Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 15	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1.a) On cherche a et b tels que :

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} \iff \frac{1}{4-x^2} = \frac{a(2+x)+b(2-x)}{(2-x)(2+x)}$$

$$\iff \frac{1}{4-x^2} = \frac{2a+ax+2b-bx}{4-x^2}$$

$$\iff \frac{1}{4-x^2} = \frac{2(a+b)+(a-b)x}{4-x^2}$$

On résout le système : $\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 1/4 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4-x^2} = \frac{1/4}{2-x} + \frac{1/4}{2+x}}$

b) $$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1/4}{2-x} + \frac{1/4}{2+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln(2+x) - \ln(2-x)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\big(\ln(3) - \ln(1) - \ln(2) + \ln(2)\big)$$

$$= \frac{1}{4}\ln(3)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où $\boxed{u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)}$

2. $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx$

3.a) $4U_n - U_{n+2} = 4\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}\,dx$

$= \int_0^1 4 \cdot \frac{x^n}{4-x^2} - x^2 \cdot \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$

$= \int_0^1 4-x^2 \cdot \frac{x^n}{4-x^2}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Donc $\boxed{4U_n - U_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$

b) def suite(n):
   if (-1)**n == 1:

```
    u = np.log(3)/4
    for k in range(2, n+1, 2):
        u = 4*u - (1/(n+1))
else:
    u = np.log(2/np.sqrt(3))
    for k in range(3, n+1, 2):
        u = 4*u - (1/(n+1))
return u
```

4.a) On a : $0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^2 \leq 1$

$\iff -1 \leq -x^2 \leq 0$

$\iff 3 \leq 4-x^2 \leq 4$

$\iff \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$

On intègre : $\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx$

Or, $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ d'où $\frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n+1}$

et $\frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{3(n+1)}$

D'où $\boxed{\frac{1}{4(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{3(n+1)}}$

b) La suite (U_n) est bornée donc la suite (U_n) converge.

On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$

donc d'après le théorème d'encadrement des limites :

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$

c) $\sum \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n+1}$ et $\sum \frac{1}{3(n+1)} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n+1}$

or pour n tend vers l'infini : $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (Riemann $1 < 2$)

donc $\sum \frac{1}{4(n+1)}$ et $\sum \frac{1}{3(n+1)}$ divergent aussi comme $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge

Donc la série de terme général (u_n) est divergente.

5.a) Le graphique renvoyé par le script montre que $\lim_{n\to+\infty} 3n\,u_n = 1$

Donc on peut faire la conjecture : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}}$

b) $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2}\,dx$ on pose $u'(x) = x^n$ $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$v(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $v'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

On a : $u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}\cdot 2x}{(n+1)(1-x^2)^2}\,dx$

$= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx$

D'où $\boxed{u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx}$

c) On a $\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$

d'où : $\frac{1}{4(n+1)} \leq \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{3(n+1)}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{3(n+1)} \leq \frac{-1}{3(n+1)} + \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx \leq \frac{-1}{4(n+1)}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx \leq \frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{24}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx = 0}$ par encadrement

d) On a $3n\,u_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)}\cdot\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx$

$= \frac{n}{n+1} - \frac{6n}{(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3nU_n = 1$

D'où $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

Exercice 2 :

1.a) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- f est constante donc continue sur $]-\infty; 0[$
  Les fonctions x et $e^{-x^2/2}$ sont continues sur $[0; +\infty[$ donc
  f est continue sur $[0; +\infty[$ par produit de fonctions continues sur $[0; +\infty[$
  Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0

- $f(x) = 0 \geq 0$ sur $]-\infty; 0[$
  $\forall x \geq 0$, $x \geq 0$ et $e^{-x^2/2} \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$
  Donc f est positive sur $\mathbb{R}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2} = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty}$
  $= -e^{-A^2/2} + 1$ or $\lim\limits_{A\to+\infty} -e^{-A^2/2} = 0$
  d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
  Donc f peut être considéré comme densité

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Soit U une variable centrée-réduite

$E(U) = 0$ et $V(U) = 1$

Or $V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 \iff E(U^2) = V(U) + (E(U))^2$

D'où $\boxed{E(U^2) = 1}$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$

Or, le moment d'ordre 2 d'une variable centrée réduite est égal à 1

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1 \iff \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1$

comme $x^2 e^{-x^2/2}$ est paire

D'où : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 1 \iff \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{Donc } X \text{ admet une espérance et } E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

2. • $x < 0$: $F_X(x) = P(X \leq x)$

$= \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = 0$

• $x \geq 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \int_{0}^{x} x e^{-x^2/2} dx$

$= \left[-e^{-t^2/2} \right]_0^x$

$= -e^{-x^2/2} + 1$

D'où $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

3. a) On a $Z = X^2$

• si $x < 0$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x)$

$= P(X \leq \sqrt{x})$

$= 0$

si $x \geq 0$, $F_Z(x) = P(Z \leq x)$

$= P(X \leq \sqrt{x})$

$= 1 - e^{-x/2}$

D'où $\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

la fonction de répartition de Z est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/2$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2)$

b) import numpy as np
import numpy.random as rd

```
def simulX():
    u = rd.exponential(1/2)
    x = np.sqrt(u)
return x
```

4.a) $G_n(x) = P(Y_n \leq x)$

$= P(X \leq \sqrt{n} \cdot x)$

- si $x < 0$, $G_n(x) = P(X \leq \sqrt{n} \cdot x)$

$= 0$

- si $x \geq 0$, $G_n(x) = P(X \leq \sqrt{n} \cdot x)$

$= 1 - e^{-nx^2/2}$

Donc on a : $\boxed{G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-nx^2/2} = 1$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = G$ avec $G = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Donc $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont la fonction de répartition est G.

c) $\forall \varepsilon > 0$, $P(|Y_n| > \varepsilon) = 1 - P(|Y_n| \leq \varepsilon)$

$= 1 - 1 + e^{-nx^2/2}$

$= e^{-nx^2/2}$

or, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-nx^2/2} = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0}$

5.a) $P(M_n > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = P(X_1 > x \cap \dots \cap X_n > x)$

or les (X_n) sont indépendantes.

$$P(X_1 > x \cap \cdots \cap X_n > x) = P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x)$$
$$= (P(X_1 > x))^n \quad \text{comme ils suivent la même loi}$$
$$= (1 - P(X_1 \leq x))^n$$
$$= (1 - F_X(x))^n$$
$$= (1 - 1 + e^{-x^2/2})^n = e^{-nx^2/2}$$

D'où $\boxed{P(M_n > x) = e^{-nx^2/2}}$

Or, on remarque que $P(M_n > x) = P(Y_n > x)$

donc M_n suit la même loi que la variable Y_n

b)
```
def simulM(n):
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

Exercice 3:

1. On effectue un changement de variables:

on pose $u = x - t \iff t = x - u$

$$dt = -du$$

bornes : $x \to 0$

$0 \to x$

D'où, $$1 + \int_0^x t f(x-t)\,dt = 1 - \int_x^0 (x-u) f(u)\,du$$
$$= 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\,du$$

Donc l'égalité $(*)$ est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\,du$$

2. a) $\int_0^x [(x-u)f(u)]$ est la primitive d'une fonction donc la fonction $(x-u)f(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$

D'où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\int_0^x (x-u)f(u)\,du\right)' = \int_0^x ((x-u)f(u))'\,du = \int_0^x f(u) + (x-u)f'(u)\,du$$
$$= \int_0^x f(u)\,du \qquad \text{avec } f'(u) = 0$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

D'où $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \underset{\forall x \in \mathbb{R}}{f'(x)} = \int_0^x f(u)du}$

b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\int_0^x f'(u)$ existe d'où f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(x) = \left(\int_0^x f(u)du\right)' = \int_0^x f'(u)du$

$= [f(u)]_0^x$

$= f(x) - f(0)$

Or $f(0) = 0$ d'où $\boxed{f''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}}$

c) On a $f''(x) = f(x) \iff f''(x) - f(x) = 0$

On pose $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ d'où $f''(x) - f(x) = 0$

$f'(x) = \alpha e^x - \beta e^{-x}$

$f''(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$

Donc les solutions de l'équation différentielle sont :
$f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$

d) On a $f(0) = \int_0^0 (-u)f(u)du + 1 = 1$

$f'(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$

Donc $\boxed{f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0}$

On cherche f solution de l'équation différentielle :

$\begin{cases} f''(x) = f(x) \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Les solutions de $f''(x) = f(x)$ sont $f(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$

$$f'(x) = \alpha e^{x} - \beta e^{-x}$$

On résout le système : $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \alpha = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$

Donc la seule solution au problème est :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

3. On a $\int_0^x (x-u) f(u) du = \int_0^x (x-u) \cdot \frac{(e^{u} + e^{-u})}{2} du$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x (x-u)e^{u} + (x-u)e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x x(e^{u} + e^{-u}) - u(e^{u} + e^{-u}) du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \int_0^x e^{u} + e^{-u} du - \frac{1}{2} \int_0^x u(e^{u} + e^{-u}) du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left[e^{u} - e^{-u} \right]_0^x - \frac{1}{2} \left(\left[u(e^{u} - e^{-u}) \right]_0^x - \int_0^x e^{u} - e^{-u} du \right)$$

$$= \frac{1}{2} x (e^{x} - e^{-x}) - \frac{1}{2} \left(x(e^{x} - e^{-x}) - \left[e^{u} + e^{-u} \right]_0^x \right)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{x} + e^{-x}) - 1$$

D'où $\boxed{1 + \int_0^x (x-u) f(u) du = \frac{1}{2} (e^{x} + e^{-x})}$

Donc la fonction trouvée en 2d est la seule solution du problème posé

4. Pour $f(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$ on a toujours $f(x) = \int_0^x (x-u) f(u) du$

et on a $f'(x) = \int_0^x f(u) du$ et $f''(x) = f(x)$

Or les solutions sont toujours $f(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$

mais $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

On résout le système : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Donc la seule solution de ce problème est :
$$\boxed{f(x) = 0}$$

Problème :

1. a) Avant le premier tirage, les urnes A et B contiennent une boule blanche et une boule noire chacune

D'où $\boxed{a_0 = 0, \ b_0 = 1 \ \text{et} \ c_0 = 0}$

b) Loi de X_1 : $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (on tire la blanche dans A et la noire dans B)

~~$P(X_1 = 1) =$~~

$(X_1 = 1)$ = on tire la boule blanche dans A et dans B ou on tire la boule noire dans A et dans B.

$P(X_1 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$(X_1 = 2)$ = on tire la boule noire dans A et la boule blanche dans B

$P(X = 2) = \frac{1}{4}$

D'où, $\boxed{a_1 = \frac{1}{4}, \ b_1 = \frac{1}{2} \ \text{et} \ c_1 = \frac{1}{4}}$

c) Les urnes A et B contiennent une boule blanche et une boule noire chacune, ~~on~~ ~~inverse~~ et à chaque épreuve, on inverse d'urne les boules tirées.

L'urne A ne contient donc toujours que deux boules : soit 2 noires $(X_n = 0)$, soit une noire et une blanche $(X_n = 1)$, soit deux blanches $(X_n = 2)$

Donc $\forall n \geq 1$, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'évènement.

d) $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'évènements

d'où $P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1$

Donc $\boxed{a_n + b_n + c_n = 1}$

2.a) Pour $X_n = 0$, en $(n+1)$, il ne peut pas y avoir 0 boules blanches ni 2 en A car on va forcément tirer une boule noire en A et une boule blanche en B d'où :

$$\boxed{P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=0,\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1 \text{ et } P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=0}$$

Pour $X_n = 2$, même raisonnement que pour $X_n = 0$

$$\boxed{P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0 \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1 \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0}$$

Pour $X_n = 1$, en $(n+1)$, ~~la boule~~ l'urne A contient toujours une boule blanche si on a tiré les mêmes boules en A et B et elle contient soit 0 ou 2 boules blanches si on a tiré des boules différentes

$$\boxed{P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{4},\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2} \text{ et } P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{4}}$$

Ainsi, le graphe représente bien la chaine de Markov

b)
$$\boxed{M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}}$$

On a $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ donc la somme des éléments de chaque ligne est bien égale à 1

c) D'après la formule des probabilités totales :

- $P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0) \cdot P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) + P(X_n=1) \cdot P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) + P(X_n=2) \cdot P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)$
$= \frac{1}{4} P(X_n=1)$

- $P(X_{n+1}=1) = P(X_n=0) \cdot P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) + P(X_n=1) \cdot P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) + P(X_n=2) \cdot P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$
$= P(X_n=0) + \frac{1}{2} P(X_n=1) + P(X_n=2)$

- $P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4} P(X_n=1)$

D'où : $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n,\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n}$

3. Pour $n=0$; $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = 0 + \frac{1}{2} \cancel{\times} + 0$ et $c_1 = \frac{1}{4}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Or, $a_1 = \frac{1}{4}$ $b_1 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = \frac{1}{4}$ d'après la question 1.b)

Donc les relations de 2.c) restent valables pour $n=0$

4.a) $E(X_{n+1}) = 0 \cdot P(X_{n+1}=0) + 1 \cdot P(X_{n+1}=1) + 2 \cdot P(X_{n+1}=2)$

d'où $\boxed{E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}}$

b) On a $E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$

or, $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$

D'où $E(X_{n+1}) = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + 2 \cdot \frac{1}{4} b_n$

$= a_n + b_n + c_n$

$= 1$ d'après 1.d)

Donc $\boxed{E(X_{n+1}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

c) On a $b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$

or, 1 ne dépend pas de n donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1}$

5.a) On a $U_n V = (2a_n - b_n + 2c_n)$

d'où $U_{n+1} V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1}$

$= \frac{1}{2} b_n - a_n - \frac{1}{2} b_n - c_n + \frac{1}{2} b_n$

$= \frac{1}{2} b_n - a_n - c_n$

$= -\frac{1}{2} (U_n V)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc la suite $(U_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-1/2$

b) (U_nV) est une suite géométrique de raison $-1/2$

d'où $U_nV = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \cdot U_0V = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

Donc $\boxed{2a_n - b_n + 2c_n = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n}$

6. On a $2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = -\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}$ or $a_{n+1} = c_{n+1}$

d'où $b_{n+1} = 4a_{n+1} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \iff b_{n+1} = b_n + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}$

Donc $\boxed{b_n = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n}$

On a $a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n = \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

Donc $\boxed{a_n = c_n = \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)}$

Loi de X_n : $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X_n = 0) = \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$P(X_n = 1) = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

$P(X_n = 2) = \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)$

7. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{4}$ comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$

donc X_n converge en loi vers X dont la loi est

$P(X=0) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = 1$, $P(X=2) = \frac{1}{4}$

8.a) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix} = M^3$$

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 \end{pmatrix} = 2M^3$$

donc $\boxed{2M^3 = M^2 + M}$

b) ~~$2X^3 - M^2 X^2 - M = 0$~~

$2X^3 - X^2 - X = 0$ est un polynôme annulateur de M

donc ses valeur propres sont les solutions.

$X(2X^2 - X - 1) = 0 \iff X = 0$ ou $X = 1$ ou $X = \frac{-1}{2}$

$$Sp(M) = \left\{ \frac{-1}{2} ; 0 ; 1 \right\}$$

d) $MP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad PD = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$MP = PD \iff M = PDP^{-1}$

donc M est diagonalisable

e) D'après