Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 20

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies emlyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie 1 :

1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad \exists M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$

$$AM = M^2 M = M M^2 = M A$$

Donc $\boxed{AM = MA}$

2) Supposons que A est inversible alors $\exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = I_n$

On sait que $M^2 = A$

Donc $AA^{-1} = M^2 A^{-1} = I_n$

$\Leftrightarrow \quad M^2 (M^2)^{-1} = I_n$

$\Leftrightarrow \quad M^2 (M^{-1})^2 = I_n$

Il faut nécessairement que M soit inversible.

3) a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_n$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

il est clair qu'un polynome annulateur de A est X^2+1 qui n'admet pas de racines réelles.

Donc A n'est pas diagonalisable, car on trouve aucune valeur propre

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+cb & ba+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} b(a+d) = 1 & a^2+cb = 0 \\ c(a+d) = -1 & bc+d^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(a+d) = 1 & a^2+cb = 0 \quad (*) \\ & bc+d^2 = 0 \\ 0 = c+b & \leftarrow L_2 = bL_2 - cL_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ c = -b \end{cases}$$ en remplaçant dans (*), les autres lignes étant égales

c) il y a donc 2 solutions :

$$M = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

4) a) On repère des valeurs propres évidentes
→ 0 grâce à la colonne nulle, c'est même la seule grâce à la forme de la matrice.
Elle est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur sa diagonale.
A n'est pas diagonalisable, car f n'est pas l'endomorphisme nulle.

b) $M^4 \neq 0 \iff A^2 \neq 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $M^4 \neq 0$

$M^6 = 0 \iff A^3 = 0$

On $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $M^6 = 0$

c) Montrons que $B_p = (u, f(u) \dots f^{p-1}(u))$ est libre
Soit $(a_0 \dots a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$

$a_0 u + \dots a_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$

on applique f^{p-1}

$a_0 f^{p-1}(u) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ car $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, M^p = 0\}$
les autres termes sont nuls

en itérant cela à tous les p, on trouve que les $(a_0 \dots a_{p-1})$ sont nuls.

Soit β est une famille libre

d) On a supposé $M^2 = A$ avec $M \in M_n(\mathbb{R})$

alors d'après 4c, $A = \alpha_0 u + \alpha_1 f(u) \cdots \alpha_p f^{p-1}(u)$

Or $M^6 = 0 \iff A^3 = 0$
$\iff A = 0$

$M^2 = 0$ ce qui est absurde d'après nos calculs

il semble qu'il n'existe pas de matrice M.

5a) $P(X) = X^2 - I_n$ est un polynôme annulateur de M

$Sp(M) \subset \{$racines de $P\} = \{-1, 1\}$

b) Soit $x \in \ker(f - Id_E) \cap \ker(f + Id)$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = -x \end{cases} \iff \{ x = 0$$

De plus, $\dim(\ker(f - Id)) + \dim(\ker(f + Id)) \leq n$

~~Je ne trouve pas donc :~~

M est une symétrie donc diagonalisable ayant pour valeur propres 1 et -1 !

Soit $\mathbb{R}^n = \ker f - Id \oplus \ker f + Id$

c) Les 2 sous espaces propres associés à -1 et 1 sont supplémentaires. Soit f est diagonalisable

d) M est diagonalisable, il existe 2 matrices de passage et une matrice diagonale composée de 1 et de -1 sur la diagonale tels que $M = PDP^{-1}$

Alors,

$M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths Approfondies emlyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $M^2 = I_n \Leftrightarrow P D^2 P^{-1} = I_n$

Le résultat de ce système est l'ensemble des matrices semblables à D^2. Soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$ avec ε_i prenant la valeur 1 ou -1

6) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ avec P inversible
D diagonale.

$\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_n$
et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
On réarrangeant dans l'ordre croissant

$\Leftrightarrow Sp(A) = \{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$

Donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$

et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et P matrices de passage inversible pour inverse P^{-1}

b) $N = P^{-1} M P \iff M = P N P^{-1}$

Supposons $M^2 = A$ et $A = PDP^{-1}$

$$M^2 = PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^2P^{-1} = PDP^{-1}$$

soit $N^2 = D$

Supposons $N^2 = D$

$$D = P^{-1} A P \text{ et } N = P^{-1} M P$$

$$N^2 = P^{-1} M^2 P = P^{-1} A P$$

alors $M^2 = A$

On a montré les 2 inclusions Donc

$$\boxed{M^2 = A \iff N^2 = D}$$

c) D'après la question 1, si on suppose que $M^2 = A$ alors $AM = MA$

D'après 6a,

$$AM = MA \iff DN = ND$$

, le commutant d'une matrice diagonale est une matrice diagonale soit $\boxed{N \text{ est diagonale}}$

d)

$M^2 = A \iff N^2 = D$

Or si A admet des valeurs propres négatives D contient des coefficients négatifs stricts et N^2 forcement

. que des positives car N est diagonale donc $(N^2)_{ij} = (N_{ij})^2 \geq 0$

Donc si A admet au moins une valeur propre négative l'équation $M^2 = A$ n'admet pas de solution.

e) $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$

$\Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP = D$

$\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D$

$\Leftrightarrow M^2 = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ et $0 \leq \lambda_1 \dots \leq \lambda_n$

7) a) D'après 6e, l'équation admet au moins une solution si les valeurs propres sont positives. Ce qui est le cas d'après l'énoncé.

et d'après 6e, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' = (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

b) $M_1^2 = A$ $M_2^2 = A$ symétriques avec $Sp(A) > 0$

i) D'après le cours, M_1 et M_2 sont symétriques, $\exists P_1, P_2$ orthogonales tels que $M_1 = P_1 D_1 P^{-1}$ $M_2 = P_2 D_2 P^{-2}$ avec les $P_1 P_2$ les matrices dans des bases orthonormé et D_2 matrice diagonale dans une base de vecteurs propres

Donc

$M_1 = P_1 D_1 P^{-1}$ et $M_2 = P_2 D_2 P^{-2}$

ii) $D_1^2 P = P_1^{-1} M_1^2 P_1 P = P_1^{-1} M_1^2 P^2 = P_1^{-1} P_2 P_2^{-1} M_2^2 P_2 = PD_2^2$
alors $D_1 = diag(a_i)$ et $D_2 = diag(b_j)$

Soit $a_{i,j}^2 P_{i,j} = P b_{i,j}^2$, on obtient $D_1 P = P D_2$ et grace à la question ① on a iv.

Partie 2 :

8) Montrons que c'est un produit scalaire.

$(A)_{i,j} = a_{i,j}$ $\quad (B)_{i,j} = b_{i,j}$

→ $tr({}^tAB) = \langle A, B\rangle = tr({}^t({}^tAB))$

$= tr({}^tBA)$

$= \langle B, A\rangle$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique

→ Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \lambda A + B, C\rangle = tr({}^t(\lambda A+B)C) = tr(\lambda {}^tAC) + tr({}^tBC)$
$= \lambda\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$ par linéarité de la trace

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique

→ $BB = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} b_{k,j}$ $\qquad {}^tBB = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} b_{k,j}$

$tr({}^tBB) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2 \geq 0$ $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle$ est positif

→ $tr({}^tBB) = 0 \iff \forall (k,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad b_{k,j} = 0$

$\iff B = 0$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie

C'est un produit scalaire !

9) $\|M\|^2 = \langle M, M\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2$

À l'aide de cauchy schwarz,

$\langle M, M\rangle^2 \leq n$

Emplacement QR Code

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies Emlyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10) $\lim\limits_{h\to+\infty} M_h = L$

K_1 et K_2 ne dependent pas de k

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} K_1 M_h K_2 = K_1 L K_2}$

11 a) Soit $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2-1}{2x^2}$

$\boxed{\text{Or } x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
φ	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} \varphi(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to1} \varphi(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} \varphi(x) = -\infty$

b) $a > 0$ Supposons pour un $m \geq 1$ fixé que $|u_m| \geq 1$ et est bien définie et a le même signe que a

Hérédité : $|u_m| \geq 1$

$\varphi(|u_m|) \geq 1$ par le tableau

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et $\varphi(|u_m|)$ est bien définie car φ est continue sur $[1,+\infty[$
et u_{m+1} a le même signe que a car φ est positive sur $[1,+\infty[$
Initialisation $u_0 = a$ donc $|u_0| \geq 1$

u_0 a le même signe que a

Conclusion :

$\forall m \geq 1$, $(u_m)_m$ est bien définie, $|u_m| \geq 1$
et u_m a le même signe que a

c) $m \geq 1$ $u_{m+1} - u_m = -\frac{1}{2} u_m + \frac{1}{2 u_m}$

1er cas : si a est positive, u_m a le même signe que a

u_m est décroissante ~~et~~ minorée par a, elle converge

2ème cas, si a est négatif, u_m négative $-u_m \geq 1$

$(u_m)_m$ est croissante et majorée par a, elle converge

u_m est monotone et elle converge vers une limite nommée ℓ.

d) $|x| \geq 1$ $|\varphi'(x)| = \left|\frac{x^2-1}{2x^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x^2-1| \leq \frac{1}{2}$
car $|x| \geq 1$

e) Supposons pour un m fixé $|u_m - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m |a-\ell|$

hérédité :

$|u_{m+1} - \ell| = \frac{|\varphi(u_m) - \ell|}{|a-\ell|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$

grâce à 11e et l'hypothèse de récurrence.

Initialisation :

$|a-e| \leq |a-e|$

Conclusion :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad |u_m - e| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m |a-e|}$$

12) A est symétrique, alors elle est orthodiagonalisable, il existe une BON de vecteurs propres de A telles que

$$A = P D_0 P^{-1}$$

$$\boxed{\text{ou} \quad D_0 = P^{-1} A P}$$

b) Supposons par récurrence sur h $M_h = P D_h P^{-1}$ ou $D_h = P^{-1} M_h P$

hérédité

$$M_{h+1} = P \frac{1}{2}\left(D_h + D_h^{-1}\right) P^{-1}$$

$$= P D_{h+1} D$$

Initialisation :

$$A = P D_0 P^{-1}$$

Conclusion : D_h est diagonale et inversible et $D_{h+1} = \frac{1}{2}(D_h + D_h^{-1})$

c)

$$M_h = P D_h P^{-1}$$

$\lim\limits_{h \to +\infty} M_h = L$ comme $u_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} e$

On peut dire que $L^2 = I_m$ car M_h est symétrique

donc L aussi et par 7b, $L^2 = I_m$

e) rho = max(v ,)

while $\sqrt{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + rho(A)) \geq$ 10 ** -3 :

$k = k+1$

$U = \frac{1}{2}(U + al.inv(U))$

return U.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondie em lyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2 :

Partie 1 : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

1) On sait que $I_{n+1} = (n+1) I_n$ par intégration par parties

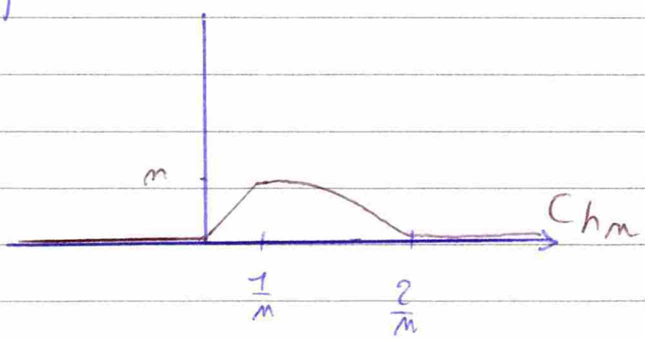
Supposons pour un n fixé $I_n = n!$

hérédité : $I_{n+1} = (n+1)\, n! = n+1!$

Initialisation : $I_0 = \Gamma(0) = 1 = 1!$

Conclusions : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$

2)



h_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\}$ (peut être sur $\mathbb{R}$) et positive

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} 2n - n^2 t\,dt$$

$$= \left[\frac{n^2 t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[2nt - \frac{n^2 t^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + 4 - \frac{1}{2} - 2 + 1$$

$$= 1$$

$\boxed{h_n(t) \text{ peut être considérée comme une fonction de densité}}$

b) $t \in [0,1]$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = 0 \quad \text{si } t \in [0, \tfrac{1}{n}] \\ &\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = +\infty \quad \text{si } t \in [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}] \end{aligned}}$$

c)

On $\int_0^1 h_n(t)dt = \frac{1}{2} + 2n - \frac{n^2}{2} - 2 + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Alors, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\,dt \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} h_n(t)dt = +\infty$

Partie 2 :

$E(Y_i) = \frac{1}{\lambda_1}$ $V(Y_i) = \frac{1}{\lambda_1^2}$

Par linéarité $\underline{E(S_n) = \frac{n}{\lambda}}$

Par indépendance des Y_i, $V(S_n) = n^2\, V(Y_i) = \underline{\frac{n^2}{\lambda^2}}$

4) a) Par le cours, $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) = \mathcal{E}(1)$

b) On sait que si $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ alors $X_i \hookrightarrow \gamma(1)$ c'est la même loi

Par stabilité de la loi gamma $X_1 + \dots X_n \hookrightarrow \gamma(n)$

Finalement comme $\lambda Y_1 \dots \lambda Y_n \leadsto \gamma(n)$

$$\boxed{\lambda S_n \leadsto \gamma(n)}$$

c) On sait alors que

$$f_{\lambda S_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{e^{-t} \cdot t^{n-1}}{\Gamma(n)} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Par transformation affine et la formule donné par le cours

si $t > 0$, $f_{S_n}(t) = \dfrac{1}{|\frac{1}{\lambda}|} f\left(\dfrac{t}{\frac{1}{\lambda}}\right) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{n-1!}$

$$= \frac{\lambda}{n-1!} e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1} \text{ si } t > 0 \end{cases}}$$

5a) Par théorème de transfert :

$\frac{1}{S_n}$ admet une espérance $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |f_{S_n}(t)| \frac{1}{t} \, dt$ converge

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{t \; n-1!} \, dt \text{ CVG}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{n-1} \frac{(\lambda t)^{n-2} e^{-\lambda t}}{n-2!} \, dt \text{ CVG}$$

Or cela est vrai pour tout $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ d'après 1, en faisant un petit changement de variable affine et $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda}{n-1}$

5b) Par théorème de transfert :

$\frac{1}{S_n}$ admet une variance

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n-1!} e^{-\lambda t} t^{n-3} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^3}{(n-1)(n-2)} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-3}}{n-3!} dt \text{ converge}$$

Cela est vrai pour tout $n \geq 3$ d'après 1 avec le même changement de variable affine et $V(\frac{1}{S_n}) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$

c) D'après la transformation affine donnée par le cours

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{W_n}(t) = f_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}}(t) = \frac{1}{|\frac{\lambda}{\sqrt{n}}|} f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}(t + \sqrt{n})\right)$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda} t + \frac{n}{\lambda}\right)}$$

7a)

~~Calculons E~~

Calculons $E(W_n) = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} E(S_n)$

$$= \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0$$

$$V(W_n) = \frac{\lambda^2}{(\sqrt{n})^2} \frac{n^2}{\lambda^2} = 1$$

Les variables W_i $\forall i \in [\![1, n]\!]$ étant indépendantes et étant donné les calculs d'espérance et de variance qui existent on peut appliquer le théorème limite centrale,

Alors

$$\boxed{W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

$$7b) \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt}$$

Partie 3 :

On sait que $f_d(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

8) Donc $L(\lambda, a_1 \dots a_n) = \prod_{k=1}^{m} \lambda e^{-\lambda a_k}$

$\psi(\lambda \dots) = \ln(L(\lambda, a_1 \dots a_m)) = \sum_{k=1}^{m} \ln(\lambda e^{-\lambda a_k})$

$= m\ln(\lambda) + \sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda a_k}$

9) ψ étant C^1 comme somme et composée de fonctions C^1, elle est elle même C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^{m+1}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Cette fonction admet un point critique sur $(\mathbb{R}_+^*)^{m+1}$ là où son gradient s'annule

$\nabla \psi(\dots) = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad -\lambda e^{-\lambda a_k} = 0$

Or la fonction exponentielle est strictement positive sur cet intervalle (ouvert)

10) On dérive φ selon λ

$\varphi'(\lambda) = \frac{m}{\lambda} - \sum_{k=1}^{m} a_k e^{-\lambda a_k}$

Cette fonction est négative puis positive, il y a donc un maximum en $\hat{\varepsilon}$.

dès lors

$\psi((\lambda, a_1 \dots a_m)) \leq \psi(\hat{\varepsilon}, a_1 \dots a_m)$

par continuité de l'exponentielle $\quad L(\lambda, a_1 \dots a_m) \leq L(\hat{\varepsilon}) a_1 \dots a_m)$

11) $E(Z_m) = m\,E(\frac{1}{S_n})$

$= \frac{m\lambda}{m-1}$

$V(Z_m) = m^2 V(\frac{1}{S_m})$

$= \frac{m^2}{(m-1)^2(m-2)} \lambda^2$

Alors $E(Z_m) \neq \lambda$ donc Z_m est biaisé

Mais $V(Z_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc Z_m est asymptotiquement sans biais pour λ

12) $\frac{m-1}{m} Z_m$ est non biaisé pour λ

il est pas convergent car $V(\frac{m-1}{m} Z_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

13) D'après le cours, ou que à la 7a $W_m \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$

Alors on trouve un intervalle asymptotique donné par le cours par

$\left[1 - \frac{W_m t_\alpha}{\sqrt{m}}, 1 + \frac{W_m t_\alpha}{\sqrt{m}}\right]$

14) $Z = \frac{m}{\ln(x)}$

$A = Z \times \left(1 - \frac{t}{\sqrt{m}}\right)$

$B = Z \times \left(1 + \frac{t}{\sqrt{m}}\right)$

15) La loi exponentielle est sans mémoire

Partie 4.

16) a)

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann

avec $\alpha > 1$ $\alpha = 2$

Donc par équivalence de fonctions positives

$\sum v_n$ converge

$u_n = \ln(v_n) - \ln(v_0) \underset{n \to +\infty}{\to} \ell$

18) b) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

Donc $R(u) \leq M_1 |u|^3$

c)

19)

b) on intègre l'inégalité demandée

$$\left|\int_0^1 f_{W_n}(t)dt - \int_0^1 f_Z(t)dt\right| \underset{\uparrow}{\leq} \int_0^1 \left((u_n - \ell)C_2 + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}}\right) f_Z(t)$$

inégalité triangulaire

iii et iv

$$\leq \left(C_2 |u_n - \ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}}\right) \int_0^1 f_Z(t)dt$$

c) Par encadrement, comme $\lim C_2 |u_n - \ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $u_n \to \ell$

Alors $\lim \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \int_0^1 \ell f_Z(t)dt$

20 P est égale à 1

$u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$

alors $\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}}}$