Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 21	Session : 2024

Épreuve de : Mathematiques T.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) a) On a $h(t) = e^{-\sqrt{t}}$ de type e^{u}

donc $h'(t) = u'e^{u}$ ainsi $\boxed{h'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}}$

b) $\int_0^y g(t)\,dt = \int_0^y \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt$ on déduit une primitive $-e^{-\sqrt{t}}$ en deduction de 1.a.

ainsi $\int_0^y g(t)\,dt = \left[-e^{-\sqrt{t}}\right]_0^y = -e^{-\sqrt{y}} + 1$

$$\boxed{\forall y \geq 0 ; \int_0^y g(t)\,dt = -e^{-\sqrt{y}} + 1}$$

2) Continuité sur $\mathbb{R}$:

-> sur $]0;+\infty[$ f est constante donc f est continue

-> Sur $]-\infty;0[$ f est la fonction exponentielle donc f est continue

=> f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

Positivité sur $\mathbb{R}$:

-> sur $]0;+\infty]$, f est nulle donc f est positive

-> sur $[-\infty;0[$, f est la fonction e donc f est positive

=> f est positive sur $\mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

→ Sur $]0;+\infty[$, f est nulle donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 0.

→ Sur $]-\infty;0]$, f vaut $\exp()$; on pose $M \cdot 0$

$$\int_M^0 f(t)\,dt = \left[e^t\right]_M^0 = e^0 - e^M = 1 - e^M$$

or $\lim\limits_{M \to -\infty} 1 - e^M = 1$

Ainsi $\lim\limits_{M \to -\infty} \int_M^0 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = 1$

⇒ D'après la relation de Chasles, $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1}$.

<u>Par conséquent f peut être considérée comme une densité.</u>

3/a) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Si $x \geq 0$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

or d'après la question 2 : $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 1$ et $\int_0^x f(t)\,dt = 0$

D'après la relation de Chasles : $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ainsi $\boxed{\text{si } x \geq 0,\ F_X(x) = 1}$

b) Si $x < 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} e^{t}\,dt \qquad \text{on pose } M < x$$

ainsi $\displaystyle\int_{M}^{x} f(t)\,dt = \left[e^{t}\right]_{M}^{x} = e^{x} - e^{M}$

or $\displaystyle\lim_{M \to -\infty} e^{x} - e^{M} = e^{x}$

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{M \to -\infty} \int_{M}^{x} f(t)\,dt = e^{x}$

PAR Conséquent : $\boxed{\text{si } x < 0 \quad F_X(x) = e^{x}}$

4) a) On a $G(x) = P(-X \leq x)$

donc $G(x) = P(X \geq -x)$

or $P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$
et $P(X \leq -x) = F_X(-x)$

Ainsi $\boxed{G(x) = 1 - F_X(-x)}$

b) D'après 3a et 3b : $F_X(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $1 - F_X(-x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = G(x)$

On remarque que $G(x)$ est la fonction de répartition d'une <u>loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$</u>

c) Comme $G(x) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$.

5)a) $E(Y) = E(X^2)$

or d'après 4c $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$

d'après la formule de variance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
On a $E(X^2) = 2$

Ainsi $\boxed{E(Y) = 2.}$

5)b) $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ or $Y = X^2$

donc $F_Y(y) = P(X^2 \leq y)$

donc $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

ainsi $F_Y(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$

or $F(\sqrt{y}) = 1$ car $\sqrt{y} \geq 0$

donc $F_Y(y) = 1 - F(-\sqrt{y})$ or $1 - F(-x) = G(x)$

donc $F_Y(y) = G(\sqrt{y})$

Ainsi $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) Y est une variable aléatoire à densité car $F_Y(y) = G(\sqrt{y})$
et G est une variable aléatoire à densité.

On note $f(y)$ une densité : $\boxed{f(y) = \begin{cases} e^{-\sqrt{y}} \times \frac{1}{-2\sqrt{y}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 21	Session : 2024

Épreuve de : Mathematiques T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2 :

1)a) On a $A^2 = A \times A$

donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

Ainsi $A^2 - 8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 8 & 24 & 8 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I$

Par conséquent $\boxed{\alpha = -12}$

b) On a d'après 1a) $A^2 - 8A = -12I$
donc $(A^2 - 8A) \times \frac{1}{-12} = I$ donc $A(A - 8I) \times \frac{1}{-12} = I$

On pose $B = (A - 8I)\frac{1}{-12}$

On a $AB = BA = I$ donc A est inversible
Et $A^{-1} = B = \frac{1}{-12}A - \frac{2}{3}I$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) On a $A^2 - 8A = -12I$ d'après 1a

donc $A^2 - 8A + 12I = 0$

On a déduit un polynôme annulateur $R(x) = x^2 - 8x + 12$

car $R(A) = 0$.

Ainsi les valeurs propres possibles de A sont les racines de $R(x)$.

Racine de $R(x)$:

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 12$
$\Delta = 64 - 48$
$\Delta = 16 > 0$ donc $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ainsi $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$

Par conséquent $\boxed{Sp(A) = \{2;6\}}$

2a) $AX = 6X$

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + 2 \\ x + 3y + 2 \\ 2x + 2y + 8 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $S \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 = 6x \\ x + 3y + 2 = 6y \\ 2x + 2y + 8 = 12 \end{cases}$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + 2 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2$

~~$L_3 \leftarrow 2L_1 + 3L_3$~~

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + 2 = 0 \\ -9y + 8 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

or $-9y + 8 = 0$ ssi $y = \frac{8}{9}$

ainsi $3x + y + 2 = 3x + \frac{8}{9} + 2$

donc $3x + \frac{8}{9} + 2 = 0$ ssi $x = \frac{-26}{27}$

$$\boxed{\text{Ainsi } AX = 6X \text{ ssi } x = \frac{-26}{27} \text{ et } y = \frac{8}{9}}$$

b) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{AU = 2U}$

et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{AV = 2V}$

c) On a $AU = 2U$ et $AV = 2V$ donc 2 est valeur propre de A

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ tout deux non nulle.

3) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$

On a Ainsi $PQ = 4I$ donc $P \times \frac{1}{4} Q = I$

Ainsi $P \frac{1}{4} Q = \frac{1}{4} Q P = I$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4} Q$.

b) $AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ainsi } AP = PD}$

Par conséquent ; On a $AP = PD$ et D comportant les racines de A dans sa diagonale ; P est inversible donc :

$P^{-1}AP = P^{-1}PD$

donc $P^{-1}AP = ID$

donc $P^{-1}AP = D$ Ainsi A est diagonalisable.

c) Notons $\mathcal{E}(n)$ l'expression : $A^n = PD^nP^{-1}$

Prouvons sa véracité pour tout n de $\mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation : Pour $n=0$

On a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1}$

$= PP^{-1}$

$= I$

donc $A^0 = PD^0P^{-1}$

Ainsi $\mathcal{E}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{E}(n)$ vraie pour un rang n fixé. Prouvons alors que $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour le rang suivant $n+1$.

On a $A^n = PD^nP^{-1}$

donc $A^nA = PD^nP^{-1}A$ or $A = PDP^{-1}$ d'après 3b.

ainsi $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$

$= PD^nDP^{-1}$

$= PD^{n+1}P^{-1}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 21	Session : 2024

Épreuve de : Mathematiques T.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

donc $\mathcal{E}(n)$ est héréditaire

Conclusion : $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour $n=0$
$\mathcal{E}(n)$ est héréditaire
donc $\forall n \in \mathbb{N}$, <u>$\mathcal{E}(n)$ est vraie : $A^n = PD^nP^{-1}$.</u>

d) $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^n & 2^n & 2^n \\ 6^n & -2^n & 0 \\ 2\times 6^n & 0 & -2^n \end{pmatrix}$

↳ car D est diagonale.

3ème colonne de
$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 6^n & 2^n & 2^n \\ 6^n & -2^n & 0 \\ 2\times 6^n & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6^n \times 1/4) + (2^n \times 1/4) + 2^n \times (1/2) \\ (6^n \times 1/4) + (-2^n \times 1/4) \\ (2\times 6^n \times \frac{1}{4}) + (-2^n \times (-1/2)) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/4 \times 6^n + \frac{1}{4} 2^n + \frac{1}{2} 2^n \\ \frac{1}{4} 6^n + \frac{1}{4} \times (-2^n) \\ \frac{1}{2} \times 6^n + \frac{1}{2} \times 2^n \end{pmatrix}$

4/a) $X_1 = \begin{pmatrix} \text{probabilité de l'évènement } C_1 : \text{"Lire un livre de chevaux le jour n"} \\ \text{''} \quad P_1 : \text{''} \quad \text{princesse ''} \\ \text{''} \quad D_1 : \text{''} \quad \text{dinausore ''} \end{pmatrix}$

or d'après l'énoncé : $P(C_1) = c_1 = 0$
$P(P_1) = p_1 = 0$
$P(D_1) = d_1 = 1$

car il lit un livre le jour 1

donc $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) $\{C_n ; P_n ; D_n\}$ forment un système complet d'évènement :

D'après la formule des probabilités totales :

$X_{n+1} = P(C_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap P_{n+1}) + P(C_n \cap D_{n+1}) + P(P_n \cap C_{n+1}) + P(P_n \cap P_{n+1})$
$+ P(P_n \cap D_{n+1}) + P(D_n \cap D_{n+1}) + P(D_n \cap C_{n+1}) + P(D_n \cap P_{n+1})$

or $P(C_n \cap C_{n+1}) = P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} P(C_n)$

et : $P(C_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{6} P(C_n)$ $\quad P(C_n \cap D_{n+1}) = \frac{1}{3} P(C_n)$

et $P(P_n \cap C_{n+1}) = \frac{1}{6} P(P_n)$ $\quad P(P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P(P_n)$

$P(P_n \cap D_{n+1}) = \frac{1}{3} P(P_n)$

et $P(D_n \cap D_{n+1}) = \frac{2}{3} P(D_n)$ $\quad P(D_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{6} P(D_n)$

$P(D_n \cap C_{n+1}) = \frac{1}{6} P(D_n)$

Ainsi $X_{n+1} = \frac{1}{2} P(C_n) + \frac{1}{6} (P(C_n) + \frac{1}{3} P(C_n) + \frac{1}{2} P(P_n) + \frac{1}{6} P(P_n) + \frac{1}{3} P(P_n)$

$+ \frac{2}{3} P(D_n) + \frac{1}{6} P(D_n) + \frac{1}{6} P(D_n)$

$X_{n+1} = \frac{1}{2} c_n + \frac{1}{6} c_n + \frac{1}{3} c_n + \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} D_n + \frac{1}{6} d_n + \frac{1}{6} d_n$

$X_{n+1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3c_n + p_n + d_n \\ c_n + 3p_n + d_n \\ 2c_n + 2p_n + 4d_n \end{pmatrix}$

or $\frac{1}{6} AX_n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(3c_n + p_n + d_n) \\ \frac{1}{6}(c_n + 3p_n + d_n) \\ \frac{1}{6}(2c_n + 2p_n + 4d_n) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ainsi } X_{n+1} = \frac{1}{6} AX_n}$

c) Notons $R(n)$ l'expression $X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$

Prouvons par récurrence ~~sa~~ véracité pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Initialisation pour $n=1$

On a : $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{6^{1-1}} A^{1-1} X_1 = X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$R(1)$ est vraie.

Hérédité : on suppose $R(n)$ vraie pour un rang n fixe, prouvons sa véracité pour le rang suivant $n+1$.

On a $\frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1 = X_n$ or $X_{n+1} = \frac{1}{6} AX_n$

donc $\frac{1}{6} A \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1 = \frac{1}{6} A X_n$

donc $\frac{1}{6^n} A^n X_1 = X_{n+1}$

$R(n)$ est héréditaire

Conclusion : $R(n)$ est vraie pour $n=1$
$R(n)$ est héréditaire
donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $R(n)$ est vraie.

d) On a $\frac{1}{6^{n-1}} \begin{pmatrix} 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 \\ 2(3^{n-1}+1) \end{pmatrix} 2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6^{n-1}} \times 2^{n-3} \times 2(3^{n-1}+1) \right)$

$c_n =$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 21	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3 :

1/a) Si $n = N$ il y a $\frac{1}{2}N$ de pair

donc si $n = 2N$ alors il y a N pair.

b) • $X \hookrightarrow U(⟦1;n⟧)$ car dans l'urne, il y a n boules numerotés de 1 à n

et X compte le nombre noté sur la boule.

Ainsi $P(X=k) = \frac{1}{n}$ $\quad E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

• On considère l'epreuve de Bernoulli "piocher une boule" de succès S = "pair". La probabilité de S est $p = p(S) = \frac{1}{2}$

$Y \hookrightarrow B(1/2)$

Ainsi $P(Y=0) = \frac{1}{2}$ et $P(Y=1) = \frac{1}{2}$

$E(Y) = \frac{1}{2}$ et $V(Y) = \frac{1}{4}$.

2)
```
Return n
S = X+Y
Print(S)
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~3) $P(X=1) \times P(Y=1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}$~~

~~$P(X=1 \cap Y=1) =$~~

X compte le nombre piocher, puis une remise dans l'urne.
Y compte la parité oui non

Étant donné qu'il y a une remise dans l'urne X et Y sont indépendant.

4) $(Y+X)(\Omega) = [\![1; 2N+1]\!]$

car la boule peut avoir jusqu'au numéro 2N et si l'on ajoute la parité avec Y le maximum sera 2N+1
On ~~x~~ peut avoir toute les issus inférieur a 2N+1.

5)a) $P((X+Y)=1)$ = probabilité que X=1 et que Y=0

On la proba que $[X=1]$ est $\frac{1}{n}$ car $X \hookrightarrow U([\![1;n]\!])$ et la proba que $[Y=0]$ est $\frac{1}{2}$ donc $P(X+Y=1) = P(X=1) \times P(Y=1)$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}.$$

$P(X+Y=n+1)$ = probabilité que Y=1 et Que X=n

on probabilité que $[Y=1]$ est $\frac{1}{2}$ et $[X=n] = \frac{1}{n}$

donc $P(X+Y=n+1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n}$.

b)

$\{X;Y\}$ forment un système complet d'évènement, d'après la formule des probabilité totale :

$$P(X+Y=k) = P(X=k \cap Y=0) + P(X=k-2 \cap Y=1)$$

$$= \frac{1}{2} P(X=k) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}.$$

c) $\sum_{k=1}^{n+1} P(X+k=k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n} = 1$

6/a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ car évènement indépendant

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}$$

la moyenne des résultat au jeu obtenu sera $\frac{n+2}{2}$.

b) Le résultat obtenu à l'issu du $i^{ème}$ jeu pour ~~$\not{i}$~~ $n=1000$ serait de $4,939$.

Seconde Partie :

1) a) $P_{(X \text{ est paire})}(Y=1)$ signifie que le second tirage est impair sachant que le 1^{er} est pair.

donc $\frac{N}{2N}$ signifie que l'on a le total de pair sur ~~impair~~ total de bille.

On at tir précédent, il y a 1 boule paire piochée non remise donc $P_{(X \text{ est paire})}(Y=1) = \frac{N}{2N-1}$.

b) $\{(X \text{ est paire}); (X \text{ est impaire})\}$ forment un s.c.e

D'après la formule des probas totales:

$$P(Y=1) = P(X\text{ est p})P_{(X\text{ est paire})}(Y=1) + P_{(X\text{ est impaire})}(Y=1) \times P(X\text{ est impaire})$$

$$= \frac{N}{2N} \times \frac{N}{2N-1} + \frac{N}{2N} \times \frac{N}{2N-1}$$

$$= \frac{1}{4N-2} + \frac{1}{4N-2}$$

$$= \frac{1}{2N-2}$$

c) Loi de Y:

x	0	1
$P(Y=k)$	$1-\frac{1}{2N-2}$	$\frac{1}{2N-2}$

2a) $P((X=1)\cap(Y=1)) = \frac{1}{2N} \times \frac{1}{2N-2} = \frac{1}{4N^2-4N} = \frac{1}{4N(N-1)}$

b) Les évènements ne sont pas indépendant car $P(X=1 \wedge Y=1) = P(X=1) \times P(Y=1)$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 21	Session : 2024

Épreuve de : Mathematiques T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 4:

1)a) On a $2v_3 - (3)v_2 + v_1 = 0$
donc $2v_3 - 3 + 1 = 0$
donc $v_3 = 1$

On a $3v_4 - 5v_3 + 2v_2 = 0$
donc $3v_4 - 5 + 2 = 0$
donc $v_4 = 1$

b) Notons $P(n)$ l'expression: "$v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$"
Prouvons sa véracité pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Initialisation: pour $n = 1$

On a $v_1 = 1$ et $v_{1+1} = v_2 = 1$

donc $P(n)$ est vraie pour $n = 1$

Hérédité : On suppose vraie l'expression pour un rang n fixé prouvons sa véracité pour le rang suivant $n+1$.

On a $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$
or $v_{n+2} = 1$ et $v_{n+2} = \frac{(2n+1)v_{n+1} - nv_n}{n+1}$

$= \frac{n+1}{n+1} = 1$

donc $P(n)$ est héréditaire

Conclusion: $P(n)$ est vraie pour $n=1$

$P(n)$ est héréditaire

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ "$v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$"

c) i) $\cancel{S_{2N} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k}}$

~~donc~~ $\cancel{S_{2N} - S_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}}$

$$\cancel{= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2N}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}\right)}$$

= On a $S_{2N} - S_N$ or $S_{2N} \geq \frac{1}{2} + S_N$ ainsi $S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}$

ii) $S_{N+1} - S_N = -S_1 + S_{n+1}$

or $-S_1 < S_{n+1}$ donc S_n est strictement croissante.

S_n est croissante, S_n n'est pas majoré donc S_n diverge.

$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

3) u[k+1] = ((2*k+1)*Uk - k * Uk-1 + np.log(1+(1/k)))/(k+1)

4)a) $w_1 = \frac{e^{1(U_2 - U_1)}}{1} = \frac{e^0}{1} = 1.$

b) $w_{n+1} - w_n = \frac{e^{n+1(U_{n+2} - U_{n+1})}}{n+1} - \frac{e^{n(U_{n+1} - U_n)}}{n}$

$= \frac{n e^{n+1(U_{n+2} - U_{n+1})} - e^{n(U_{n+1} - U_n)} \times n+1}{n(n+1)}$

$=$

c) $U_{n+1} - U_n =$

d) $U_N = 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}$

5) a) $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{t}$ de type $\dfrac{u}{v}$ donc $f'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}\times t-\ln(t)\times 1}{t^2}$

$$=\frac{-\ln(t)}{t^2}$$

or $t^2>0$ sur $[3;+\infty[$ et sur $[3;+\infty[$; $\ln(t)>0$ donc $-\ln(t)<0$

Ainsi :

t	3 $+\infty$
$f'(t)$	$-$
variation de f	↘

b) On a $t\in[k;k+1]$.

donc $k+1\geq t\geq k$ or f est décroissante
donc $f(k+1)\leq f(t)\leq f(k)$

f est strictement décroissante donc par positivité de l'intégrale

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq f(k)$$

c) Par sommation : $\displaystyle\sum_{k=3}^{N-1}f(k+1)\leq\int_3^{N-1+1}f(t)\,dt\leq\sum_{k=3}^{N-1}f(k)$

donc $\displaystyle\sum_{k=4}^{N}f(k)\leq\int_3^{N}f(t)\,dt\leq\sum_{k=3}^{N-1}f(k)$.

d)

6) a) $f(t)=\ln(t)^2$ de type $u\times v$ donc $f'(t)=\frac{1}{t}\times\ln(t)+\ln(t)\times\frac{1}{t}$

$$=\frac{2\ln(t)}{t}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 21	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi $f'(t) = \frac{2\ln(t)}{t}$

b) $\int_3^N f(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t)^2\right]_3^N$ en déduction de 6a).

$\int_3^N f(t)\,dt = \frac{1}{2}\ln(N)^2 - \frac{1}{2}\ln(3)^2$

7) On a $1 + \frac{\ln(2)}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln(N)^2 - \frac{1}{2}\ln(3)^2\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln(2) + \ln(N)^2 - \ln(3)^2\right)$

8) a) $\int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt = \left[\ln(t) \times \frac{1}{\ln(t)^2}\right]_2^A - \int_2^A \ln(t) \times \left(\frac{-2}{t\ln(t)^3}\right) dt$

$= \frac{1}{\ln(A)} - \frac{1}{\ln(2)} + 2\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^2}\,dt$

On pose $I = \int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt$

On a donc $I = \frac{1}{\ln(A)} - \frac{1}{\ln(2)} + 2I$

donc $I - 2I = \frac{1}{\ln(A)} - \frac{1}{\ln(2)}$

donc $I = \frac{-1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)}$