Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 38	**Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1:

1

a) Soit $x \in [0,1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$

On a $\frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{2a + ax + 2b - bx}{(2-x)(2+x)}$

$$= \frac{2a+2b + (a-b)x}{4-x^2}$$

On veut donc que $2a+2b = 1$ et $a-b = 0$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2a+2b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{a = b = \frac{1}{4}}$

b) On a alors $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} \, dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2-x} \, dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2+x} \, dx$

$= -\frac{1}{4}\left[\ln(2-x)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\ln(2+x)\right]_0^1$

$= -\frac{1}{4}\ln(1) + \frac{1}{4}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(3) - \frac{1}{4}\ln(2)$

$= \frac{1}{4}\ln(3)$

On a bien : $\boxed{u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)}$

(2) On a : $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$

$$= \left[\ln(4-x^2)\right]_0^1 \times \frac{-1}{2}$$

$$= \frac{-\ln(5)}{2} + \frac{\ln(4)}{2}$$

On a donc : $\boxed{u_1 = \frac{\ln(4) - \ln(5)}{2}}$

(3)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$4u_n - u_{n+2} = 4\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x^n dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 4 u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$$

b)

```
def suite(n) :
    if (-1) ** n == 1:
    u = np.log(3) / 4
    for k in range (2, n+1, 2) :
        u = 4 * u - 1/(n+1)
```

```
import numpy as np
def suite (n) :
    if (-1) ** == 1 :
        u = np.log(3) / 4
        for k in range (2, n+1, 2) :
            u = 4 * u - 1/(n+1)
    else :
        u = np.log (2 np.sqrt (3))
        for k in range (3, n+1, 2) :
            u = 4 * u - 1/(n+1)
    return u
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 38	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4

a) Soit $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

On a : $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow 3 \leqslant 4 - x^2 \leqslant 4$

$\Rightarrow \frac{1}{3} x^n \leqslant \frac{x^n}{4-x^2} \leqslant \frac{1}{4} x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 x^n \, dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{4-x} \, dx \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 x^n \, dx$

on a fait le calcul à la question 3 a)

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{n+1}$

Ainsi, on a bien :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$

b)

Or on sait que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0$

D'où, par encadrement : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$

On sait que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (serie de Rieman avec $\alpha \leq 1$)

Or $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$

D'où, on sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge.

Et par conséquent, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4(n+1)}$ diverge.

Ainsi, comme $0 \leq \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$, alors par critère de comparaison :

La série de terme général u_n est divergente.

(5)

a) Le graphique nous montre que lorsque l'on multiplie la suite u_n par $3n$, alors, lorsque n est assez grand, l'expression obtenue se rapproche de 1.

Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n\, u_n = 1$

Ou encore, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{3n}} = 1$.

On peut alors conjecturer : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\, dx$

On peut alors intégrer par partie en posant :

$v'(x) = x^n$ donc $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$u(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$ donc $u'(x) = \dfrac{2x}{(4-x^2)^2}$

Les fonctions en jeu sont en effet bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

On obtient ainsi :

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(4-x^2)(n+1)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^{n+2}}{(4-x^2)^2(n+1)}\, dx$$

$$= \frac{1}{3(n+1)} - 0 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \, dx$$

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \, dx}$$

c)

Soit $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad 3 \leqslant 4 - x^2 \leqslant 4$$

$$\Rightarrow \quad 9 \leqslant (4-x^2)^2 \leqslant 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \int_0^1 x^{n+2} \, dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \, dx \leqslant \frac{1}{9} \int_0^1 x^{n+2} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16 \quad (n+3)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \, dx \leqslant \frac{1}{9 \quad (n+3)}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{9(n+3)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{16(n+3)} = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 38	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, par encadrement, on a bien :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \, dx = 0$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a donc vu que $u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$

(d'après le résultat de la question précédente).

Par conséquent, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

C'est bien ce que l'on avait conjecturé à la question 5a)

La conjecture est donc bien vérifiée.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2 :

(1)

a) Comme $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est strictement positive, alors $x \mapsto x e^{-x^2/2}$ est positive lorsque $x \in \mathbb{R}_+$

Par conséquent, f est positive sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme ~~composée~~ produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
Et f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ comme fonction constante.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Finalement, déterminons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2}\,dx$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^A x e^{-x^2/2}\,dx = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A = -e^{-A/2} + e^0$$

Or $e^0 = 1$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A/2} = 0$

Ainsi, on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Finalement, f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b)

Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On a $E(Y) = 0$

et $V(Y) = E(Y^2) - E(Y) = 1$

D'où, $E(Y^2) = V(Y) + E(Y) = 1 + 0 = 1$

Ainsi la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 1.

c) $E(X)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge absolument

la fonction en jeu est positive sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$ $\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx$ converge

~~Or on voit que $x \longmapsto x^2 e^{-x^2/2}$ est paire et que~~
~~donc on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}$~~

Or on sait d'après la question précédente que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2} \, dx = 1$$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx = \sqrt{2\pi}$

Or on remarque que $x \longmapsto x^2 e^{-x^2/2}$ est paire.

Par conséquent, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx$

Et ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \, dx$ converge et on a :

$$\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Ainsi, on a bien l'existence de $E(X)$ et $\boxed{E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

(2)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$

Si $x \geq 0$, on a $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt$

$$= \int_{0}^{x} f(t) \, dt$$

$$= \int_{0}^{x} t e^{-t^2/2} \, dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 38	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$= \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x$$

$$= 1 - e^{-x^2/2}$$

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

On a bien sûr $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Si $x < 0$, on a donc $F_Z(x) = P(Z \leq x) = 0$

car $[Z \leq x] = \emptyset$ comme $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$, et $P(\emptyset) = 0$

Si $x \geq 0$, on a $F_Z(x) = P(Z \leq x)$

$= P(X^2 \leq x)$ car $x \geq 0$

$= P(X \leq \sqrt{x})$

$= 1 - e^{-\sqrt{x}^2/2}$

$= 1 - e^{-x/2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Par conséquent Z suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$

$Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

b) ~~import .~~
~~import n~~ . random as rd
~~def simul X ()~~
~~return~~

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX():
        return np.sqrt(rd.exponential(1/2))
```

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, alors $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$ également

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a donc $G_n(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc $G_n(x) = P(Y_n \leq x)$

$= P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right)$

$= P(X \leqslant \sqrt{n}\,x)$ question ②

$= 1 - e^{-(\sqrt{n}\,x)^2/2}$

$= 1 - e^{-n x^2/2}$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-n x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

b)

Si $x<0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

Si $x \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-n x^2/2} = 1$

Car on sait que pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n x^2/2} = 0$

car $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$

Ainsi, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine égale à 0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

c) On remarque que $[|Y_n| > \varepsilon] \subset [|Y_n - \sqrt{\frac{\pi}{2n}}| > \varepsilon]$

D'où $P(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant P(|Y_n - \sqrt{\frac{\pi}{2n}}| > \varepsilon)$

Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on sait que :

$P(|Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$

Autrement dit, $P(|Y_n - \sqrt{\frac{\pi}{2n}}| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(Y_n)}{n\varepsilon^2}$

D'où, $0 \leqslant P(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant P(|Y_n - \sqrt{\frac{\pi}{2n}}| > \varepsilon \leqslant \frac{V(Y_n)}{n\varepsilon^2}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V(Y_n)}{n\varepsilon^2} = 0$

Donc par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$:

On a $P(M_n > x) = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \dots \cap [X_n > x])$

par indépendance mutuelle $= P(X_1 > x) P(X_2 > x) \times \dots \times P(X_n > x)$

$= (1 - (1 - e^{-x^2/2}))(1 - (1 - e^{-x^2/2})) \dots (1 - (1 - e^{-x^2/2}))$

$= (e^{-x^2/2})^n$

D'où, $P(M_n \leqslant x) = 1 - P(M_n > x)$

$= 1 - (e^{-x^2/2})^n$

$= 1 - e^{-nx^2/2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : | **Nombre de pages :** 38 | **Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Si $x < 0$, $P(M_n > x) = 1$

D'où $P(M_n \leq x) = 1 - 1 = 0$

Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(M_n \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx^2/2} \text{ sinon} \end{cases}$

Autrement dit, comme une fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi, on a bien :

Mn suit la même loi que Yn.

b)
```
def simulM(n):
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = min(X)
    return M
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 3 :

① Soit $x \in \mathbb{R}$, supposons que :

$$f(x) = 1 + \int_0^x t\, f(x-t)\, dt$$

On réalise alors le changement de variable $t = x - u$

On a alors $dt = -du$
$0 = x$
$x = 0$

($u \mapsto x - u$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; x]$)

On obtient alors $f(x) = 1 - \int_x^0 (x-u) f(u)\, du$

$$= 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\, du$$

Réciproquement, le changement de variable fonctionne également.

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x t\, f(x-t)\, dt \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\, du$$

② a)

on admet.

b) D'après le théorème fondamental de l'analyse, f' est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) = f(x)$$

c) On a donc l'équation $f'' - f = 0$

~~Déterminons les solutions particulières de cette e~~

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $x^2 - 1 = 0$

Cette équation s'annule lorsque $x = 1$ ou $x = -1$.

Autrement dit, l'ensemble les solutions de $f'' - f = 0$ est l'ensemble :

$$\boxed{\left\{ x \longmapsto \lambda e^{t} + \mu e^{-t} \;/\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

d)

On a $f(0) = 1 + \int_0^0 t f(x-t)\,dt = 1 + 0 = 1$

$f'(0) = \int_0^0 f(u)\,du = 0$

Ainsi $\boxed{f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0}$

On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels qu'on ait :

$$\begin{cases} \lambda e^{0} + \mu e^{-0} = 1 \\ \lambda e^{0} - \mu e^{-0} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1 \\ \lambda = \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par conséquent, la seule solution du problème est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t}$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 38

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi, le problème posé au début de cet exercice a bien au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

3) On a donc supposé que f était solution et on a alors montré que pour tout réel x, on avait $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
f est donc l'unique solution possible.
Montrons donc que $x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est solution.

On a $1 + \int_0^x (x-u) \frac{e^u + e^{-u}}{2} du$

$$= 1 + \int_0^x \frac{x}{2} e^u du + \int_0^x \frac{x}{2} e^{-u} du - \int_0^x \frac{1}{2} u e^u du - \int_0^x \frac{1}{2} u e^{-u} du$$

$$= 1 + \frac{x}{2}\left[e^u\right]_0^x + \frac{x}{2}\left[-e^{-u}\right]_0^x - \frac{1}{2}\left[u e^u\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^u du + \frac{1}{2}\left[u e^{-u}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-u} du$$

$$= 1 + \frac{x}{2}e^x - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{x}$$

$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est donc bien solution.

Par conséquent, comme $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est l'unique solution possible et que $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est bien solution, on en conclut que c'est l'unique solution.

Finalement, la fonction trouvée à la question 2 d) est bien la seule solution du problème.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$, la question 1) reste valable (en enlevant le $+1$)
Les questions 2a) et 2b) sont encore valables (car la dérivée d'une constante est égale à 0). Donc la question 2c) est valable.
En revanche, on trouve $f(0) = 0$.
Mais on trouve bien $f'(0) = 0$.
Donc on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda + \mu = \lambda - \mu = 0$
donc $\lambda = \mu = 0$
Comme $f_0 = 0$
valable

veuillez tourner la page svp

Problème :

(1)

a) $a_0 = P(X_0 = 0) = 0$

$b_0 = P(X_0 = 1) = 1$

$c_0 = P(X_0 = 2) = 0$

Car il y a une et une seule boule blanche dans A initialement (c'est-à-dire avant la première épreuve)

Ainsi, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ c_0 = 0 \end{array}}$$

b)

$[X_1 = 0]$ est réalisé si et seulement si la boule piochée dans A est la boule blanche (il y a une chance sur 2) et la boule piochée dans B est noire (il y a une chance sur 2). Les tirages sont indépendants, donc :

Ainsi, $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$[X_1 = 1]$ est réalisé si et seulement si la boule piochée dans A est la boule blanche et la boule piochée dans B est également blanche ou si la boule piochée dans A et dans B sont toutes deux noires. Les tirages sont indépendants, donc :

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Le "+" vient du fait que tirer deux blanches et tirer deux noire sont évidemment des évènements incompatibles.

Finalement, $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Ainsi, on a :

k	0	1	2
$P(X_1=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Ainsi, on a : $\boxed{a_1 = \frac{1}{4} \ ; \ b_1 = \frac{1}{2} \ ; \ c_1 = \frac{1}{4}}$

c) Ces trois évènements sont évidemment incompatibles (il ne peut pas y avoir en même temps une boule blanche et 2 boules blanches dans A par exemple) Et leur union est égale à l'univers (A a soit 0 soit 1 soit 2 boules blanches, il n'y a pas d'autre possibilité).

Ainsi, pour tout n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est bien un système complet d'évènements.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $a_0 + b_0 + c_0 = 1 + 0 + 0 = 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'évènements, alors on a :

$$P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1$$

Autrement dit, $a_n + b_n + c_n = 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 38

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n + c_n = 1$$

(2)

d)

Si $[X_n = 1]$ est réalisé, on est dans le même cas que la question (1) b).
Ainsi, on a :

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$$

Si $[X_n = 2]$ est réalisé, $[X_{n+1} = 2]$ ne peut pas être réalisé puisqu'alors une boule blanche est forcément remplacée par une boule noire.
$[X_{n+1} = 0]$ ne peut pas non plus être réalisé.

On a alors $P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) = 0$

$$P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)=1$$

$$P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0)=0$$

Si $[X_n=0]$ est réalisé et qu'il n'y a alors 0 boule blanche dans A, $[X_n=2]$ et $[X_n=0]$ ne peuvent pas être réalisés et $[X_n=1]$ est forcément réalisé car alors il y a forcément une boule blanche qui est remplacée par une noire dans A.

Ainsi :

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)=0$$

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1)=1$$

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=2)=0$$

Ces probabilités correspondent bien au graphe représenté.

Ainsi, le graphe représenté représente bien la chaîne de Markov décrite.

b)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien $0 + 1 + 0 = 1$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0)$

d'après la formule des probabilités totale avec le système complet d'événements $((X_n=0), (X_n=1), (X_n=2))$

$$= P(X_n=0) P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0) + P(X_n=1) P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0) + \dots$$

$$\dots P(X_n=2) P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0)$$

$$= a_n \times 0 + \frac{1}{4} b_n + c_n \times 0$$

$$= \frac{1}{4} b_n$$

On montre de même que $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$

et $c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$

(3)

Pour $n = 0$

On a vu que $a_1 = c_1 = \frac{1}{4}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$
$a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$

On a alors $a_1 = \frac{1}{4} b_0$

$c_1 = \frac{1}{4} b_0$

$b_1 = \frac{1}{2} b_0 + a_0 + c_0$

Les relations trouvées à la question 2c) restent bien valables pour $n = 0$.

(4) a)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$E(X_{n+1}) = 0 \times P(X_{n+1} = 0) + 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2)$

$= P(X_{n+1} = 1) + 2P(X_{n+1} = 2)$

$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$

$\cancel{= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + \frac{1}{2} b_n}$

$\cancel{= a_n + b_n + c_n}$

Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}}$

b)

Or $b_{n+1} + 2c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + \frac{1}{2} b_n$

$= a_n + b_n + c_n$

$\overset{1d)}{=} 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 38

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = 1}$

c) Or on a vu que $E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2C_n$

Donc $b_{n+1} + 2C_{n+1} = 1$

La suite $(b_{n+1} + 2c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à 1

Et on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n + 2C_n = 1$

Pour $n = 0$, on sait que $b_n = b_0 = 1$ et $C_n = C_0 = 0$

Donc $b_n + 2C_n = 1$ aussi pour $n = 0$.

Finalement, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2C_n = 1}$$

(5)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, ~~on a $U_nV = 2a_n - b_n + 2C_n$~~ question précédente

~~$= 2a_n - 1$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5 a)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n V = 2a_n - b_n + 2c_n$

Et $U_{n+1}V = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b_n & a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n & \frac{1}{4}b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}b_n - a_n - \frac{1}{2}b_n - c_n + \frac{1}{2}b_n$

$= \frac{1}{2}b_n - a_n - c_n$

$= -\frac{1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n)$

$= -\frac{1}{2} U_n V$

Ainsi, la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$2a_n - b_n + 2c_n = (2a_0 - b_0 + 2c_0) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2a_n - b_n + 2c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) On sait alors $\cdot$ que $a_n + b_n + c_n = 1$

$\cdot$ que $2a_n - b_n + 2c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\cdot$ que $b_n + 2c_n = 1$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 2a_n - b_n + 2c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n + 2c_n = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 1 - 2c_n \\ 2a_n - 1 + 2c_n + 2c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n + 1 - 2c_n + c_n = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 1 - 2c_n \\ a_n = \frac{1 - 4c_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2} \\ c_n = a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = c_n \\ b_n = 1 - 2a_n \\ 2a_n + 4a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_n = c_n = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

$$b_n = 1 - \frac{2}{6}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Ainsi, la loi de X_n est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(X_n = k)$	$\frac{1+(-\frac{1}{2})^n}{6}$	$1-\frac{2}{6}\left(1+(\frac{-1}{2})^n\right)$	$\frac{1+(-\frac{1}{2})^n}{6}$

7) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et on sait que pour toute suite v_n, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$

Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable X dont voici la loi :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$1/6$	$4/6$	$1/6$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 38	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8

a)

On a $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$2M^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Et $M^2 + M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

On a bien $\boxed{2M^3 = M^2 + M}$

b)

Ainsi le polynôme $2X^3 - X^2 - X$ est annulateur de M.

Or $2X^3 - X^2 - X = 0 \iff X(2X^2 - X - 1) = 0$

0, 1 et $-\frac{1}{2}$ sont les trois racines de cette équation

Donc $Sp(M) \subset \{0 ; 1 ; -\frac{1}{2}\}$

On remarque de plus que $\cdot MX = X$ avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cdot MX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cdot MX = -\frac{1}{2} X$ avec $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi 0, 1 et $-\frac{1}{2}$ sont bien valeurs propres et comme la somme de la dimension de chaque sous espaces propres de M est plus petit ou egal à 3 (car $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) alors, en notant E_λ le sous espace propre de M associé à la valeur propre λ, on sait que :

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_1

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_0

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-\frac{1}{2}}$

Et on a vu que $\underline{Sp(M) = \{0 ; 1 ; -\frac{1}{2}\}}$

c) On remarque que P est constituée des vecteurs constituant les bases des sous espaces propres de M.

Donc comme on sait que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est libre et génératrice, alors P est bien inversible.

Ainsi, $\boxed{P \text{ est inversible.}}$

d)

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ainsi, $MP = PD$ (P est inversible d'après 8c))

Donc $MPP^{-1} = PDP^{-1}$

Ou encore $M = PDP^{-1}$

M est donc semblable à une matrice diagonale.

Autrement dit, $\boxed{M \text{ est bien diagonalisable.}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 38	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

e) Soit $n \in \mathbb{N}$

On sait que $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} b_n & a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n & \frac{1}{4} b_n \end{pmatrix}$$

De plus, on a :

$$U_n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} b_n & a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n & \frac{1}{4} b_n \end{pmatrix}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n M = U_{n+1}}$$

f) On reconnaît une suite géométrique de raison M.
(une preuve rigoureuse pourrait se faire par récurrence immédiate)

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 M^n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

g)

On calcul alors M^n

En suite, comme on connaît U_0, on calcul $U_0 M^n$

Cela nous donne U_n

Or $U_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$

Et $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$

Cela nous donne donc bien la loi de X_n.