb{E}(X^2)$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge absolument

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} x^2 \times \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$ converge

(intégrande positive)

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{x^2 e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$ converge

ssi $I = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{x^2 e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$ converge

(intégrande paire). Or : $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ par produit donc I est impropre en $+\infty$

Or : • $\frac{x^4}{\pi} \times \frac{2}{e^x+e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

• $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto x^2 f(x)$ sont positives sur $[1;+\infty[$

~~Donc par comparaison~~

• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$)

Donc par comparaison de fonctions positives,

$\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge

Donc $2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge ($\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ est une intégrale de fonction continue sur ~~un~~ segment)

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge

Donc $\mathbb{E}(X^2)$ existe

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths EMHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3 :

Partie 1 :

1) Soit $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f(x+\lambda y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x+\lambda y \rangle u_i$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i + \lambda_i \lambda \langle y, u_i \rangle u_i$

par linéarité à droite du produit scalaire

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle + \lambda \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle y, u_i \rangle u_i$ par linéarité de la somme

$= f(x) + \lambda f(y)$

De plus E est un espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire donc : $\forall x \in E$, $f(x) \in E$

Donc $f \in \mathcal{L}(E)$

$\langle f(x), y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i , y \rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle ; x \rangle$

$= \langle f(y), x \rangle$

Donc f est symétrique

Bilan : f est un endomorphisme symétrique de E

2) Si : $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i = 1$,

$\forall x \in E$,

$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, x \rangle u_i$

Ainsi f est le projeté orthogonal de x sur $U = \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_p)$

3)a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0_E$

Or $(u_1 \dots u_p)$ est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul donc $(u_1 \dots u_p)$ est libre.

Donc si : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0_E$, on a :

$\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i \langle u_i, x \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $\quad (\lambda_1 \dots \lambda_p) \in (\mathbb{R}^*)^n$

Donc : $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\langle u_i, x \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

Donc $x \in U^{\perp}$

Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset U^{\perp}$

- Soit $x \in U^\perp$

Donc : $\forall i \in [\![1;p]\!], \langle x, u_i \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

Donc : $f(x) = 0_{\mathbb{E}}$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$

Donc $U^\perp \subset \mathrm{Ker}(f)$

Bilan : $\mathrm{Ker}(f) = U^\perp$

et $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Dim}\ E - \mathrm{Dim}\ U = \dim E - p$

3) b) • $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Dim}\ \mathrm{Im}(f)$

théorème du rang

$= \mathrm{Dim}\ E - \mathrm{Dim}\ \mathrm{Ker}(f)$

$= p$ (1)

- Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$

Donc : $\exists y \in E, f(y) = x$

Donc $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i$

Donc $x \in \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_p) = U$

Donc $\mathrm{Im}(f) \subset U$ (2)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$\mathrm{Im}(f) = U$

4) ~~$\cdot f(u_1) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle u_i$~~

~~$= \lambda_1 u_1$ car $(u_1 \dots u_p)$ est orthonormale~~

~~Donc u_1 est v~~

4). Soit $k \in [\![1;p]\!]$,

$$f(u_k) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_k \rangle}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}} u_i$$

$$= \lambda_k u_k$$

Donc $\lambda_k \in Sp(f)$ et u_k est un vecteur propre associé

Bilan : $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i \in Sp(f)$ et u_i est un vecteur propre associé.

Partie 2 :

5) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E qui converge vers $y \in E$. Supposons qu'il existe $y' \in E$ tel que $\|y_n - y'\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(y' \neq y)$

Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y'\|$

Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n - y, y_n - y \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n - y', y_n - y' \rangle$

Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|^2 - 2\langle y_n, y \rangle + \|y\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|^2 - 2\langle y_n, y' \rangle + \|y'\|^2$

Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, y \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, y' \rangle$

Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, y - y' \rangle = 0$

~~Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \perp y - y'$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

6) Soit $x \in E$;

$$\|f(x)\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \,;\, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle u_j, x \rangle u_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ sinon}}} \lambda_j \langle u_j, x \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2$$

Donc : $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \langle u_i, x\rangle^2}$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz appliquée à $u = (\lambda_1^2 \ldots \lambda_n^2)$ et $v = (\langle u_1, x\rangle^2 \ldots \langle u_p, x\rangle^2)$ avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^p$ on a :

$$\|f(x)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \times \sum_{j=1}^{p} \langle u_j, x\rangle^2$$

$$= K^2 \times \|x\|^2$$ car $(u_1 \dots u_p)$ est orthonormée

D'où : $\forall x \in E, \ \|f(x)\| \leq K \times \|x\|$

7)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$P(n)$ " $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$ "

Initialisation : $\|x_0\| \leq K^0 \|x_0\|$ d'où $P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$

$\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\| \leq K \|x_n\|$ d'après 6)

$\leq K^{n+1} \|x_0\|$ par hypothèse de récurrence

d'où $P(n+1)$ vraie

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

7)b) On a : $0 \leq \|x_n - 0_E\| \leq K^n \|x_0\|$ d'où, par théorème d'encadrement,

$\|x_n - 0_E\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0_{\mathbb{R}}$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul par unicité de la limite (5)

7)c) On sait que $\alpha K < 1$.

- D'après 7)a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

- $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ et $\sum_{n \geq 0} \|x_0\| K^n$ sont à termes positifs

- $\sum_{n \geq 0} \|x_0\| K^n$ converge (séries géométrique convergente car $|K| < 1$)

Donc par comparaison de séries à termes positifs convergentes, $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ converge

Problème :

- Partie I :

1)a) - Soit $n \in \mathbb{N}, t \in [0;1]$,

On a donc : $(1+t^2)^n \leq (1+t^2)^{n+1}$ $(1+t^2 \geq 1)$

Donc : $\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$ (par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

~~Donc~~ $\cancel{\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}}$

Donc comme $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sont continues sur $[0;1]$ ($(1+t^2)^n \neq 0$ et $(1+t^2)^{n+1} \neq 0$)

par croissance de l'intégrale sur $[0;1]$ on a :

$u_{n+1} \leq u_n$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

· De plus, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est positive sur $[0;1]$

Donc : $\forall t \in [0;1]$, $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$

Donc par croissance de l'intégrale sur $[0;1]$ (fonctions continues sur $[0;1]$), $u_n \geq 0$

Bilan : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive

~~1)b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,~~

$\cancel{0 \leq u_n}$

~~De plus~~

1)c) Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 :

donc par théorème de limite monotone $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

2)a) Soit $x \in [0;1]$,

$f : x \mapsto e^x$ est convexe donc sous ses tangentes. En particulier sa tangente en 0 est donnée par celle d'équation : $T : y = f(0) + xf'(0) = 1 + x$

Donc : $e^x \leq 1 + x$

Or, $x \geq 0$ donc $\frac{x}{2} \leq x$

Donc par croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ on a
$e^{x/2} \leq e^x \leq 1 + x$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Bilan : $\forall x \in [0;1],\ e^{x/2} \leq 1+x$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

2)b) Donc : $\forall x \in [0;1],\ e^{x^2/2} \leq 1+x^2$ $(x^2 \in [0;1])$

Donc : $\forall x \in [0;1],\ \dfrac{1}{(1+x^2)} \leq e^{-x^2/2}$ (par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $(1+x^2)>0$ et $e^{x^2/2}>0$)

Donc : $\forall x \in [0;1],\ \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \leq e^{-nx^2/2}$ par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc comme $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ et $t \mapsto e^{-nt^2/2}$ sont continues sur $[0;1]$ et $0 \leq 1$, par croissance de l'intégrale on a :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2}\,dt$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2/2}\,dt$

2)c) : Posons $x = \sqrt{n}\,t$ (légitime car affine) dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2}\,dt$

Donc : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Une densité de X f est donnée par

$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

Donc: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

2)d) Ainsi, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto e^{-nx^2/2}$ est positive sur $\mathbb{R}$ par la relation de Chasles (intégrales convergentes), on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt \geqslant \int_{0}^{1} e^{-nt^2/2} dt$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

Donc par théorème d'encadrement comme $\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

on a : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Partie 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$

3) • La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$

$(\forall t \in \mathbb{R}^+, (1+t^2)^n > 0)$ donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est

impropre en $+\infty$

Or on a :

* $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{t^{2n}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{2(1-n)}$

$\underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2(n-1)}}$

* $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2(n-1)}}$ et $t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^n}$ sont positives sur $\mathbb{R}^+$

* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2(n-1)}}\,dt$ converge ~~(car $n>1$ donc $2n-1>1$)~~

(intégrale de Riemann convergente avec $2(n-1)>1$ car on suppose $n>1$)

Donc par comparaison (fonctions positives),

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$ converge

. Si $n=1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\mathrm{Arctan}(t)\right]_0^A$$

$= \dfrac{\pi}{2}$ donc l'intégrale converge

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$ converge

1)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

. D'une part, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est positive sur $[1;+\infty[$

donc par croissance de l'intégrale sur $[1;+\infty[$ on a

$I_n \geqslant 0$

~~. D'autre part,~~ $\cancel{(1+t^2)^n \geqslant t^{2n}}$

~~donc~~ $\cancel{\frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant}$

- D'autre part pour tout $t \in [1;+\infty[$,

$(1+t^2)^n \geqslant t^{2n}$

par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc : $\forall t \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{t^{2n}}$

Donc par croissance de l'intégrale sur $[1;+\infty[$, (intégrales convergentes d'après 3) et car $n>0$)

$I_n \leqslant \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right)^n dt$.

~~Posons~~ $\cancel{u = \frac{1}{t}}$ ~~dans l'intégrale~~ $\cancel{\int_1^{+\infty}}$

Soit $A \in [1;+\infty[$. Posons $u = \frac{1}{t}$ dans $\int_1^A \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$,

strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ donc elle

définit une bijection strictement décroissante

de $[1;A]$ dans $[1/A;1]$.

$du = -\frac{1}{t^2} dt$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~$\begin{cases} t = 1 \\ t = A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cdot = 1 \\ t \end{cases}$~~

Donc par changement de variable,

$$\int_1^A \left(\frac{1}{t^2}\right)^n dt = \int_{1/A}^1 u^{2n-2}\, du$$

$$\xrightarrow[A \to 0^+]{} \int_0^1 u^{2n-2}\, du = \left[\frac{u^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2n-1}$$

Ainsi : $I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\, dt = \frac{1}{2n-1}$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$

4)h) Ainsi par théorème d'encadrement, comme

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ on a :

$$I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

4)c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ par la relation de Chasles pour les intégrales convergentes

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 + 0 = 0$

d'après 2)d) et 4)b)

Bilan : $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

~~Soit $n \in \mathbb{N}^*$~~

~~5)a) Soit $A > 0$, notons $J_n^A = \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$~~

~~. Posons : $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$~~

~~f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;A]$~~

~~$\forall t \in [0;A]$, $f'(t) = 1$ et $g'(t) = \frac{-n2t(1+t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^{2n}}$~~

~~D'où par intégration par parties,~~

~~$J_n^A = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^A + \int_0^A \frac{2n t^2(1+t^2)^{n-1}}{(1+t^2)^{2n}} dt$~~

~~$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + \int_0^A \frac{2n t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$~~

~~5)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A > 0$.~~

~~Notons $J_n^A = \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} \, dt$~~

~~Posons : $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}$ et $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$~~

~~f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;A]$~~

~~$\forall t \in [0;A]$, $f'(t) = (n-1)$~~

5)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A > 0$

Notons $J_n^A = \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} \, dt$

Posons $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;A]$

donc : $\forall t \in [0;A]$,

$$f'(t) = 1 \quad \text{et} \quad g'(t) = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

Donc par intégration par parties :

$$J_n^A = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A + \int_0^A \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} \, dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + \int_0^A \frac{2nt^2 + 2n - 2n}{(1+t^2)^{n+1}} \, dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + \int_0^A \frac{2n}{(1+t^2)^n} - 2n \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \, dt$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 2n \left(J_n - J_{n+1} \right)$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$

5) b) $J_1 = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$= \lim\limits_{A \to +\infty} [\mathrm{Arctan}(t)]_0^A$

$= \frac{\pi}{2}$

~~5) d) J = 0~~

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

5) c) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$

Donc en sommant pour k allant de 1 à N, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{J_k}{k} = 2 \sum_{k=1}^{N} (J_k - J_{k+1})$$

$$= 2(J_1 - J_{N+1}) \text{ par telescoppage}$$

Mais $J_{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ d'après 4) c)

donc $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{J_k}{k}$ converge et vaut $2J_1 = \pi$

5)d) def suite J(n) :

```
    J = np.pi / 2
    for k in range (2,n+1) :
        J = (1-1/2*n) J
    return J
```

Car : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$

$\iff J_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) J_n$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

6) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$P(n)$: " $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ "

Initialisation : $J_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{0}{0}}{4^0}$

d'où $P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$

$$J_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) J_{n+1}$$

$$= \frac{2n+2-1}{2(n+1)} J_{n+1}$$

$$= \frac{2n+1}{2(n+1)} J_{n+1}$$

$$= \frac{2n+1}{2(n+1)} \times \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{n!(n!)} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\, n!} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{(2n+2)} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$$

$$= \binom{2n+2}{n+1} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{4}$$ d'où $P(n+1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Partie 3 :

7) a) • ~~Epreuve~~ : "Je lance une pièce équilibrée"

Succès : "J'obtiens pile" de probabilité $\frac{1}{2}$

X_n compte le nombre de succès dans une succession de $2n$ épreuves aléatoires de Bernoulli indépendantes. Donc

$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$

De même $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2)$

7) b) $\mathbb{P}([X_n = Y_n]) = \mathbb{P}([X_n - Y_n = 0])$

$\cancel{= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{2n} [X_n = k] \cap [X_n - Y_n = 0]\right)}$

$= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [X_n - Y_n = 0])$ par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement $([X_n = k])_{k \in [\![0;2n]\!]}$

$= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y_n = k])$

par indépendance des lancers

$\cancel{= \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X_n = k]) \times \mathbb{P}([Y_n = k])}$

$\cancel{= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}}$

Or : $\forall k \in [\![0;2n]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y_n = k]) \neq 0$

$\iff k = n$ (il faut autant de faces que de pile)

~~Donc : $\mathbb{P}([X_n - Y_n = 0]) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}$~~

$$\cancel{= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 \left(\frac{1}{4^n}\right)^2}$$

$$\cancel{= \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{\pi}}$$

Donc : $\mathbb{P}([X_n = Y_n]) = \mathbb{P}([X_n = n]) \times \mathbb{P}([Y_n = n])$

$$= \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4^n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \, I_{n+1}\right)^2$$

Je m'attendais pas ...

$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = Y_n]) = \lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$

7) c) X_n et Y_n jouent des rôles symétriques donc

$\mathbb{P}([X_n > Y_n]) = \mathbb{P}([Y_n > X_n])$

7)d) On a : d'après la formule des probabilités totales

$\mathbb{P}[X_n = Y_n]) + \mathbb{P}[X_n > Y_n] + \mathbb{P}[Y_n > X_n] = 1$

Or $\mathbb{P}[X_n > Y_n] = \mathbb{P}[X_n < Y_n])$

Donc : $\mathbb{P}[X_n = Y_n]) = 1 - 2\,\mathbb{P}([X_n < Y_n])$

Donc quand n tend vers $+\infty$ on a

$0 = 1 - 2 \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n < Y_n])$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n < Y_n]) = \frac{1}{2}$

~~8)a) $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$~~

~~Donc par indépendance des $Z_1 \dots Z_n$,~~

~~$\sum_{k=1}^{2n} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}$~~

8)a) La variable $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ compte le nombre de "piles" dans une succession de 2n lancers de pièces indépendants donc

$\sum_{k=1}^{2n} Z_k = Y_n$

8)b) * $E(Z_1) = \dots = E(Z_{2n}) = 1/2$
* $V(Z_1) = \dots = V(Z_{2n})$

$\emptyset$

8)c) On a donc $\mathbb{P}[X_n < Y_n] + \mathbb{P}[X_n = Y_n] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1/2$

Or $\mathbb{P}([X_n = Y_n]) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. ~~Donc $\mathbb{P}([X_n < Y_n]) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\mathbb{P}(\{X_n < Y_n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Exercice 2 :

6)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u = nt$ dans $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$ (légitime car affine).

Donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^2 e^{-u} \times \frac{1}{n}\,du$

$= \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\,du$

$= \frac{1}{n^3}\Gamma(3) = \frac{2}{n^3}$

6)b) $\varnothing$

6)c) - D'une part $t \mapsto \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est positive sur $\mathbb{R}^+$

- D'autre part : $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq \frac{t^2}{1+e^{-2t}} = \frac{t^2 e^t}{e^t+e^{-t}}$$

$$= \cancel{\frac{t^2e^t+e^{-t}+t^2}{} - \frac{t^2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}}$$

$$= \frac{t^2e^t+t^2e^{-t}}{e^t+e^{-t}} - \frac{t^2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

$$= t^2 - \frac{t^2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}.$$

~~Or : $(X^2 e^{-X}$~~

Or : $\forall \omega \in \Omega$, $0 \leq (X^2 e^{-X})(\omega) \leq X^2(\omega)$

~~Donc par croissance d~~

Donc par domination $\mathbb{E}(X^2 e^{-X})$ existe (car $\mathbb{E}(X^2)$ existe)

~~Donc~~ $\cancel{\int_0^{+\infty}}$ $0 \leq \mathbb{E}(X^2 e^{-X}) \leq \mathbb{E}(X^2)$ par croissance de l'espérance

Donc $\mathbb{E}(X^2 - X^2 e^{-X})$ existe

$\emptyset$

7)a) - $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Si $\underline{x \leq 0}$: $G(x) = 0$

$\rightsquigarrow$ Si $\underline{x > 0}$: $G(x) = \mathbb{P}([e^X \leq x])$

$= \mathbb{P}([X \leq \ln(x)])$ } par stricte croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(x)$

~~Arctan~~

- Ainsi : $G : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0^-} G(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} G(x)$ donc G est continue en 0

De plus G est une composée de fonctions continues sur

$\mathbb{R}_+^*$ donc G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc G est continue sur $\mathbb{R}$

~~Donc G est la foncti~~

Donc **Y est à densité**

7) a)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

7) c) $\mathbb{P}\left(\left[\frac{n}{M_n} \leq x\right]\right) = \mathbb{P}([n \leq x M_n])$

$= \mathbb{P}\left(\left[M_n \geq \frac{n}{x}\right]\right)$

$= 1 - G_n(x)$

~~Or : $G_n(x) \longrightarrow$~~

Or ~~: $G_n(x) = e^{n \ln(2/\pi \operatorname{Arctan}(x))}$~~

Or $G_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ si $x > 0$

Donc **M_n converge vers la loi certaine égale à 0**