Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2 :

1)a) - Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}}$$

1)b) on pose $\forall x > 0 \quad h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\begin{cases} x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{Arctan est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$

donc par composition $x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h'(x) = 0$

h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$

de plus : $h(1) = 2\text{Arctan}(1)$

$= 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$h(1) = \frac{\pi}{2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

1) c) D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} \text{Arctan}^{(k)}(0) + o(x)$$

$$\underset{x \to 0}{=} \text{Arctan}(0) + x\left(\frac{1}{1+0}\right) + o(x)$$

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x) \quad \text{car} \quad \text{Arctan}(0) = 0$$

donc $\boxed{\text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \frac{2}{\pi(e^{-x} + e^{-(-x)})}$

$$= \frac{2}{\pi(e^{x} + e^{-x})}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$

donc f est paire

• étude de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$:

Soit $y \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^y f(x)dx = \int_0^y \frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\text{Arctan}(e^{-x})\right]_0^y$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\text{Arctan}(e^{-y}) + \text{Arctan}(1)\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left(\text{Arctan}(e^{-y})\right) + \frac{1}{2} \quad \text{car } \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

or $\lim\limits_{y \to +\infty}\left(\text{Arctan}(e^{-y})\right) = \lim\limits_{z \to 0}\left(\text{Arctan}(z)\right)$
$= \text{Arctan}(0)$
$= 0$

donc $\lim\limits_{y \to +\infty}\left(\int_0^y f(x)dx\right) = \frac{1}{2}$

donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$

de plus : f est paire

donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ converge et vaut } 2\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1}$

2) b) ① $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$ et $e^x > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{e^x+e^{-x}} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$

② f est continue sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x + e^{-x} > 0$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1 d'après 2) a)

Par ①, ② et ③ : $\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité}}$

03/

3) On note F la fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{y \to -\infty} \left[-\operatorname{Arctan}(e^{-t}) \right]_y^x$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{y \to -\infty} \left(-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{e^x}\right) + \operatorname{Arctan}(e^{-y}) \right)$$

$$= \left(-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{e^x}\right) + \frac{\pi}{2} \right)\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \left(\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

car d'après 1) b-) : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

donc $\operatorname{Arctan}(e^{-x}) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(e^x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x)}$$

4) $U = F(X)$

a) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x)$

on d'après 2) b) on a vue de $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$

donc • F est strictement croissante et continue (car c'est une fonction de répartition) sur $\mathbb{R}$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (F(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x) \right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (F(x)) = \lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(z) \right) = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{F \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0, 1[}$

4) b) on pose G la fonction de répartition de U

$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = P(F(X) \leq x)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

• Si $x \leqslant 0$:

$[F(X) \leqslant x] = \emptyset$ car F est à valeur dans $]0,1[$

donc $G(x) = 0$

• Si $x \geqslant 1$:

$[F(X) \leqslant x] = \Omega$ car F est à valeur dans $]0,1[$

donc $G(x) = 1$

• Si $x \in]0,1[$:

$G(x) = P(X \leqslant F^{-1}(x))$
$= F(F^{-1}(x))$
$G(x) = x$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

donc $\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)}$

4) c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times]0,1[$ tel que $F(x)=y$

$$F(x)=y \iff \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(e^{x})=y$$

$$\iff \operatorname{Arctan}(e^{x})=\frac{\pi}{2}y$$

$$\iff e^{x}=\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\iff x=\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$$

donc $\boxed{\forall x \in]0,1[\quad F^{-1}(x)=\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)}$

```
U = rd.random()
X = np.log(np.tan((np.pi/2)*U))
```

5) a) X admet une espérance $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge

$\iff \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge car $x \mapsto xf(x)$ est impaire car f est paire

or $\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\,dx$

~~Soit $y \in \mathbb{R}_+$~~

~~On pose :~~

~~$u(x)=\operatorname{Arctan}(e^{-x})$ $\quad v(x)=x$~~

~~$u'(x)=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$ $\quad v'(x)=1$~~

~~u et v sont de classe~~

$x \mapsto \dfrac{2x}{\pi(e^{-x}+e^{x})}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

de plus $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(\dfrac{2x^3}{\pi(e^{-x}+e^{x})} \right) = 0$ par croissance comparée

donc $x f(x) \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente

donc par comparaison : $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge

donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ converge

donc $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$

De plus $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$\boxed{E(X) = 0}$ car $x \mapsto x f(x)$ est impaire

5) b) X^2 admet une espérance $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge car $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire

or $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{\pi(e^{-x}+e^{x})} dx$

$x \mapsto x^2 f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

or $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x^4 f(x)) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(\dfrac{2x^4}{\pi(e^{-x}+e^{x})} \right) = 0$ par croissance comparée

donc $x^2 f(x) \underset{x \mapsto +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente

Par comparaison : $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge

$\boxed{X^2 \text{ admet une espérance}}$

6) a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ On pose $u = mt$ (changement de variable affine)

$$t = \frac{u}{m} \quad \text{car} \quad m > 0$$

$$dt = \frac{1}{m} du$$

$$\begin{cases} \text{Si } t \mapsto +\infty \text{ alors } u \mapsto +\infty \\ \text{Si } t = 0 \text{ alors } u = 0 \end{cases}$$

$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt$ converge $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \left(\frac{1}{m}\right) du$ converge

on $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{m^3} u^2 e^{-u} du$

$$= \frac{1}{m^3} \Gamma(3)$$

$$= \frac{1}{m^3} 2!$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du = \frac{2}{m^3}$$

donc $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du$ converge

donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt$ converge

et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^2 e^{-u} \frac{1}{m} du$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-mt} dt = \frac{2}{m^3}}$$

6) b) Soit $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k e^{-2kt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sum_{k=0}^{p} (-e^{-2t})^k dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de : mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\,dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\left(\frac{1-(-e^{-2t})^{p+1}}{1+e^{-2t}}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\left(\frac{1+(-1)^p e^{-2t(p+1)}}{1+e^{-2t}}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2e^{-t}}{1+e^{-2t}} + \frac{t^2(-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1+e^{-2t}}\right)dt$$

on $I + (-1)^p\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{e^t+e^{-t}}\,dt + \int_0^{+\infty}\frac{t^2(-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1+e^{-2t}}\,dt$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{e^{-t}(e^t+e^{-t})}\,dt + \int_0^{+\infty}\frac{t^2(-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt + \int_0^{+\infty}\frac{t^2(-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2e^{-t}}{1+e^{-2t}} + \frac{t^2(-1)^p e^{-t(2p+3)}}{1+e^{-2t}}\right)dt$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}\quad I+(-1)^p\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\int_0^{+\infty}t^2e^{-(2k+1)t}\,dt}$$

d'après la relation établie avant

6) c) $\forall t\in\mathbb{R}, \forall p\in\mathbb{N}\quad t^2\geqslant 0\quad e^{-(2p+3)t}>0$ et $1+e^{-2t}>0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \dfrac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \, dt \geq 0 \qquad (1)$$

de plus : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 1+e^{-2t} \geq e^{-2t} > 0$ car $e^{-2t} > 0$

$\dfrac{1}{1+e^{-2t}} \leq \dfrac{1}{e^{-2t}}$ car $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N} \quad \dfrac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq \dfrac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{e^{-2t}}$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $t^2 \geq 0$ et $e^{-(2p+3)t} > 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N} \quad \dfrac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+1)t}$

on $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+1)t} \, dt$ converge par 6)a) car $2p+1 > 0$

et vaut $\dfrac{2}{(2p+1)^3}$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq \frac{2}{(2p+1)^3} \qquad (2)$$

Par (1) et (2) :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \, dt \leq \frac{2}{(2p+1)^3}$$

On $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{2}{(2p+1)^3} \right) = 0$

Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \right) = 0}$$

6) d) $\lim_{p \to +\infty} \left(\left| (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \right| \right)$

$= \lim_{p \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \right) =$

$= 0$

donc $\lim_{p \to +\infty} \left((-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \right) = 0$

Par 6) b) :

$\lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt \right) = I$

donc $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt$ et :

$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I$

or $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$

$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} E(X^2) \right)$ car $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire

$= \frac{\pi}{4} E(X^2)$

$= \frac{\pi}{4} V(X)$ car $E(X) = 0$ donc $V(X) = E(X^2)$

donc $\boxed{V(X) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt}$

de plus, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} \, dt = \frac{2}{(2k+1)^3}$ par 6) a)

donc $V(X) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^3}$

$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^3}{32} \right)$

$$\boxed{V(X) = \frac{\pi^4}{64}}$$

7) a) $Y = e^X$ soit G la fonction de répartition de Y (j'ai pris G aussi tout à l'heure pour U mais ce n'est pas la même fonction)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $G(x) = P(e^X \leq x)$

- Si $x \leq 0$:
  $[e^X \leq x] = \emptyset$

  donc $G(x) = 0$

- Si $x > 0$:
  $G(x) = P(X \leq \ln(x))$ car $u \mapsto \ln(u)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

  $= F(\ln(x))$

  $= \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^{\ln(x)})$

  $G(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondie EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (G(x)) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (G(x)) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(x)\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(0) = 0 \end{cases}$

donc G est continue en 0

G est continue sur $\mathbb{R}$ (1)

de plus : G est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (2)

Par (1) et (2) : $\boxed{Y \text{ est variable aléatoire à densité}}$

7) b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $G_n(x) = P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leq x)$

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i \leq x)\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$ car $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes

$= \prod_{i=1}^{n} G(x)$

$= (G(x))^n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$

7) c) Soit Z_n la fonction de répartition de $\left(\frac{n}{M_n}\right)$

$M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ donc $\left(\frac{n}{M_n}\right)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_- \; Z_n(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad Z_n(x) = P\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right)$

$$= P\left(\frac{1}{M_n} \leq \frac{x}{n}\right) = P\left(M_n \geq \frac{n}{x}\right)$$

$$= 1 - P\left(M_n < \frac{n}{x}\right)$$

$$= 1 - G_n\left(\frac{n}{x}\right)$$ car M_n est à densité

$$\begin{cases} \frac{n}{x} > 0 \iff x > 0 \\ \frac{n}{x} \leq 0 \iff x < 0 \end{cases}$$

donc $Z_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

on par 1) b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)$

donc :

$\forall x \in \; Z_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

on $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{n}\right) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\lim_{n \to +\infty} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) = 0$

• Si $x > 0$:

alors $Z_n(x) = 1 - e^{n \ln\left(1 - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)}$

on $\lim_{n \to +\infty} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) = 0$

donc $\ln\left(1 - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$

donc $n \ln\left(1 - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -x$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(e^{n \ln\left(1 - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)}\right) = e^{-x}$

$\forall x > 0$ $\lim_{n \to +\infty} (Z_n(x))$ $1 - e^{-x}$

• Si $x \leqslant 0$

$\lim_{n \to +\infty} (Z_n(x)) = 0$

donc finalement : $\boxed{\frac{n}{M_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{avec } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

Exercice 1 :

$n \geq 2$

1) Soit C_i la i-ème colonne de J_n (avec $i \in [\![1, n]\!]$)

donc $rg(J_n) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n))$

$= \dim(\mathrm{Vect}(C_1))$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]\ C_i = C_1$

$$\boxed{rg(J_n) = 1}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

donc $J_n X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

$$\begin{cases} X \neq 0 \\ J_n X = 0 \end{cases}$$

$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n}$

on note E_0 le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre 0

D'après le théorème du rang :

$\dim(E_0) + rg(J_n) = n$

$$\boxed{\dim(E_0) = n-1}$$

1) a) $J_n V_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n V_n$

$$\begin{cases} V_n \neq 0 \\ J_n V_n = n V_n \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $\boxed{V_n \text{ est vecteur propre de } J_n \text{ associé à la valeur propre } n}$

1) c) n est valeurs propre de J_n
on pose E_n le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n
donc $\dim(E_n) \geq 1$
or d'après 1) $\dim(E_0) = n-1$

donc $\dim(E_0) + \dim(E_n) \geq n$

or $\dim(E_0) + \dim(E_n) = n$

donc $\boxed{Sp(J_n) = \{0, n\}}$

2) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$

$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_1, \dots, x_n \mapsto \frac{1}{n} x_i^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ (polynôme)
Par somme : $x_1, \dots, x_n \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$

de plus : $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_1, \dots, x_n \mapsto \frac{1}{n} x_i$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ (polynôme)
Par somme $x_1, \dots, x_n \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$

de plus $u \mapsto u^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

Par composition :

$$x_1, \dots, x_n \mapsto \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

Finalement, par somme : $\boxed{f_n \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n}$

3) a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} x_i - 2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall i \in [\![1,n]\!] \\ \forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\end{array} \quad \partial_i f_n(x) = \frac{2}{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}$$

3) b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_n)$ sont les points critique de f_n

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f_n(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \frac{2}{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \\ x_1 = \dots = x_n \end{cases}$

donc $\boxed{\text{les points critiques de } f_n \text{ sont les points critiques de la forme } (a,\dots,a)\in\mathbb{R}^n}$

4)a) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ et $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

• Si $i=j$:

$$\boxed{\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \partial^2_{i,j} f_n(x) = \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

• Si $i\neq j$:

$$\boxed{\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \partial^2_{i,j} f_n(x) = -\frac{2}{n^2}}$$

4)b) $$\frac{2}{n^2}(nI_n - J_n) = \frac{2}{n^2}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ -1 & \vdots & \ddots & \\ & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{n^2}(nI_n - J_n) = \begin{pmatrix} \frac{2(n-1)}{n^2} & \cdots & -2/n^2 \\ -2/n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ -2/n^2 & \cdots & \frac{2(n-1)}{n^2} \end{pmatrix}$$

or d'après 4)a) :

$$\nabla^2 f_n(a,\dots,a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) & \cdots & -2/n^2 \\ -2/n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ -2/n^2 & \cdots & \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2(n-1)}{n^2} & \cdots & -2/n^2 \\ -2/n^2 & \ddots & \\ \vdots & & \\ -2/n^2 & \cdots & \frac{2(n-1)}{n^2} \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\nabla^2 f_n(a,\dots,a) = \frac{2}{n^2}(n I_n - J_n)}$

4)d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

λ est valeur de $\nabla^2 f_n(a,\dots,a) \iff (\nabla^2 f_n(a,\dots,a) - \lambda I_n)$ est non inversible

$\iff \left(\frac{2}{n^2}(n I_n - J_n) - \lambda I_n\right)$ est non inversible

$\iff \left(-\frac{2}{n^2} J_n + \left(\frac{2}{n} - \lambda\right) I_n\right)$ est non inversible

$\iff \left(\frac{2}{n^2} J_n - \left(\frac{2}{n} - \lambda\right) I_n\right)$ est non inversible

$\iff \left(\frac{2}{n} - \lambda\right) \in Sp\left(\frac{2 J_n}{n^2}\right)$

$\iff \left(\frac{2}{n} - \lambda\right) \in \left\{0, \frac{2}{n}\right\}$ par 1)

$\iff \frac{2}{n} - \lambda = 0$ ou $\frac{2}{n} - \lambda = \frac{2}{n}$

$\iff \lambda = \frac{2}{n}$ ou $\lambda = 0$

donc $\boxed{Sp(\nabla^2 f(a,\dots,a)) = \left\{\frac{2}{n}, 0\right\}}$

donc $Sp(\nabla^2 f(a,\dots,a)) \subset \mathbb{R}_+$, on ne peut pas conclure car $0 \in Sp(\nabla^2 f(a,\dots,a))$

5) a) Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall (z, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad |\langle z, y \rangle| \leq \|z\| \times \|y\|$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc $\langle z, y\rangle^2 \leqslant \|y\|^2 \times \|z\|^2$

on pose $z = (x_1, \dots, x_n)$

et $y = (1, \dots, 1)$ alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

5) b) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$

on $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ d'après 5)a) (en multipliant par $\frac{1}{n^2}$ de chaque côté)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geqslant 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f_n(x) \geqslant 0$

donc $\boxed{f_n \text{ admet un minimum global}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

de plus $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ d'après 3) b), les points critiques de f

donc $f_n(a, \dots, a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a\right)^2$

$= \frac{na^2}{n} - \left(\frac{na}{n}\right)^2$

$= a^2 - a^2$

$f_n(a, \dots, a) = 0$

donc $\boxed{\text{le minimum est atteint en chaque point critique de } f_n}$

6) $n = 2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^2$

$= \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2)$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f_2(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy$

```
def f_2(x,y):
        z = (1/4)*x**2 + (1/4)*y**2 - (1/2)*x*y
    return z.
```

6) b) C'est la surface 2 la bonne car on observe un minimum global en 0 qu'il n'y a pas les autres figures

22/

Exercice 3 :

Partie I : $p \in \mathbb{N}^*$

1) $\forall x \in E, \forall i \in [\![1, m]\!]$ $\langle u_i, x \rangle \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$ et $u_i \in E$

donc $\forall i \in [\![1, m]\!]$ $\lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \in E$

Par somme :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \in E$$

$\forall x \in E$ $f(x) \in E$ (1)

$\forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha x + y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, \alpha x + y \rangle u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (\alpha \langle u_i, x \rangle + \langle u_i, y \rangle) u_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i$$

$$= \alpha f(x) + f(y)$$

f est linéaire (2)

Par (1) et (2) : f est un endomorphisme (i)

de plus : $\forall (x, y) \in E^2$ $\langle f(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle \langle u_i, x \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i, x \rangle$$

$$= \langle f(y), x \rangle$$

$\forall (x, y) \in E^2$ $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ (ii)

Par (i) et (ii) : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique}}$

2) Soit $\forall i \in [|1,n|] \ \lambda_i = 1$

donc $\forall x \in E \quad f(x) = \sum_{i=1}^{p} <u_i, x> u_i$

$\forall x \in E \quad f(x) = x$ car $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthonormale donc d'après le cours : $\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{p} <u_i, x> u_i$

donc $\boxed{\text{Si } \forall i \in [|1,n|] \ \lambda_i = 1 \text{ alors } f = id_E}$

3)a) Soit $x \in E$

$x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i <u_i, x> u_i = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [|1,p|] \quad \lambda_i <u_i, x> = 0$ car $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E

$\Leftrightarrow \forall i \in [|1,p|] \quad <u_i, x> = 0$ car $\forall i \in [|1,n|] \ \lambda_i \neq 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [|1,p|] \quad x \perp u_i$

$\Leftrightarrow x \in Vect((u_1, \dots, u_p))^{\perp}$

donc $\boxed{Ker(f) = Vect((u_1, \dots, u_p))^{\perp}}$

on on sait que d'après cours que :

$Vect((u_1, \dots, u_p))^{\perp} \oplus Vect(u_1, \dots, u_p) = dim(E)$

or $dim(Vect(u_1, \dots, u_p)) = p$ car $(u_1, \dots, u_p)$ est une base

donc $\boxed{dim(Ker(f)) = dim(E) - p}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3)b) D'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) + rg(f) = \dim(E)$$

$$rg(f) = \dim(E) - (\dim(E) - p) \quad \text{d'après 3)a)}$$

$$\boxed{rg(f) = p}$$

de plus $\boxed{Im(f) = Vect(u_1, \dots, u_p)}$ d'après ce qu'on a fait en 3)a)

4) Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle u_i$$

$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad f(u_i) = \lambda_i u_i$ car $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale

donc $\boxed{\lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont des valeurs propres de } f \text{ associées réciproquement à } u_1, \dots, u_p}$

Partie 2 :

6) $\forall x \in E$

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \lambda_j \langle u_i, x \rangle \langle u_j, x \rangle \langle u_i, u_j \rangle$$

$$\boxed{\forall x \in E \quad \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2}$$ car $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthonormale

~~De plus~~ $\cancel{k = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}}$

~~on~~ $\cancel{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \langle u_i, x \rangle^2 \leqslant \|x\|^2}$

7) a) On pose $\mathcal{P}(n)$: " $\|x_n\| \leqslant k^n \|x_0\|$ "

$$\|x_0\| \leqslant k^0 \|x_0\|$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 0$:

$$\|x_n\| \leqslant k^n \|x_0\|$$

or $\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\|$

or par 6) : $\|f(x_n)\| \leqslant k \|x_n\|$

et $k \|x_n\| \leqslant k k^n \|x_0\|$ par hypothèse de récurrence

donc $\|x_{n+1}\| \leqslant k^{n+1} \|x_0\|$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| \leqslant k^n \|x_0\|}$$

7) b) $k < 1$

de plus $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i^2 > 0$ car $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$

donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i > 0$

$k > 0$

donc $0 \leqslant k < 1$

$|k| < 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} (k^n) = 0$

or par 7)a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant \|x_n\| \leqslant k^n \|x_0\|$ car une norme est toujours positive

Par encadrement $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (x_n) = 0}$

donc $\lim_{n \to +\infty} (\|x_n\|) = 0$ car $\forall x \in E$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

donc $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers le vecteur nul de } E}$

7) c) Par 7) a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant \|x_n\| \leqslant k^n \|x_0\|$

or $|k| < 1$ comme nous l'avons vue

donc $\sum_{n \geqslant 0} k^n$ converge, donc $\sum_{n \geqslant 0} k^n \|x_0\|$ converge

Par comparaison : $\boxed{\sum_{n \geqslant 0} \|x_n\| \text{ converge}}$

Problème :

Partie I :

I) a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

$$= \int_0^1 \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

on $\forall t \in [0,1]$ $\quad 1+t^2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (1+t^2)^n > 0$

$\forall t \in [0,1]$ $\quad \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} > 0$

on $\forall t \in [0,1]$ $-t^2 \leqslant 0$

donc $\forall t \in [0,1]$ $\quad -\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant 0$

de plus $t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}$ est continue sur $[0,1]$, donc : $\int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ existe

Par croissance de l'intégrale :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} - U_n \leqslant 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} \leqslant U_n$

$\boxed{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

de plus, $\forall t \in [0,1]$ $\quad (1+t^2) > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (1+t^2)^n > 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 36

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $\forall t \in [0,1]$ $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n \geq 0}$$

1) b) la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée

donc $\boxed{\text{la suite } (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

2) a) On pose $\forall x \in [0,1]$ $g(x) = e^{x/2} - 1 - x$

g est de classe C^1 sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$ $g'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} - 1$

On $\forall x \in [0,1]$ $\frac{1}{2} \geq \frac{x}{2} \geq 0$

$$e^{1/2} \geq e^{x/2} \geq 1$$

$$\frac{1}{2} e^{1/2} \geq \frac{1}{2} e^{x/2} \geq \frac{1}{2}$$

$\forall x \in [0,1]$ $\frac{1}{2} e^{1/2} - 1 \geq g'(x) \geq -\frac{1}{2}$

or $3 > e > 2$

$2 > \sqrt{3} > e^{1/2} > \sqrt{2}$

$1 > \frac{1}{2} e^{1/2}$

$1 - 1 > \frac{1}{2} e^{1/2} - 1$

$\forall x \in [0,1] \quad 0 > \frac{1}{2} e^{1/2} - 1 \geq g'(x)$

donc g est décroissante

donc $\forall x \in [0,1] \quad g(x) \leq g(0)$

or $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

$\forall x \in [0,1] \quad g(x) \leq 0$

$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad e^{x/2} \leq 1 + x}$

2) b) $\forall t \in [0,1] \quad t^2 \in [0,1]$ en posant $x = t^2$ à la question d'avant, on a :

$\forall t \in [0,1] \quad 0 < e^{t^2/2} \leq 1 + t^2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < e^{nt^2/2} \leq (1+t^2)^n$ car $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2}$ car $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

de plus $t \mapsto e^{-nt^2/2}$ est continue sur $[0,1]$

donc $\int_0^1 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$ existe, par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \int_0^1 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt}$$

2) c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on pose $u = \sqrt{n}\, t$ (changement de variable affine)

$t = \frac{u}{\sqrt{n}}$ car $n > 0$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{n}} du$$

$$\begin{cases} \text{Si } t \mapsto +\infty \text{ alors } u \mapsto +\infty \\ \text{Si } t \mapsto -\infty \text{ alors } t \mapsto -\infty \end{cases}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) du$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \varphi(u)\, du$ avec φ une densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = 1$

2) d)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_- \qquad e^{-\frac{nt^2}{2}} > 0$

$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$ converge car $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}}$ converge

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \geq 0$$

de même $\forall t \in [1; +\infty[\qquad e^{-\frac{nt^2}{2}} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$ converge

donc : $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \geq 0$

donc $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt + \int_{0}^{1} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} \geq \int_{0}^{1} e^{-nt^2/2} dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \geq \int_{0}^{1} e^{-\frac{nt^2}{2}} \geq U_n \quad \text{par } 2)b)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \geq U_n \geq 0$ par 2)c) et 1)e)

or $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\right) = 0$

Par encadrement: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (U_n) = 0}$

Partie 2 :

3) $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$$

or $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $2n > 0$ car $n > 0$

donc par équivalence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ converge}}$

4) a) $\forall t \in [1, +\infty[$ $1+t^2 \geq t^2 > 0$

$\forall t \in [1, +\infty[$ $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ car $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$ car $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 36	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales convergent) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$

on $\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \lim_{y \to +\infty} \left[- \frac{t^{-2n+1}}{(2n-1)} \right]_1^y$

$= \lim_{y \to +\infty} \left(- \frac{1}{(2n-1) y^{2n-1}} + \frac{1}{(2n-1)} \right)$

$= \frac{1}{(2n-1)}$ car $2n \geqslant 2 > 1$
$2n - 1 > 0$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(2n-1)}}$

4) b) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \right) = 0$

Par encadrement par 4) a) :

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (I_n) = 0}$

4) c) $J_n = I_n + U_n$

on $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (I_n) = 0 & \text{par } 4)b) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = 0 & \text{par } 2)d) \end{cases}$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (J_n) = 0}$

5) a) $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ $\quad t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$

On pose :

$u(t) = t$ $\quad v(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$

$u'(t) = 1$ $\quad v'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, y]$, par intégrations par parties :

$$\int_0^y \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^y + 2n \int_0^y \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int_0^y \frac{(t^2+1) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \left(\int_0^y \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^y \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right)$$

or $\frac{y}{(1+y^2)^n} \underset{y \to +\infty}{\sim} \frac{y}{y^{2n}} \underset{y \to +\infty}{\sim} \frac{1}{y^{2n-1}}$

or $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{y^{2n-1}} \right) = 0$ car $n \geq 1$ donc $2n-1 > 0$

et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$

Par passage à limite quand $y \mapsto +\infty$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n = 2n (J_n - J_{n+1})}$$

5) b) $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt$

$= \lim\limits_{y \mapsto +\infty} [\operatorname{Arctan}(t)]_0^y$

$= \lim\limits_{y \mapsto +\infty} \left(\operatorname{Arctan}(y) - \operatorname{Arctan}(0) \right)$

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}}$$

5) c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$ par 5) a)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{J_k}{k} = 2 \sum\limits_{k=1}^{N} (J_k - J_{k+1})$

$= 2 \left(J_1 - J_{N+1} \right)$ par télescopage

or $\lim\limits_{N \mapsto +\infty} \left(J_{N+1} \right) = 0$

donc $\lim\limits_{N \mapsto +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{J_k}{k} \right) = 2 J_1$

donc $\boxed{\sum\limits_{k \geq 1} \frac{J_k}{k} \text{ converge}}$

et $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k}{k} = 2 J_1 = \pi}$ par 5) b

3) d) def suite J(n) :

```
J = np.pi/2
for k in range(2, n+1) :
    J = (2*n* J)/(2*n-1)
return (J)
```

6) on pose $\mathcal{P}(n)$: « $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ »

$$J_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2\times 0}{0}}{4^0}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$

$$J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

or $J_{n+2} = \frac{2(n+1) J_{n+1}}{2(n+1)-1}$ par 5) a)

$= \frac{\pi}{2} \times \frac{2(n+1)}{2n+1} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ par hypothèse de récurrence

$= \frac{\pi}{2} \times \frac{2n!}{(n!)^2 4^n} \times \frac{2(n+1)}{2n+1}$

$=$