Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 12	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 1:

1. a) $\boxed{S_0 = \{ t \to \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}}$

b) $x(t) = (at+b)e^{-t}$
$x'(t) = -(at+b)e^{-t} + ae^{-t}$

$x'(t) = -x(t) + e^{-t} \Leftrightarrow -(at+b)e^{-t} + ae^{-t} = -(at+b)e^{-t} + e^{-t}$

$\Leftrightarrow ae^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow a = 1$ et $b \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{x_0 = (t+b)e^{-t} \quad b \in \mathbb{R}}$

c) $\boxed{S = \{ t \to \lambda e^{-t} + (t+\mu)e^{-t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}}$

2. a) $A = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$Sp(A) = \{-1\}$ car A est triangulaire supérieure

Supposons A diagonalisable.
Alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$
$A = PDP^{-1} = -PI_2P^{-1} = -I_2$ or $A \neq -I_2$ donc
A n'est pas diagonalisable

b) On reconnaît un problème de Cauchy donc il n'y a qu'une seule solution pour (S) avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$

c) $\begin{cases} x(0) = (0+\mu)e^0 + \lambda e^0 = \mu + \lambda = 1 \\ y(0) = \lambda e^0 = \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$

donc $x(t) = e^{-t} + te^{-t} = \boxed{(t+1)e^{-t}}$ est l'unique solution

d) $\lim\limits_{t \to +\infty} (t+1)e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} (te^{-t} + e^{-t}) = \boxed{0}$ par croissances comparées

3.
```
T = np.linspace(-2, 10, 200)
x = [(t+1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

4.a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{kx} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{kx} = \boxed{0}$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{kx} = \boxed{+\infty}$

b) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_k'(x) = k(x+1)e^{kx} + e^{kx} = e^{kx}(kx+k+1)$

$kx + k + 1 = 0 \underset{k>0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{k+1}{k}$

x	$-\infty$		$-\frac{k+1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0			$+$			
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f_k(-1) = 0$

$f_k(0) = 1$

$f_k\left(-\frac{k+1}{k}\right) = \left(-\frac{k+1}{k} + 1\right)e^{-(k+1)} = -\frac{e^{-(k+1)}}{k}$

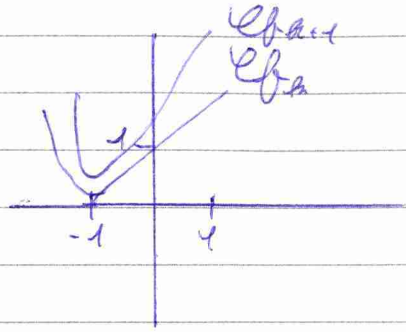
5a) $k < k+1 \Rightarrow xk < x(k+1) \Rightarrow e^{xk} < e^{x(k+1)} \Leftrightarrow f_k(x) < f_{k+1}(x)$
si $x > 0$

$k < k+1 \Rightarrow xk > (k+1)x \Rightarrow e^{xk} > e^{x(k+1)} \Rightarrow f_k(x) < f_{k+1}(x)$
si $x < 0$ et $f_k(x) = f_{k+1}(x)$ si $x = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_k(x) < f_{k+1}(x)$ et $f_k(0) = f_{k+1}(0)$

donc $\mathcal{C}_{k+1}$ est toujours au dessus de $\mathcal{C}_k$ et les courbes se croisent en 0

b)



6. a) f_k est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{k+1}{k}; +\infty\right[$
donc f_k réalise une bijection de $\left]-\frac{(k+1)}{k}; +\infty\right[$ dans $\left]-\frac{e^{-(k+1)}}{k}; +\infty\right[$
$k \in \left]-\frac{e^{-(k+1)}}{k}; +\infty\right[$ donc l'équation
$f_k(x) = k$ admet une unique solution u_k sur $\left]-\frac{k+1}{k}; +\infty\right[$

en $-\frac{k+1}{k}$, $f\left(-\frac{k+1}{k}\right) = -\frac{e^{-(k+1)}}{k} \neq k$

f_k est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{k+1}{k}\right[$
donc f_k réalise une bijection de $\left]-\infty; -\frac{k+1}{k}\right[$ dans $\left]-\frac{e^{-(k+1)}}{k}; 0\right[$
mais $k \notin \left]-\frac{e^{-(k+1)}}{k}; 0\right[$

donc l'équation $f_k(x) = k$ n'admet qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$ notée u_k

b) $f_1(u_1) = (u_1 + 1)e^{u_1} = 1 = f_1(0) \Rightarrow \boxed{u_1 = 0}$ car f_1 réalise une bijection sur $\left]-\frac{k+1}{k}; +\infty\right[$

7. $1 \leq k < k\left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right)$ car $\frac{\ln(k)}{k} > 0$ car $k > 1$

$\Rightarrow f_k(0) \leq f_k(u_k) < f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) \Rightarrow \boxed{0 \leq u_k < \frac{\ln(k)}{k}}$
f_k est croissante sur $\left]-\frac{k+1}{k}; +\infty\right[$

$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissances comparées

donc par encadrement, $\boxed{\lim_{k\to+\infty} u_k = 0}$

8a) $f_k(u_k) = (u_k+1)e^{ku_k} = k \underset{(u_k+1)>0}{\Leftrightarrow} e^{ku_k} = \frac{k}{u_k+1} \Leftrightarrow k u_k = \ln\left(\frac{k}{u_k+1}\right)$

$\Leftrightarrow u_k = \frac{1}{k}\left(\ln(k) - \ln(u_k+1)\right) = \boxed{\frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}}$

b) $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ donc par composition, $\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(u_k+1)}{k} = 0$

donc $\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k+\infty} \frac{\ln(k)}{k} + 0 \Rightarrow \boxed{u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}}$

9. $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ et $\frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{1}{k}$

$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann de paramètre $1 \leq 1$
donc elle diverge
Par comparaison de séries divergeante de terme
general positif, $\boxed{\sum_{k\geq 1} u_k \text{ diverge}}$

exercice 2.
1. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Leftrightarrow -A^2 = I_2$ donc A est inversible et

$\boxed{A^{-1} = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$

2. $A^2 = -I_2 \Leftrightarrow A^2 + I_2 = 0$
donc $P(X) = X^2 + 1$ est polynôme annulateur de A
or $P(X) > 0 \ \forall X \in \mathbb{R}$ donc $Sp(A) = \{\emptyset\}$ donc A
n'est pas diagonalisable

3. - $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- $A O_2 = O_2 = O_2 A$ donc $O_2 \in \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{C}$
$A(\lambda M + N) = A\lambda M + AN = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$
donc $(\lambda M + N) \in \mathcal{C}$
donc $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	**Code épreuve :**	**Nombre de pages :** 12	**Session :** 2024
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyon		
	Consignes	• *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer* • *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir* • *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)* • *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)* • *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*	

4a) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$ donc

$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

b) (I_2, A) est libre car de deux vecteurs non colinéaires

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(I_2; A)$

donc (I_2, A) est génératrice de $\mathcal{C}$
donc (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}$

5.a) $AMN = \underset{\uparrow M \in \mathcal{C}}{MAN} = \underset{\uparrow N \in \mathcal{C}}{MNA}$ donc $\boxed{MN \in \mathcal{C}}$

b) $\boxed{MN} = (aI_2 + bA)N = aN + bAN = \underset{\uparrow N \in \mathcal{C}}{aN + bNA} = N(aI_2 + bA) = \boxed{NM}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6. $M = aI_3 + bA$ or I_3 et A sont inversibles donc par somme de matrice inversible, M est inversible

$\boxed{AM^{-1}} = (MA^{-1})^{-1} = (-MA)^{-1} \underset{M \in \mathcal{C}}{=} -(AM)^{-1} = -M^{-1}A^{-1} = \boxed{M^{-1}A}$ donc $M^{-1} \in \mathcal{C}$

7a) $M^2 = (aI_2 + bA)^2 = a^2I_2 + 2abA + b^2A^2 \underset{q1.}{=} a^2I_2 + 2abA - b^2I_2$

$= \boxed{(a^2 - b^2)I_2 + 2abA}$

b) $P(M) = O_2 \Leftrightarrow M^2 + uM + vI_2 = O_2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)I_2 + 2abA + uM + vI_2 = O_2$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)I_2 + 2abA + u(aI_2 + bA) + vI_2 = O_2$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)I_2 + 2abA + auI_2 + buA + vI_2$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + au + v)I_2 + (2ab + bu)A = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a^2 - b^2 + au + v = 0 \\ 2ab + bu = 0 \end{cases}}$ car I_2 et $A \neq 0$

8.a) si $\Delta \geq 0$, $P(M) = O_2$ admet 1 ou 2 solutions car c'est un polynôme de degré 2

9. $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A = \lambda AMA + ANA = \lambda \varphi(M) + \varphi(N)$
donc φ est linéaire
$M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $AMA \in M_2(\mathbb{R})$ car $A \in M_2(\mathbb{R})$
donc φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

11. $\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(AMA) = A^2 M A^2 = -I_2 M (-I_2) = \boxed{M}$
donc φ est bijectif et $\boxed{\varphi^{-1} = \varphi}$

12a) $\boxed{\varphi(E_1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{-E_4}$

$\boxed{\varphi(E_2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{E_3}$

$\boxed{\varphi(E_3)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{E_2}$

$\boxed{\varphi(E_4)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-E_1}$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) B est symétrique donc diagonalisable

$B^2 = I_4 \iff B^2 - I_4 = 0$ donc $P(X) = X^2 - 1$ est polynôme annulateur de B donc $Sp(B) \subset \{-1; 1\}$
Or, B est diagonalisable et $B \neq I_4$ ou $B \neq -I_4$
donc $card(Sp(B)) \geq 2$ donc $\boxed{Sp(B) = \{-1; 1\}}$

c) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ b + c = 0 \\ c + b = 0 \\ d - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$

donc $E_{-1}(B) = \text{Vect}\boxed{\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2} \right)}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_1(B) \Leftrightarrow \begin{cases} -a - d = 0 \\ -b + c = 0 \\ -c + b = 0 \\ -d - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$

donc $E_1(B) = \text{Vect}\boxed{\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{X_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_4} \right)}$

(X_1, X_2) et (X_3, X_4) sont libres car de 2 vecteurs non colinéaires. Elles sont chacune génératrice donc (X_1, X_2) est une base de $E_{-1}(B)$ et (X_3, X_4) est une base de $E_1(B)$

exercice 3

1. $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1 ; N \rrbracket)}$

2. . (X in L) == False signifie que X n'est pas dans la liste L

L.append (X) ajoute X à la fin de la liste
donc si X n'est pas dans la liste, il est rajouté à la fin

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 12	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3.
```
def Simul_T(N, i):
    L = []
    k = 0
    while np.len(L) <= i :
        x = rd.randint(1, N+1):
        ajout(L, X)
        k = k+1
    return (k)
```

4.
```
v = np.zeros(1000)
for k in range(100)
    v[k] = Simul_T(3,2)
print(np.mean(v))
```

On obtient $\boxed{E(T_2)}$ dans une urne de 3 boules

5. $\boxed{T_2(\Omega) = [\![2 ; +\infty [\![}$

6. a) $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ signifie qu'on a tiré la boule 1 lors des $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage et qu'on a obtenu une boule différente au $k^{\text{ème}}$ tirage

On a donc

$$\boxed{((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} X_j = 1 \cap (X_k \neq 1) \right)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $P(T_2 = k \cap X_1 = 1) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} X_j = 1 \cap (X_k \neq 1)\right)$

$\underset{\text{indépendance mutuelle car il y a remise}}{=} \prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = 1)\ P(X_k \neq 1) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)\right) \frac{2}{3} = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}}$

c) $P(T_2 = k) \underset{\text{probas totales sur SCE } (X_1 = i)_{i \in [[1;3]]}}{=} P\left(\bigcup_{i=1}^{3} X_1 = i \cap T_2 = k\right) \underset{\text{incompatibilité}}{=} \sum_{i=1}^{3} P(X_1 = i \cap T_2 = k) \underset{\text{car } (X_1=1)=(X_1=2)=(X_1=3)}{=} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} (3 - 1 + 1) = \boxed{\frac{2}{3^{k-1}}}$

7. T_2 admet une espérance si $\sum_{i \geq 2} i P(T_2 = i)$ converge absolument. $|i P(T_2 = i)| = 2 i \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$ on reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ donc $E(T_2)$ existe et

$E(T_2) = \sum_{i=2}^{+\infty} i \frac{2}{3^{i-1}} = 2\left(\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - 1\right) = 2\left(\frac{9-4}{4}\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$

8. $Z_2(\Omega) = T_2(\Omega) - 1 = \mathbb{N}^*$

$P(Z_2 = k) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k+1) = \frac{2}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} = \boxed{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}}$

donc $\boxed{Z_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)}$

$E(T_2) = E(Z_2 + 1) = E(Z_2) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$

$V(T_2) = V(Z_2 + 1) = V(Z_2) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{3^2}{2^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$

9. a) $Z_i(\Omega) = (T_i - T_{i-1})(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car $T_i > T_{i-1}$

$P(Z_i = k) = P(T_i - T_{i-1} = k) = P\left(\bigcup_{j=i}^{+\infty} T_i = j \cap T_{i-1} = \quad\right)$

probas totales sur SCE $(T_i = j)_{j \in [[i;+\infty[[}$

$$= \sum_{j=i-1}^{+\infty} P(T_{i-1} = j \cap T_i = k+j) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} P(T_{i-1} = j) P(T_i = k+j)$$

$$= \sum^{+\infty}$$

b) $\boxed{E(Z_i) = \frac{N}{N-i+1}}$

$$V(Z_i) = \frac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2} = \frac{i-1}{N} \frac{N^2}{(N-i+1)^2} = \boxed{\frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}}$$

si $i=1$, $\boxed{\begin{array}{l} E(Z_i) = 1 \\ V(Z_i) = 0 \end{array}}$ ce qui est vrai car on a forcément 1 boule unique au premier tirage

10. voir après 11 b

11.a) $P(Z_2 = l \cap Z_3 = k) \underset{\text{indépendance}}{=} P(Z_2 = l) P(Z_3 = k)$

$$= \left(1 - \frac{N-2+1}{N}\right)^{l-1} \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{N-3+1}{N}\right)^{k-1} \frac{N-2}{N}$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^{l-1} \frac{N-1}{N} \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} \frac{N-2}{N} = \boxed{2^{k-1}(N-1)(N-2)\left(\frac{1}{N}\right)^{l+k}}$$

b) $P(Z_2 + Z_3 = n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} Z_2 = i \cap Z_3 = n-i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(Z_2 = i \cap Z_3 = n-i)$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} (N-1)(N-2)\left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^n 2^n \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^n 2^n \frac{1}{2} \frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^n 2^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\frac{2}{N}\right)^n \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) = \boxed{\frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)}$$

10. $T_i = T_i - T_{i-1} + T_{i-1} - T_{i-2} \dots - T_1 = T_i - T_1 = \sum_{k=2}^{i} T_k - T_{k-1}$

$$= \sum_{k=2}^{i} Z_k = \boxed{\sum_{k=1}^{i} Z_k - 1}$$

11 c) $T_3(\Omega) = [\![2 ; +\infty [\![$

$$P(T_3 = k) = P\left(\sum_{k=2}^{3} Z_k = k\right) = P(Z_2 + Z_3 = k) = \boxed{\frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^{n} - \frac{2}{N^n}\right)}$$

12. $$E(T_i) = E\left(\sum_{k=1}^{i} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{i} E(Z_k) = \sum_{k=1}^{i} \frac{N}{N-k+1} \underset{k' = N-k+1}{=} N \sum_{k=N}^{N-i+1} \frac{1}{k} = \boxed{N \sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}}$$

13. $$\text{cov}(T_i, T_j) = E(T_i T_j) - E(T_i)E(T_j) \underset{T_i \text{ et } T_j \text{ suivent la même loi}}{=} E(T_i^2) - (E(T_i))^2 = \boxed{V(T_i)}$$