Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 15	Session : 2024

Épreuve de : Maths 1 HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 : Soit $n \geq 2$.

1) Soit P une matrice de permutation.
Chaque colonne de P possède $n-1$ "0" et 1 unique "1".
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $[P{}^tP]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [P]_{i,\ell} [{}^tP]_{\ell,j}$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} [P]_{i,\ell} [P]_{j,\ell}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Car P étant une matrice de permutation soit $\ell \in [\![1,n]\!]$ tel $[P]_{i,\ell} = 1$ alors si $i \neq j$ $[P]_{j,\ell} = 1$ sinon on ne pourrait définir une bijection σ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$

Donc $P{}^tP = I_n$ donc P est orthogonale et par symétrie des rôles joués par P et ${}^tP$, ${}^tP$ est aussi une matrice de permutation.

2) Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Supposons Q une matrice de Hadamard.
Notons $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ses vecteurs colonnes.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tQ_i Q_j = 0$ par hypothèse.

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[{}^tQQ]_{i,j} = 0$ si $i \neq j$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $[{}^tQQ]_{i,i} = \sum_{\ell=1}^{n} [{}^tQ]_{i,\ell}[Q]_{\ell,i}$

$= \sum_{\ell=1}^{n} [Q]_{\ell,i}^2$

$= \sum_{\ell=1}^{n} 1$ par hypothèse

$= n$

On a bien d'après le calcul de chaque coefficients : $\boxed{{}^tQQ = nI_n}$

Pour les mêmes raisons (tous les coefficients de Q valent -1 ou 1) :
$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, [Q]_{i,j}^2 = 1}$

Supposons que ${}^tQQ = nI_n$ et $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, [Q]_{i,j}^2 = 1$

On a directement que $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, [Q]_{i,j} \in \{-1, 1\}}$

Montrons l'orthogonalité des vecteurs colonnes.
Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ et $i \neq j$.

${}^tQ_i Q_j = \sum_{\ell=1}^{n} [{}^tQ]_{i,\ell}[Q]_{\ell,j}$

$= \boxed{[{}^tQQ]_{i,j} = 0}$ car ${}^tQQ = nI_n$ et $i \neq j$

D'où l'orthogonalité et l'équivalence.

3) ${}^tH$ a tous ses coefficients qui appartiennent à $\{-1, 1\}$

Posons ${}^tH_1, {}^tH_2, \dots, {}^tH_n$ ~~ses vecteurs colonnes~~.
~~Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. ${}^t({}^tH_i){}^tH_j = H_i$~~

Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, [{}^tH]_{i,j}^2 = 1}$

$${}^t({}^tH)\,{}^tH = H\,{}^tH$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. $[H\,{}^tH]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [H]_{i,\ell}[{}^tH]_{\ell,j}$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} [H]_{i,\ell}[H]_{j,\ell}$$

$$= \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{n} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc $H\,{}^tH = nI_n$

Donc d'après 2), ${}^tH$ est une matrice de Hadamard.

4) ${}^t(PH)PH = {}^tH\,{}^tPPH$

$= {}^tHH$ car P est orthogonale d'après 1).

$= nI_n$ car H est une matrice d'Hadamard et cf 2)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $[PH]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [P]_{i,\ell}[H]_{\ell,j}$

$[PH]_{i,j} = \underbrace{[H]_{\ell,j}}_{\in\{-1,1\}}$ où $[P]_{i,\ell}$ est l'unique coefficient de la ligne i valant 1.

Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [PH]_{i,j}^2 = 1$

→ D'après 2), PH est bien une matrice de Hadamard.

${}^t(HP)HP = {}^tP\,{}^tHHP$

$= n\,{}^tPP$ d'après 2)

$= nI_n$ d'après 1)

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], [HP]_{i,j}^2 = \left(\sum_{\ell=1}^{n} [H]_{i,\ell}[P]_{\ell,j}\right)^2 = [H]_{i,\ell}^2$ où $\ell \in [\![1,n]\!]$ tel que $[P]_{\ell,j} = 1$

$= 1$

Donc HP l'est aussi.

On a ${}^tD = D$ et $D^2 = I_n$ (cela découle des hypothèses)

Donc $\begin{cases} {}^t({}^tDH)HD = n\,{}^tDD = nI_n \\ {}^tH\,{}^tDDH = {}^tHH = nI_n \end{cases}$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\begin{cases} [DH]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [D]_{i,\ell}[H]_{\ell,j} \\ [HD]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [H]_{i,\ell}[D]_{\ell,j} \end{cases}$

$\begin{cases} [DH]_{i,j} = [D]_{i,i}[H]_{i,j} \in \{-1,1\} \\ [HD]_{i,j} = [H]_{i,j}[D]_{j,j} \in \{-1,1\} \end{cases}$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\begin{cases} [DH]_{i,j}^2 = 1 \\ [HD]_{i,j} = 1 \end{cases}$

D'après 2) HD et DH sont des matrices de Hadamard.

5) Soit H_1 la première ligne de H.
Si on pose D diagonale telle que
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $[D]_{i,i} = [H]_{1,i} \in \{-1,1\}$
alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $[HD]_{1,j} = [H]_{1,j}[D]_{j,j}$

$\forall j \in [\![1,n]\!], [HD]_{1,i} = 1$

Donc la première ligne de $HD \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $(1,1,\dots,1)$ et d'après 4), HD est de Hadamard.

6) Soit $(HD)_1, (HD)_2, \dots (HD)_n$ les colonnes de HD.

Par hypothèse soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: ${}^t(HD)_i(HD)_j = 0$

i.e. $\sum_{\ell=1}^{n} [{}^tD\,{}^tH]_{i,\ell}[HD]_{\ell,j} = 0$

Donc $\sum_{\ell=1}^{n} [HD]_{\ell,i}[HD]_{\ell,j} = 0$

D'après 5). Et $\sum_{\ell=2}^{n} [HD]_{\ell,i}[HD]_{\ell,j} = -1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 15

Session : 2024

Épreuve de : Maths 1 HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or $\forall l \in [\![2, n]\!]$, $[HD]_{l,i}[HD]_{l,j} \in \{-1, 1\}$

Donc il y a exactement un -1 de plus que de 1.
Donc la somme possède un nombre impair d'indices.
i.e. $n-2+1 = n-1$ est impair.
Donc n est pair

7) Soit $(i, m) \in [\![2, n]\!]^2$ et $i \neq m$.

$$\sum_{l=1}^{n} (S_{i,l}+1)(S_{m,l}+1) = \sum_{l=1}^{n} S_{i,l} S_{m,l} + \sum_{l=1}^{n} S_{i,l} + \sum_{l=1}^{n} S_{m,l} + n$$

8) En admettant 7), on a $n = \sum_{l=1}^{n} (S_{i,l}+1)(S_{m,l}+1)$ avec $n \geq 3$.
↳ car $i \neq m$

Or $\forall l \in [\![1, n]\!]$, S étant de Hadamard : $(S_{i,l}+1)(S_{m,l}+1) \in \{0, 4\}$

Soit l le nombre d'éléments de la somme valant 4 :
On a alors $n = 4l$
D'où $\frac{n}{4} = l$ où l est un entier non nulle

Donc $n \geq 3 \Rightarrow n$ est un multiple de 4

$n = 3$ est impossible d'après 6

$n = 2$: est possible car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard

9) Soit $n \geq 2$. D'après 5), la première ligne est vérifiée.
On note D_1 la matrice qui comme dans 5 fait de HD_1 une matrice de Hadamard.
Prenons D_2 diagonale telle que soit $\ell \in [\![3, n-3]\!]$: $\begin{cases} \forall i \in [\![1, \ell]\!], [D_2]_{i,i} = [H]_{2,i} \\ \forall i \in [\![\ell+1, n]\!] [D_2]_{i,i} = -[H]_{2,i} \end{cases}$

Et D_3 diagonale telle soit $s_1 < \ell$ et $s_2 > \ell$: $\begin{cases} \forall i \in [\![1, s_1]\!], [D_3]_{i,i} = [H]_{3,i} \\ \forall i \in [\![s_1, \ell]\!], [D_3]_{i,i} = -[H]_{3,i} \\ \forall i \in [\![\ell, s_2]\!], [D_3]_{i,i} = [H]_{3,i} \\ \forall i \in [\![s_2+1, n]\!], [D_3]_{i,i} = -[H]_{3,i} \end{cases}$

En généralisant la propriété obtenue dans 4) :
$HD_1D_2D_3$ est bien de Hadamard et vérifie la propriété demandée.

10) On admet que les quatre blocs ont le même nombre de colonnes.
Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ ce nombre de colonnes
On a $n \geq 3$ tel que $n = 4\ell$
D'où $\frac{n}{4} = \ell \in \mathbb{N}^*$ → n est bien divisible par 4.

11) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ deux matrices de Hadamard.
Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$: ${}^t(A_{i,j}B)(A_{i,j}B) = {}^tB\,{}^tA_{i,j}A_{i,j}B$

d'après 2) $= \begin{cases} {}^tB \times 0 \times B & \text{si } i \neq j \\ k\,{}^tBB & \text{si } i = j \end{cases}$

d'après 2 $= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ knI_n & \text{si } i = j \end{cases}$

Donc $A \otimes B = knI_n$

Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. On admet que $[A \otimes B]_{i,j}^2 = 1$

D'après 2), $A \otimes B$ est de Hadamard

12) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $H(m)$ " il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$ "

si $m=1$: B est de Hadamard donc $H(1)$ est vraie.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(m)$ vraie, montrons que $H(m+1)$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence soit $A \in \mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard qui existe bel et bien.

En reprenant B, on a d'après 11) $A \otimes B \in \mathcal{M}_{2 \times 2^m}(\mathbb{R})$ qui est de Hadamard.

Donc il existe $A \otimes B \in \mathcal{M}_{2^{m+1}}(\mathbb{R})$, une matrice de Hadamard

D'où l'hérédité et le résultat.

13)

```
import numpy as np
def test_hadamard(M):
    n,p = np.shape(M)
    if n!=p:
        return -2
    else:
        for i in range(0,n):
            for j in range(0,n):
                if np.abs(M[i,j]) != 1:
                    return -1
        for j in range(0,n-1):
            for k in range(j+1,n):
                if np.dot(np.transpose(M[:,j]), M[:,k]) != 0:
                    return 0
    return 1
```

14)

```
import numpy.random as rd
def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4*m
    for tst in rang(0,Nmax):
        matpm = np.ones((n,n), dtype = int)
        for i in range (0,n):
            nb_un = 0
            j = 0
            while 2*nb_un < n and j*2 < n:
                val = rd.randint(0,2)
                nb_un += val
                matpm[i,j] = 2*val-1
                j = = 2 - val
            if (2*nb_un == n):
                for l in range (j,n):
                    matpm [i,l] = -1
        if (test_hadamard(matpm)==1):
            return matpm
    return np.zeros((n,n), dtype = int).
```

Partie II : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

15) Soit $(x_1, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$$\langle x_1, y \rangle = \sum_{l=1}^{n} p_l x_{1l} y_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} p_l y_l x_{1l}$$

$= \langle y, x_1 \rangle$ d'où la symétrie

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^n$. $\langle \alpha x_1 + x_2, y \rangle = \alpha \sum_{l=1}^{n} p_l x_{1l} y_l + \sum_{l=1}^{n} p_l x_{2l} y_l$

par linéarité de la somme

$= \alpha \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

D'où la linéarité à gauche et la bilinéarité par symétrie.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 15	Session : 2024

Épreuve de : Maths I HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $p_\ell \geq 0$ car c'est une probabilité

Donc $\langle x,x\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell x_\ell^2 \geq 0$ ~~en~~ tant que somme à termes positifs.

D'où la positivité.

De plus $\langle x,x\rangle = 0 \iff \forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = 0$ car w_ℓ est une partie non vide de Ω donc $P(\{w_\ell\}) \neq 0$

$\iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

D'où le caractère défini.

L'application défini bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16) Soit $i \in [\![1,\ell]\!]$ $a_i Z_i + b_i$ admet un moment à tout ordre en tant que variable aléatoire bornée.

Par linéarité de l'espérance et quadraticité de la variance en supposant qu'un tel couple existe, on a :

$a_i E(Z_i) = -b_i$ et $a_i^2 V(Z_i) = 1$.

Or par hypothèse, $\#Z_i(\Omega) \geq 2$ donc Z_i n'est pas constante

Nécessairement : $a_i = 0$ et donc $b_i = 0$

↳ On peut bien choisir $(a_i, b_i) = (0,0)$ car $a_i Z_i + b_i$ admet une espérance et une variance

⟶ D'où l'existence et l'unicité. L'unique couple vérifiant

Par hypothèse, Z_i n'est pas constante donc $\mathbb{V}(Z_i) \neq 0$.

Ainsi, $a_i^2 = \frac{1}{\mathbb{V}(Z_i)}$ i.e. $a_i = \frac{1}{\sigma(Z_i)}$ car $a_i \in \mathbb{R}_+^*$.

On a donc $b_i = -\frac{\mathbb{E}(Z_i)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}}$ D'où l'unicité

L'existence de $\mathbb{E}(Z_i)$ et $\mathbb{V}(Z_i) \neq 0$ (Z_i étant borné nous prouve l'existence)

Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}}, -\frac{\mathbb{E}(Z_i)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_i)}} \right)$ est l'unique couple vérifiant la propriété

17) Dans la suite on aura que des variables aléatoires admettant des moments à tout ordre car bornée.

On a $\mathbb{E}(V) = \sum_{\ell=1}^{m} V(\omega_\ell)\,\mathbb{P}(\{\omega_\ell\})$ par définition de l'espérance.

↳ $\mathbb{E}(V) = \sum_{\omega \in \Omega} V(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(V) = \sum_{\ell=1}^{m} V(\omega_\ell)\, p_\ell = \langle v, v_0 \rangle}$ car $v_0 = (1, \dots, 1)$

D'après le théorème de transfert : $\mathbb{E}(VW) = \sum_{\ell=1}^{m} V(\omega_\ell) W(\omega_\ell)\,\mathbb{P}(\{\omega_\ell\})$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell\, V(\omega_\ell)\, W(\omega_\ell)$$

$$= \langle v, w \rangle$$

18) Soit $(i, j) \in [\![1, \ell]\!]^2$ tels que $i \neq j$.

$\langle x_i, v_0 \rangle = \mathbb{E}(X_i) = 0$ d'après 16) cf 17)

$\langle x_i, x_i \rangle = \mathbb{E}(X_i^2)$ cf 17)

$$= \mathbb{E}(X_i^2) - (\underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=0})^2$$

$= \mathbb{V}(X_i)$ d'après 16)

$= 1$ d'après 16)

$\langle x_i, x_j \rangle = \mathbb{E}(X_i X_j)$ cf 17)
$= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$ car X_i et X_j sont indépendantes
$= 0$ cf 16) par coalition

19) Par hypothèse, $\ell \geq 2$ donc $\ell + 1 \geq 3$

On admet $\ell + 1 \leq m$.

20) ⓐ On a $\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell \mathbb{P}(\alpha_\ell = Z) = 0$

ⓑ Montrons la linéarité de T :
Soit $m \geq 2$. Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(\alpha Q_1 + Q_2) = ((\alpha Q_1 + Q_2)(\alpha_1), \dots, (\alpha Q_1 + Q_2)(\alpha_m))$$

$$= \alpha (Q_1(\alpha_1), \dots, Q_1(\alpha_m)) + (Q_2(\alpha_1), \dots, Q_2(\alpha_m))$$

$$= \alpha T(Q_1) + T(Q_2)$$

D'où $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{m-1}, \mathbb{R}^m)$

Soit $Q \in \mathrm{Ker}(T)$. On a $T(Q) = (Q(\alpha_1), \dots Q(\alpha_m)) = 0_{\mathbb{R}^m}$

Or les α_i ($i \in [\![1, m]\!]$) sont supposés distincts.
Donc Q est un polynôme de degré au plus $m-1$ qui admet m racines distinctes donc $Q = 0_{\mathbb{R}_{m-1}[X]}$

Conclusion : T est injective ~~est~~ va de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^m$ qui sont deux espaces vectoriels de même dimension finie.
Donc T est un isomorphisme de de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^m$.

ⓒ D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(Q(Z)) = \sum_{\ell=1}^{m} Q(\alpha_\ell)\mathbb{P}(Z = \alpha_\ell)$

D'après ⓐ, $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ est tel que $\sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell \mathbb{P}(Z = \alpha_\ell) = 0$.

Or T étant surjective (cf ⓑ), ce vecteur admet un antécédent dans $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ par T.

On peut donc poser $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que : $\forall \ell \in [\![1,m]\!]$, $Q(\alpha_\ell) = \beta_\ell$

$\boxed{\text{Et on a bien d'après ⓐ, } Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \text{ tel que } \mathbb{E}(Q(Z)) = 0}$

↳ En gardant le même polynôme Q, encore d'après ⓐ :
$\boxed{\mathbb{E}(Q(Z)Z) = 0}$ et $\boxed{Q(Z)(\Omega) \neq 0 \text{ car les } \beta_i \text{ sont non tous nuls.}}$

↳ On a bien montré l'existe d'un polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vérifiant les 3 propriétés anoncées.

21) On admet

22) ⓐ Comme $\ell = m-1$ et d'après 21, $\ell + r \leq m-1$
On a $\#\{i \in [\![1,\ell]\!],\ \#X_i(\Omega) > 2\} = 0$.
Donc $\forall i \in [\![1,\ell]\!] = [\![1,m-1]\!]$, $\#X_i(\Omega) \leq 2$
Or $\forall i \in [\![1,m-1]\!]$, $\underbrace{\#X_i(\Omega)}_{\text{transformation affine de } Z_i} = \#Z_i(\Omega) \geq 2$

$\boxed{\text{D'où } \forall i \in [\![1,m-1]\!],\ \#X_i(\Omega) = 2}$

ⓑ Soit $i \in [\![1,m-1]\!]$.
D'après 16), $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = 1$

Donc $\begin{cases} \alpha_i \theta_i + \beta_i(1-\theta_i) = 0 \\ \alpha_i^2 \theta_i + \beta_i^2(1-\theta_i) - \underbrace{(\alpha_i\theta_i + \beta_i(1-\theta_i))^2}_{=0} = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha_i = -\beta_i \dfrac{(1-\theta_i)}{\theta_i} \\ \beta_i^2\left(\dfrac{(1-\theta_i)^2}{\theta_i^2} + (1-\theta_i)\right) = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha_i = -\beta_i \dfrac{(1-\theta_i)}{\theta_i} \\ \beta_i^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \\ \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 15

Session : 2024

Épreuve de : Maths I HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~c) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $[MD]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} M_{i,\ell} D_{\ell,j}$~~

~~$= M_{i,j} D_{j,j}$~~

~~$= \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} & \text{si } i=n \\ x_i(w_j)\sqrt{\lambda_j} & \text{si } i \neq n \end{cases}$~~

~~${}^t(MD)MD = {}^tD\,{}^tMMD$~~
~~$= D\,{}^tMMD \rightarrow$ inutile~~

~~$= \begin{cases} \sqrt{\lambda_j} & \text{si } i=n \\ \end{cases}$~~

~~Et $[D\,{}^tMMD]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [{}^t(MD)]_{i,\ell} [MD]_{\ell,j}$~~

~~$= \sum_{\ell=1}^{n} [MD]_{\ell,i} [MD]_{\ell,j}$~~

~~e) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On admet les résultats précédents.~~

~~$X_1 Y = X_1 + \sum_{\ell=1}^{n-1} x_\ell^3$~~

Partie III : Soit $n \geqslant 3$

23) Soit $x \in \mathbb{R}^{n^2}$.

$\varphi(x) = [x_{(i-1)n+j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{n^2})^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\alpha x+y) = \left[(\alpha x + y)_{(i-1)n+j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

$$= \alpha\left[x_{(i-1)n+j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} + \left[y_{(i-1)n+j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Par linéarité des matrices

$$= \alpha\,\varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\boxed{\text{D'où } \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{n^2}$. $\|\varphi(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{(i-1)n+j}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{in+j-i}\right)^2}$

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} x_i^2}$ $=$

24) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $[{}^tAA]_{i,i} = \sum_{j=1}^{n}[A]_{j,i}^2$

Donc $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{j,i}^2$ → l'ordre des indices n'importe pas

$$\boxed{= \|A\|^2}$$

25) $\langle A, I_n\rangle \leq \|A\|\sqrt{n}$ d'après Cauchy-Schwarz.

$(\mathrm{Tr}(I_n) = \|I_n\|^2 = n)$

Posons $|A|$ telle que $|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leq i,j\leq n}$

Prenons N la matrice composée uniquement de 1 :

$N^2 = nN$ et donc $\|N\|^2 = n^2$

On a $\langle |A|, N\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \leq n\|A\| = n\sqrt{Tr(A)}$
D'après Cauchy-Schwarz

i.e. $\boxed{F(A) \leq n\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right)^{1/2}}$

Soit x, y des réels positifs.

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \geq x^2 + y^2$$

↳ Ce résultat se généralise à n réels.
Comme $\forall j \in [\![1, n]\!], |A_{i,j}| \geq 0$

Alors $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|\right)^2 \Rightarrow 0 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

L'inégalité étant vraie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right)^{1/2} \leq F(A)}$$

~~26) φ est continue sur $\mathbb{R}^{n^2}$.~~

27) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{n^2})^2$. $|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| = |F(\varphi(x) - \varphi(y))|$

$\leq F(|\varphi(x) - \varphi(y)|)$

d'après 25) $\leq n\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x-y)_{(i-1)n+j}^2\right)^{1/2}$

$\boxed{\leq n\|x - y\|}$

28) Donc F est continue sur $\mathcal{M}_n$ par composition.
F étant continue sur un fermé borné, (on admet 26)).
elle ~~atteint~~ admet un minimum et maximum
qu'elle atteint sur O_n car $\varphi(x) \in O_n$