ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

FALVEY

ARTHUR

Note de délibération : 17.83 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom FALVEY

Prénom (s) ARTHUR

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 09

Numéro de table 19

Exercice 1

Partie I

1a)

Comme $X \hookrightarrow G(p)$, $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$

Ainsi: $R_X(k) = \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$

1b)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\left[\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}}\right.$ (d'après 1a)

$\left. = 1-p \right]$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.83 / 20

2a) Soit $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

~~$(X=k) = (X>k-1) \cap (X>k)$~~

~~$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}((X>k-1) \cap (X>k))$~~

~~$\mathbb{P}(X=k)$~~

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)$

~~Donc $\mathbb{P}(X>k) = \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X=k)$~~

Donc em particulier : $\mathbb{P}(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$

2b)

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Donc X et Y suivent la même loi si et seulement si :

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) \iff R_X(k-1) - R_X(k) = R_Y(k-1) - R_Y(k)$

$\iff R_X(k) = R_Y(k)$

Partie II

3a)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{m}{(m+1)!} = \frac{a}{m!} - \frac{b}{(m+1)!} \iff$$

$$\iff \frac{m}{(m+1)!} = \frac{a(m+1)-b}{(m+1)!}$$

$$\iff \frac{m}{(m+1)!} = \frac{am+(a-b)}{(m+1)!}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ a-b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \underline{a = 1} \\ \underline{b = 1} \end{cases}$$

3b)

La série $\sum_{m\geq 1} \frac{m}{(m+1)!}$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles convergent.

Or $\sum_{m\geq 1} \frac{m}{(m+1)!} = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!}$ (d'après 3a)

Or $\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(m+1)!} = 0$ et $\frac{1}{1!} = 1$

Donc la série converge et par télescopage : $\left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{(m+1)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!}\right.$

$$\left. = 1 \right]$$

4a)

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$

Alors $X+1(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X+1 = n) = \mathbb{P}(X=n-1) = \frac{n-1}{n!}$

$X+1$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{n \geq 2} n \,\mathbb{P}(X+1=n)$ converge

Or $\sum_{n\geq 2} n \,\mathbb{P}(X=n-1) = \sum_{n \geq 2} n \times \frac{n-1}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1^n}{n!}$

Donc la série converge en tant que série exponentielle et :

$$\left[E[X+1] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n!} = e^1 = e \right]$$

Ainsi par linéarité de l'espérance :

$E[X+1] = E[X] + 1 \iff E[X] = E[X+1] - 1$

$$\iff \left[E[X] = e - 1 \right]$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom FALVEY

Prénom (s) ARTHUR

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 09

Numéro de table 19

4b)

$(X-1)(X+1) = X^2 - 1$

Donc vérifions si X^2 admet une espérance

Si X^2 admet une espérance (sous reserve de convergence), $E[X^2] = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 \mathbb{P}(X=m)$ d'après le théorème du transfert.

Or $\sum_{m \geq 1} m^2 \mathbb{P}(X=m) = \sum_{m \geq 1} \frac{m^3}{(m+1)!} = \sum_{m \geq 1} \frac{m^2}{(m-1)!(m+1)}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.83 / 20

Partie III

5)

$R_X(k)$ renvoie à la probabilité que l'appareil fonctionne strictement plus que k années.

Or en k-1, la probabilité qu'elle tombe en panne en k est de $1-\alpha_k$ (si elle fonctionne encore en k-1).

En ~~passan~~ mettant A_i = " La machine ~~tombe en panne~~ fonctionne à l'année i " on a :

$(X > k) = A \cap (X > k-1)$

$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(A \cap (X > k-1))$

$R_X(k) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(X > k-1)$ (par indépendance)

$R_X(k) = (1-\alpha_k) R_X(k-1)$

6)

$(X > k) = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)$ (il faut qu'elle fonctionne au moins jusqu'à la $k^{\text{ième}}$ année)

Donc $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_k)$

Donc $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$ (~~tomber en panne~~ fonctionner en i-1 n'influence pas ~~une~~ panne en i

Donc par indépendance)

Donc $\mathbb{P}(X > k) = \prod_{k=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$

Donc $R_X(k) = \prod_{k=1}^{k} (1-\alpha_i)$ (Car $\mathbb{P}(A_i) = 1-\alpha_i$)

7)

D'après 2a), $\mathbb{P}(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$

Donc $\mathbb{P}(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)$ (d'après 6)

Donc $\mathbb{P}(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)\left(1-(1-\alpha_k)\right)$

8a)

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-p)\left(1-(1-p)\right) \quad (\text{car } \forall k\in\mathbb{N}^*\ \alpha_k = p)$$

$$= (1-p)^{k-1}p \quad (1-p \text{ ne dépend pas de } i)$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

8b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X=k) = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{i+1}\right)\left(1-\left(1-\frac{k}{k+1}\right)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i+1}\right)\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!} \quad \left(\text{car } \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\frac{1}{k} = \frac{1}{k!}\right)$$

Partie IV

9a) SELECT COUNT (*) FROM ordinateur

~~SELECT~~
~~FROM ordinateur~~
~~WHERE~~

9b) SELECT COUNT (*) FROM ordinateur
WHERE ammee_pamme = 1

9c)

10) UPDATE ordinateur

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom FALVEY

Prénom (s) ARTHUR

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 19

Exercice 2

Partie I

1a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2at-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-2at-t^2}t^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{t^2}{e^{2at+t^2}} = 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

Donc $e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

1b)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$.

Donc par critère de négligeabilité, comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, alors Ja converge.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.83 / 20

2)

La fonction $x \mapsto e^{2a(x-t)-t^2}$ est definie sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}$.

3a)

$$\left[\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0\right]$$

3b) $t \in [x, +\infty[$

Donc $x \leq t$

Donc $2ax \leq 2at$ (car $a \geqslant 0$)

Donc $2ax - 2at \leq 0$

Donc $e^{2ax-2at} \leq e^0$ (par croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$)

Donc $e^{2a(x-t)} \leq 1$

Donc $e^{2a(x-t)} e^{-t^2} \leq e^{-t^2}$ (car $e^{-t^2} > 0$ comme fonction exponentielle)

Donc $e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2}$

Ainsi par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Donc $$I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \quad (*)$$

3c)

Par passage à la limite dans la relation $(*)$

$$\lim_{x\to+\infty} I_a(x) \leq \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Donc $$\lim_{x\to+\infty} I_a(x) \leq 0 \quad \text{(d'après 3a)}$$

~~Or l'intégrale $I_a(x)$ est croissante (bornes dans l'ordre croissant)~~
~~et majorée par 0~~

Or l'intégrale est positive donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_a(x) \geq 0$

Ainsi par le théorème d'encadrement des limites

$$\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$$

Partie II

4) $y' = 2ay$ (2)

Donc l'ensemble des solutions de (2) sont :

$$\{ x \mapsto y(x) = e^{2ax} \setminus a \in \mathbb{R} \}$$

5a)

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $F_a(x)$ est l'unique primitive de $F_a'(x)$ qui s'annule en 0.

(En particulier, comme $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, celle-ci admet des primitives sur $\mathbb{R}$ avec $x \in \mathbb{R}$.)

Donc $F_a(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\left[F_a'(x) = e^{-2ax-x^2} \right]$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom FALVEY

Prénom (s) ARTHUR

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 09

Numéro de table 19

5b)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right) = e^{2ax}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt\right) \quad \text{(d'après l'énoncé)}$$

$$= e^{2ax}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt \quad \text{(par la relation de Chasles)}$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{-2at+2ax-t^2}dt$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}dt$$

$$= I_a(x)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.83 / 20

5c)

La fonction $x \mapsto e^{2ax}$ est dérivable (sur $\mathbb{R}$) comme fonction exponentielle composée
La fonction $x \mapsto J_a - F_a(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $F_a(x)$ est dérivable d'après 5 a)
Donc I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ainsi: $I_a'(x) = (e^{2ax})'(J_a - F_a(x)) + e^{2ax}(J_a - F_a(x))'$

$= 2a\,e^{2ax}(J_a - F_a(x)) + e^{2ax}(- (e^{-2ax-x^2}))$ (Ja est une constante)

$= 2a\,e^{2ax}(J_a - F_a(x)) + - e^{-x^2}$

$= e^{2ax}(2a(J_a - F_a(x)) +) - e^{-x^2}$

$= e^{2ax}(2a J_a - 2a F_a(x) +) - e^{-x^2}$

$=$

$= 2a(e^{2ax}(J_a - F_a(x))) - e^{-x^2}$

$= 2a\,I_a - e^{-x^2}$

Ainsi I_a et bien solution de (1) car $I_a'(x) = 2a\, I_a(x) - e^{-x^2}$

6)

On a trouvé une solution de l'équation homogène (2) avec $y(x) = e^{2ax}$.
De plus on a trouvé une solution particulière de l'équation (1) avec $y(x) = I_a(x)$

Ainsi l'ensemble des solutions $\overset{(1)}{}$ sont de la forme :

$$\{ x \mapsto y(x) = I_a(x) + e^{2ax} \setminus a \in \mathbb{R} \}$$

7)

Si $a < 0$: $\left[\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) + e^{2ax} \right.$

$$= 0 + 0 \quad \left(\text{car } \overset{\forall a \in \mathbb{R}}{\lim\limits_{x \to +\infty}} I_a(x) = 0 \text{ et } a < 0 \right)$$

$$\left. = 0 \right]$$

Si $a = 0$: $\left[\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) + e^{2 \times 0 \times x} \right.$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) + 1$$

$$\left. = 1 \right] \quad \left(\text{car } \overset{\forall a \in \mathbb{R}}{\lim\limits_{x \to +\infty}} I_a(x) = 0 \right)$$

Si $a>0$: $\left[\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} I_a(x) + e^{2ax}\right.$

$= 0 + \infty \quad \left(\text{car } \overset{\forall a \in \mathbb{R}}{\lim_{x\to+\infty}} I_a(x) = 0 \text{ et } a>0\right)$

$\left.= +\infty\right]$

Donc l'ensemble des solutions y de (1) telles que $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ sont :

$\{ x \mapsto y(x) = I_a(x) + e^{2ax} \setminus a<0 \}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom F A L V E Y

Prénom (s) A R T H U R

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 09

Numéro de table 19

Partie II

8a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-a, \frac{1}{2}\right)$

Donc $\left[f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} 2\pi}} e^{-\frac{(x-(-a))^2}{2 \times \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-a)^2} \right]$

8b)

9a)

$\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$ (variable discrète)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom F A L V E Y

Prénom (s) A R T H U R

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 19

Exercice 3

Partie I

1a)

M est une matrice symétrique donc elle est diagonalisable

1b)

$$(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)$$

Donc $(M+I)^2 - 3(M+I) = 0$

Donc $M^2 + 2M + I - 3M - 3I = 0$

Donc $M^2 - M - 2I = 0$

Donc le polynôme $X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de M.

1c)

Or le discriminant (Δ) du polynôme : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

Donc l'équation admet 2 solutions : $\left[X_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \right]$ $\left[X_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \right]$

Ainsi : $sp(M) \subset \{-1, 2\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$E_{-1}(M) = \{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus MX = -X \}$.

Or $MX = -X \iff (M + Id)X = 0$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$

$\iff x = -y - z$

Donc $E_{-1}(M) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Or les 2 vecteurs sont non-nuls donc $-1 \in sp(M)$ et de plus les 2 vecteurs forment une famille génératrice et forment une famille libre (car ils sont non-colinéaires) c'est donc une base.

Et $\dim(E_1(M)) = 2$

$E_2(M) = \{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus MX = 2X \}$

Or $MX = 2X \iff (M - 2I_3)X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ x = y = z$$

Donc $E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc $2 \in sp(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une famille libre de $E_2(M)$, c'est aussi une famille génératrice. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_2(M)$.

Et $\dim(E_2(M)) = 1$

1d) $0 \notin sp(M)$ donc M est inversible

Inversons M à l'aide de pivot de Gauss :

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right) L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right) L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3$$

$$\left(\begin{matrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right) L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3$$

$$\left(\begin{matrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{matrix}\right) \begin{matrix}L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1\\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2\\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3\end{matrix}$$

Ainsi: $$\left[P^{-1} = \begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & -2/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right]$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom F A L V E Y

Prénom (s) A R T H U R

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 19

1e)

M est diagonalisable (d'après 1a)
Donc $\exists D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M.
Or $\dim(E_{-1}(M)) = 2$ et $\dim(E_2(M)) = 1$
Donc il y aura deux fois la valeur propre -1 et une fois 2.

Ainsi: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1f)

Montrons par récurrence que, $\forall k \in \mathbb{N}$, (P_k) : " $M^k = PD^kP^{-1}$ " est vraie

Initialisation

$M^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$

Donc (P_0) est vraie

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.83 / 20

Hérédité

Supposon (P_k) vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

Alors $M^{k+1} = M^k \times M$

$= (PD^kP^{-1})\, M$ (par principe de récurrence)

$= (PD^kP^{-1})(PDP^{-1})$ (car $M = P^{-1}DP \iff D = P^{-1}MP$)

$= PD^kDP^{-1}$

$= PD^{k+1}P^{-1}$

Donc (P_{k+1}) est vraie

Conclusion

$\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = PD^kP^{-1}$

1g)

$$M^k = PD^kP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k+(-1)^k+2^k & -2(-1)^k+(-1)^k+2^k & (-1)^k+(-2)(-1)^k+2^k \\ (-1)^{k+1}+2^k & -2(-1)^{k+1}+2^k & (-1)^{k+1}+2^k \\ (-1)^{k+1}+2^k & (-1)^{k+1}+2^k & -2(-1)^{k+1}+2^k \end{pmatrix}$$

Ainsi on remarque par identification que, $\forall k \in \mathbb{N}$, :

$a_k = 2^k + (-1)^{k+1}$ et $b_k = 2^k - 2(-1)^{k+1}$

2a)

$$\left[(J_m)^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} m^{k-1} & \cdots & m^{k-1} \\ \vdots & m^{k-1} & \vdots \\ m^{k-1} & \cdots & m^{k-1} \end{pmatrix} = m^{k-1} J_m \right]$$

2b) Soit $m \geq 2$

$$\underline{M_m = J_m - I_m} \quad \left(\text{car} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

2c)

$$(M_m)^k = (J_m - I_m)^k$$

Or les matrices I_m et J_m sont commutatives (la matrice identité commute avec n'importe quelle matrice)

Donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$(M_m)^k = (I_m - J_m)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (J_m)^i (-I_m)^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (J_m)^i (-1)^{k-i} I_m$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} m^{i-1} J_m (-1)^{k-i} I_m \quad (\text{d'après } 2a)$$

$=$ Voir suite sur l'autre page

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom FALVEY

Prénom (s) ARTHUR

17.83 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table 19

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(J_m)^i(-1)^{k-i}I_m = \binom{k}{0}(J_m)^0(-1)^{k-0}I_m + \sum_{i=1}^{m}\binom{k}{i}(J_m)^i(-1)^{k-i}(I_m)$$

$$= (-1)^k I_m + \sum_{i=1}^{m}\binom{k}{i} m^{i-1} J_m (-1)^{k-i}(I_m) \quad \text{(d'après 2a)}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}\binom{k}{i} m^{i-1}(-1)^{k-i}(I_m)\right) J_m + (-1)^k I_m$$

$$= c_k J_m + (-1)^k I_m$$

2d)

$$c_k = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i} m^{i-1}(-1)^{k-i} =$$

NE RIEN ÉCRIRE

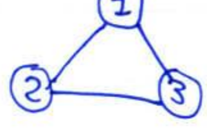
DANS CE CADRE

17.83 / 20

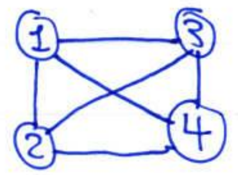
Partie II

3) Graphe K_2 :

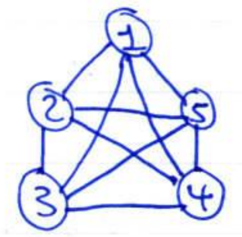
Graphe K_3 :



Graphe K_4 :



Graphe K_5 :



4a) Soit $m_{i,j}$ un coefficient de la matrice d'adjacence (M) :
Donc $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si il existe une arête entre } i \text{ et } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans le contexte de l'exercice donc :

$$M = \left[\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & 1 \ \vdots \\ \vdots \ 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = M_n\right]$$

4b)

Pour savoir le nombre de chemins entre 1 et 1 de longueur 4 il faut regarder le coefficient $m_{1,1}$ de la matrice $(M_4)^4$.

Or $(M_n)^4 = c_4 J_n + (-1)^4 I_n$

$$= \frac{(n-1)^4 + (-1)^{4+1}}{n} J_n + I_n$$

$$= \frac{(n-1)^4 - 1}{n} J_n + I_n$$

$$= \frac{(n-1)^4 - 1}{n} J_n + I_n$$

Donc $(M_4)^4 = \frac{3^4-1}{4}(J_4 + I_4)$

Donc $(M_4)^4 = 20 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{20} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Ainsi: il existe 20 chaines de longueur 4 reliant 1 à 1 dans K_4

5)

Comme chaque sommet est relié à tous les autres sommets sauf à lui-même dans un graphe d'ordre n, alors le degré de chaque sommet de K_n est $n-1$.

6)

D'après le lemme des poignées de mains (ou formule d'Euler)

$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2p$ avec d_i, le degré du sommet i et p le nombre d'arrêtes

Ainsi $p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $d_i = n-1$

Donc $p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (n-1)$

Donc $p = \frac{n(n-1)}{2}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom FALVEY

Prénom (s) ARTHUR

17.83 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 09

Numéro de table 19

Partie III

7) $V_0 = (1, 0 \cdots 0)$ (car $\mathbb{P}(X_0=1)$ et $\forall k \in [\![2,n]\!]$ $\mathbb{P}(X_0=k)=0$)

$V_1 = \left(0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \cdots \frac{1}{n-1}\right)$ (car $\mathbb{P}(X_1=1)=0$ et $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_1=k)=\frac{1}{n-1}$)
par equiprobabilité

8) La matrice de transition de la chaine de Markov (M) est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \ddots & \frac{1}{n-1} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{n-1} & 0 \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

17.83 / 20

9a)

$(\pi \in M_{1,n}(\mathbb{R}))$

Un état stable d'une chaine de Markov est un vecteur ligne π tel que $\pi M = \pi$ avec M la matrice de transition.

9b)

$$VM = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}\right) n-1 \quad \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}\right) n-1 \quad \cdots \quad \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}\right) n-1 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$= V$$

Donc V est un état stable de la chaine de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$

10a)

$$V_{k+1} = V_k M$$

Donc $V_{k+1} = V_k \left(\frac{1}{(n-1)} (M_n) \right)$

10b)

$$V_k = V_0 M^{k}$$

Or $M = \left(\frac{1}{(m-1)} M_m\right)$

Donc $V_k = V_0 \left(\frac{1}{(m-1)} (M_m)\right)^{k}$

Donc $\underline{V_k = V_0 \frac{1}{(m-1)}^{k} (M_m)^{k}}$