Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 32	**Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1:

1) a) $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Donc $rg(J_n) = 1$.

Donc d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - rg(J_n)$
$= n - 1.$

Donc $\mathrm{Ker}(J_n - 0 \cdot I_n) \neq \{0\}$.

$\boxed{\text{Bilan: } rg(J_n) = 1,\ 0 \in Sp(J_n) \text{ et } \dim(E_0) = n-1.}$

b) $J_n \cdot U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

$= n \cdot U_n.$

$\boxed{\text{Bilan: } U_n \text{ est un vecteur propre de } J_n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

$= n \cdot J_n.$

Posons $P(X) = X^2 - nX$.

$= X(X-n)$.

Alors P est un polynôme annulateur de J_n.

Donc $Sp(J_n) \subset \{\text{Racines de } P\}$

$\subset \{0, n\}$.

Or d'après les question précédentes, $0 \in Sp(J_n)$ et $n \in Sp(J_n)$.

$\boxed{\underline{\text{Bilan}}: Sp(J_n) = \{0, n\}}$

2) $\cdot$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x \in \mathbb{R}^n \mapsto x_k$ est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
Donc par somme, $x \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est polynomiale.
Également et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$
Or $u \mapsto u^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$,

Donc par composition à gauche,

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

De même, $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Bilan: Par somme, f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\partial_i f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot 2x_i - \left(2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k.}$$

b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

x est un point critique de f_n

$\iff \nabla(f_n)(x) = 0$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{n} x_1 - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ \frac{2}{n} x_2 - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ \quad \vdots \\ \frac{2}{n} \cdot x_n - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n} x_1 - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ \frac{2}{n}(x_2 - x_1) = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ \frac{2}{n}(x_n - x_1) = 0 & L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n} x_1 - \frac{2}{n^2} \cdot x_1 \sum_{k=1}^{n} 1 = 0 \\ x_2 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

Bilan: Les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$.

4) a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

On sait que $\partial_j (f_n)(x) = \frac{2}{n} x_j - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$.

1er Cas: $i = j$.

Donc $\partial^2_{i,j} (f_n)(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}$.

2e Cas: $i \neq j$.

$\partial^2_{i,j} (f_n)(x) = - \frac{2}{n^2}$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 32	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) On a donc d'après la question précédente.

$$D^2(f_n)(a,-,a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & -\frac{2}{n^2} & -\frac{2}{n^2} & \cdots & -\frac{2}{n^2} \\ -\frac{2}{n^2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{2}{n^2} \\ & & \ddots & \frac{2}{n} & -\frac{2}{n^2} \\ -\frac{2}{n^2} & \cdots & -\frac{2}{n^2} & & \frac{2}{n^2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{2}{n^2} J_n + \frac{2}{n} I_n$$

$$= \boxed{\frac{2}{n^2}\left(n I_n - J_n\right)}$$

c)
```
n = int(input('entrez la valeur de n:'))
I =
J =
Hessienne = (2/(n**2))*(n*I - J)
print(Hessienne).
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\lambda \in Sp(\nabla^2 f_n(a,\dots,a)) \Leftrightarrow \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n) - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2}\left(nI_n - J_n - \frac{n^2}{2}\lambda I_n\right)$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow J_n - nI_n + \frac{n^2}{2}\lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow J_n - (n - \frac{n^2}{2}\lambda) I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{2}{n} \end{cases}$ car $Sp(J_n) = \{0, n\}$

$\boxed{\text{Bilan: } Sp(\nabla^2(f_n)(a,\dots,a)) = \{0, \frac{2}{n}\}.}$

Or $0 \in Sp(\nabla^2(f_n)(a,\dots,a))$, donc d'après la condition suffisante au second ordre, on ne peut pas savoir si f_n admet un extremum local.

5)a) Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$

ie $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n 1$

ie $\boxed{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2}$

b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

D'après la question précédente, on a : (en divisant par $\frac{1}{n^2}$) :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Donc $$\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

ie $0 \leq f_n(x)$. et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Or $$f_n(a, \dots, a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot a^2 \cdot n - \frac{1}{n^2}\cdot a^2 \cdot n^2$$

$$= 0$$

Donc $f_n(a, \dots, a) \leq f_n(x)$.

$\boxed{\text{Bilan: } f_n \text{ admet un minimum global sur } \mathbb{R}^n \text{ et ce minimum est atteint en chaque point critique de } f_n.}$

6) a)
```
def f_2(x,y):
    z=(1/2)*((x**2)+(y**2)) - ((1/2)*(x+y))**2
    return z
```

b)

Exercice 2.

1) a) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Posons $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$= 0$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $f(x) = f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$

$= 2\arctan(1)$

$= 2 \cdot \dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Bilan: } \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et ceci pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*}$

c) $\dfrac{\arctan(x) - 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \arctan'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

En utilisant la définition du nombre dérivé, on a :

$\boxed{\text{Bilan: } \arctan(x) \underset{0}{\sim} x.}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 32	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1) a) Étudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

L'intégrale est impropre en $+\infty$ et $-\infty$.

Or $x \mapsto \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(e^{x}+e^{-x})}$ est paire.

Ainsi étudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(e^{x}+e^{-x})}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{e^{x}+e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$ (par croissance comparée)

Donc $\underbrace{f(x)}_{\geq 0} = o\Big(\underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\geq 0}\Big)$

Or d'après le critère de Riemann, comme $2>1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Donc $\int_1^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Donc d'après un théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\boxed{\text{Bilan: Comme } f \text{ est paire, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq 0$

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Étudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On sait d'après la question précédente que l'intégrale converge et comme f est paire, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Soit $A>0$.

$$\int_0^A \frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^A \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{1}{e^x(1+(e^{-x})^2)}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^A \frac{e^{-x}}{1+(e^{-x})^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^A \frac{-e^{-x}}{1+(e^{-x})^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\arctan(e^{-x})\right]_0^A$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\arctan(e^{-A}) - \arctan(1)\right)$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$\boxed{\text{Bilan: } f \text{ peut être considérée comme une densité.}}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{e^{t}+e^{-t}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{e^{-t}(1+(e^{t})^{2})}\,dt$$

Soit $A < x$.

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_{A}^{x} \frac{e^{t}}{(1+(e^{t})^{2})}\,dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\arctan(e^{t})\right]_{A}^{x}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan(e^{x}) - \arctan(e^{A})\right)$$

$$\xrightarrow[A \to -\infty]{} \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(e^{x}).$$

$\boxed{\text{Bilan: } F(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(e^{x}) \text{ et ceci pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

4) a) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})} > 0.$$

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection entre $]-\infty, \infty[$ et $F(]-\infty,\infty[) =]\lim_{x \to -\infty} F(x), \lim_{x \to \infty} F(x)[$

$=]0,1[$ (par définition d'une fonction de répartition).

b) $X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$(F(X))(\Omega) =]0,1[$.

Donc $U(\Omega) =]0,1[$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

1er Cas : $t \in]-\infty, 0]$.
Alors $F_U(t) = 0$

2e Cas : $t \in [1, +\infty[$
Alors $F_U(t) = 1$.

3e Cas. $t \in]0,1[$.
Alors $F_U(t) = P(U \leq t)$

$= P(F(X) \leq t)$

$= P(X \leq F^{-1}(t))$ par stricte croissance de F^{-1}.

$= F(F^{-1}(t))$

$= t$

$= \dfrac{t-0}{1-0}$.

$\boxed{\text{Bilan : } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)}$.

c) Soit $y \in]0,1[$, $x \in \mathbb{R}$,

$y = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x) \iff \frac{\pi}{2} y = \arctan(e^x)$

$\iff \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right) = e^x$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 32	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$\Leftrightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right) = x.$

Ainsi, $\boxed{F^{-1}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)}$

```
def X()
    return np.log(np.tan((np.pi/2)*rd.rand()))
```

5)a) Etudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.

L'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

• Etude en $+\infty$:

$$x \cdot f(x) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x^2 = \frac{x^3}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Donc $\underbrace{x f(x)}_{\geq 0} = o\Big(\underbrace{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2}}_{\geq 0.}\Big)$.

Or d'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge car $2 > 1$,

Donc par produit et par un théorème de comparaison d'intégrale de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge.

Or $x \mapsto x f(x)$ est impaire.

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge et vaut 0.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\boxed{\text{Bilan: } X \text{ admet une espérance et } E(X)=0}$

b) Etudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

Plus précisément, comme $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire, étudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

De la même manière qu'aux questions 5a et 2b, on a:

$$\underbrace{x^2 f(x)}_{\geq 0} = o\Big(\underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\geq 0}\Big)$$

Et ainsi, par un critère de Riemann et un théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge.

$\boxed{\text{Bilan: } X \text{ admet un moment d'ordre 2, et donc une variance.}}$

6) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$ est impropre en $+\infty$

$$\underbrace{t^2 e^{-nt}}_{\geq 0} \underset{+\infty}{=} o\Big(\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\geq 0}\Big)$$

car $t^4 e^{-nt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée).

Or d'après le critère de Riemann comme $2>1$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.
Donc d'après un théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$ converge.

$\boxed{\text{Bilan: } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt \text{ converge.}}$

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^2 \cdot n\, e^{-nt}\,dt$

$$= \frac{1}{n} \cdot E(Z^2) \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$$

$$= \frac{1}{n} \left(V(Z) + E(Z)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n^2} \right)$$

$$= \frac{2}{n^3}.$$

$$\boxed{\underline{\text{Bilan:}} \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\, dt = \frac{2}{n^3}}.$$

b) Notons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A(p)$: " $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\, dt$

$$= I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}\, dt \text{ "}$$

Raisonnons par récurrence.

Initialisation pour $p=0$.

$$(-1)^0 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2\cdot 0+1)t}\, dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt.$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^2 \cdot \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot e^{-2kt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^2 \cdot \sum_{k=0}^{p} \left(-e^{-2t}\right)^k\, dt$$

Soit $\varepsilon > 0$

On a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^2 \cdot \sum_{k=0}^{p} (-e^{-2t})^k \, dt$$

Donc $\forall t \in [\varepsilon, +\infty[$, $\quad -2t < 0$

Donc $\forall t \in [\varepsilon, +\infty[$ $-1 < -e^{-2t} < 1$.

Donc $\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^2 \cdot \sum_{k=0}^{p} (-e^{-2t})^k \, dt$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^2 \cdot \frac{1-(-e^{-2t})^{p+1}}{1-(-e^{-2t})} \, dt$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^2 \cdot \frac{\left(1-(-1)^{p+1} e^{-2t(p+1)}\right)}{1+e^{-2t}} \, dt$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^2 \cdot \frac{\left(1+(-1)^{p} e^{-2tp-2t}\right)}{1+e^{-2t}} \, dt$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{t^2}{e^{t}+e^{-t}} \, dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(-1)^p \cdot t^2 \cdot e^{-2tp-3t}}{1+e^{-2t}}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{e^{t}+e^{-t}} \, dt + (-1)^p \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \, dt$$

$$\boxed{\underline{\text{Bilan:}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} \, dt = I + (-1)^p \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \, dt.}$$

c) $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

Donc par positivité de l'intégrale, on a :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \, dt \geq 0 \quad (\text{pour tout } p \in \mathbb{N}).$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 32	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 1 + e^{-2t} > 1$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \dfrac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+3)t}$

On a donc par croissance de l'intégrale, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+3)t} dt$$

$$\leq \frac{2}{(2p+3)^3} \quad \text{d'après la question 6a}$$

$$\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0.$$

Bilan : Par théorème d'encadrement, on a : $\boxed{\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt = 0}$

d) • Calculons $E(X^2)$.

On a : $E(X^2) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ car $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot I.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On par passage à la limite, dans la question 6b, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I.$$

Donc $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)^3}$ (d'après la question 6a).

Donc $E(X^2) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)^3}$.

Donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)^3} - 0$ (d'après question 5a)

$= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)^3}$

$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{32}$

$= \frac{\pi^2}{8}$

$\boxed{\text{Bilan : } V(X) = \frac{\pi^2}{8}}$

7) a) $X(\Omega) = \mathbb{R}$.
Donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
1er cas : $x \in \mathbb{R}_-$
Alors $G(x) = 0$

2e Cas : $x \in \mathbb{R}_+^*$

$G(x) = P(Y \leq x)$

$= P(e^X \leq x)$

$= P(X \leq \underbrace{\ln(x)}_{\in \mathbb{R}})$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^{\ln(x)})$

$= \frac{2}{\pi} . \operatorname{arctan}(x)$.

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctan}(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0^-} G(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} G(x)$

Donc G est continue en 0.
Donc G est continue sur $\mathbb{R}$
De plus, G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

Bilan : Y est une variable aléatoire à densité.

b) $M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

1er Cas : $x \in \mathbb{R}_-$
Alors $G_n(x) = 0$

2e Cas : $x \in \mathbb{R}_+^*$,
Alors, $G_n(x) = P(M_n \leq x)$

$= P(\max(Y_1, \_, Y_n) \leq x)$

$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leq x] \right)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}_+^*})$ par indépendance mutuelle

$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x) \right)$

$= \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x) \right)^n.$

Bilan: $G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x) \right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

c) $M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

$F_{\frac{n}{M_n}}(t) = P\left(\frac{n}{M_n} \leq t \right)$

$= P(n \leq M_n t)$

$= P\left(\frac{n}{t} \leq M_n \right)$

$= 1 - P\left(M_n < \frac{n}{t} \right)$

$= 1 - G_n\left(\underbrace{\frac{n}{t}}_{>0} \right)$

$= 1 - \left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t} \right) \right)^n$

Or $\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t} \right) \right)^n = e^{n \ln\left(\frac{2}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{n}{t} \right) \right)}$

Et $\arctan\left(\frac{n}{t} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\frac{n}{t}} \right)$ d'après la question 1,

Donc $\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t} \right) \right)^n = e^{n \ln\left(\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{t}{n} \right) \right) \right)}$

$= e^{n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{t}{n} \right) \right)}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On $\frac{t}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\arctan\left(\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\ln\left(1-\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{t}{n}\right)$.

Donc $n\ln\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2n}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{t}{n}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{t}{n}$ (question 1)

$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2t}{\pi}$

Donc $n\ln\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{2t}{\pi}$.

Donc par composition de fonction, on a :

$F_{\frac{n}{M_n}}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-e^{-\frac{2}{\pi}t}$ (pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$)

et $\forall t\in\mathbb{R}_-$, $F_{\frac{n}{M_n}}(t) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Bilan: } \frac{n}{M_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Exercice 3 :

1) Soit $(x,y)\in E^2$,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\langle f(x), y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i , y\rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle \langle u_i, y\rangle$ par bilinéarité

$= \langle x, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y\rangle y\rangle\rangle$ par symétrie et bilinéarité

$= \langle x, f(y)\rangle$

Bilan: f est symétrique.

· Soit $(x, y, \lambda) \in E^2 \times \lambda$.

$f(\lambda x+y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, \lambda x+y\rangle u_i$

$= \lambda \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y\rangle u_i$ par bilinéarité

$= \lambda f(x) + f(y)$.

Bilan: f est un endomorphisme symétrique

2) Soit $x \in E$.
$(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthonormée de E.

Et on a: $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, x\rangle u_i$

Bilan: f est la projection orthogonale sur E

3) a) Soit $x \in E$.

$x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0.$$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \ \lambda_i \langle u_i ; x \rangle = 0$ (car $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée, donc libre)

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \ \langle u_i, x \rangle = 0$

$\Leftrightarrow x \in Vect(u_1, \dots, u_p)^{\perp}$.

$\boxed{\text{Bilan: } Ker(f) = Vect(u_1, \dots, u_p)^{\perp}.}$

$Dim(Ker(f)) = dim(E) - dim(Vect(u_1, \dots, u_p))$

$= \boxed{dim(E) - p.}$

b) D'après le théorème du rang, on a :

$dim(Im(f)) = dim(E) - dim(Ker(f))$

$= \boxed{p.}$

Soit $x \in Im(f)$

Donc $\exists y \in E$ tel que $x = f(y)$.

Donc $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i$.

Donc $x \in Vect(u_1, \dots, u_p)$

Donc $Im(f) \subset Vect(u_1, \dots, u_p)$

Or $dim(Im(f)) = dim(Vect(u_1, \dots, u_p)) = p$.

$\boxed{\underline{\text{Bilan}}: \text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).}$

4)

\underline{Partie 2}:

5)

6) Soit $x \in E$.

$$\|f(x)\|^2 = \| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \|^2$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i , \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle u_j, x \rangle u_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle \cdot \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle u_j, x \rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}} \quad (\text{bilinéarité}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle \cdot \lambda_i \langle u_i, x\rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \langle u_i, x\rangle^2.$

On a donc : $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \langle u_i, x\rangle^2}$.

Or d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, on a. $\langle u_i, x\rangle \leq \|u_i\| \cdot \|x\|$.

Donc $\|f(x)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \|u_i\|^2 \cdot \|x\|^2}$

$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2} \cdot 1 \cdot \|x\|$ car $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée

$\leq K \cdot \|x\|.$

$\boxed{\text{Bilan: } \|f(x)\| \leq K \cdot \|x\|.}$

7) a) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, : $A(n)$: « $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$ ».
Raisonnons par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$.
$\|x_0\| = K^0 \cdot \|x_0\|$
Donc $A(0)$ est vraie
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $A(n)$ est vraie

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\|$

$\leq K \cdot \|x_n\|$ d'après la question précédente

$\leq K^{n+1} \|x_0\|$ par hypothèse de récurrence.

Donc la propriété est héréditaire.

$\boxed{\text{Bilan: } \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq K^n \cdot \|x_0\|.}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x_n \rangle u_i - x_n$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x_n \rangle u_i - \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, x_n \rangle u_i$ (car $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée)

$= \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, x_n \rangle u_i (\lambda_i - 1)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\|x_n\|}_{\geq 0} \leq \underbrace{K^n \|x_0\|}_{\geq 0}$

Or $|K| < 1$

Donc la série de terme général $K^n \|x_0\|$ converge.

Bilan: D'après un critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $\|x_n\|$ converge

Problème :

1) a) $\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [0,1]$, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$.

Donc par positivité de l'intégrale, on a : $u_n \geq 0$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \cdot \left(-\frac{t^2}{1+t^2} \right) dt.$$

Or $\forall t \in [0,1]$, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \cdot \left(-\frac{t^2}{1+t^2} \right) \leq 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. par positivité de l'intégrale.

$\boxed{\text{Bilan: } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante et positive.}}$

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

$\boxed{\text{Bilan: D'après le théorème de la limite monotone, } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

2) a) Soit $x \in [0,1]$,

Posons $f(x) = 1 + x - e^{x/2}$.

f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$$= 1 - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \geq 0$$

Donc f est croissante et $f(0) = 1 + 0 - e^0$
$= 0$

Donc $f(x) \geq 0$.

$\boxed{\text{Bilan } e^{x/2} \leq 1+x.}$

b) On a $\forall t \in [0,1]$, $e^{t^2/2} \leq 1+t^2$

Donc par décroissance de $u \mapsto \frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{e^{t^2/2}}$$

Donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2}$

Donc par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$$

$$\boxed{\text{Bilan: } U_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.}$$

c) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-nx^2/2}$ est paire.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$ en cas de convergence.

Or $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{n}t)^2}{2}}$

Posons $\varphi : \begin{cases} [0,+\infty[\to [0,+\infty[\\ t \mapsto \sqrt{n}t \end{cases}$

On a donc par changement de variable (comme φ est bijective, car strictement croissante.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 32	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Approfondies.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$ (en reconnaissant la densité d'une loi normale centrée réduite)

$\boxed{\text{Bilan: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$

d) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

$\boxed{\text{Bilan: Par théorème d'encadrement, on a } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Partie 2 :

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est impropre en $+\infty$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $1+t^2 \geq t^2$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$.

Or $\frac{1}{t^{2n}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc, d'après le critère de Riemann, et par deux théorèmes de comparaison des intégrales pour fonctions positives, on a

$\boxed{\text{Bilan: L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ converge.}}$

4)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Par un théorème d'encadrement et la relation précédente on a: $\boxed{\lim_{n \to \infty} I_n = 0}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = U_n + I_n$.

Donc d'après les questions 2 et 4b, on a:

$$\boxed{J_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.}$$

5)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Soit $A > 0$.
On a: $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^A (1+t^2)^{-n} dt.$

Posons $\forall t \in [0, A]$, $u(t) = (1+t^2)^{-n}$, $u'(t) = -n \cdot 2t \cdot (1+t^2)^{-n-1}$

$v(t) = t.$ $\quad v'(t) = 1$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$. On a donc par IPP,

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A + \int_0^A n \cdot 2t^2 \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}$$

Or $2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 2n \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right)$

$= 2n \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right)$

$= 2n (J_n - J_{n+1})$

$\boxed{\text{Bilan: } J_n = 2n(J_n - J_{n+1})}$

b) $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt$

Soit $A \geq 0$.

$\int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^A$

$= \arctan(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Bilan. } J_1 = \frac{\pi}{2}.}$

c) Soit $N \geq 1$.

$\sum_{n=1}^{N} \frac{J_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} 2(J_n - J_{n+1})$

$= 2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} J_n - \sum_{n=2}^{N+1} J_n \right)$

$= 2 \cdot (J_1 - J_{N+1})$

$\xrightarrow[N \to +\infty]{} 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi$.

$\boxed{\text{Bilan: La série de terme général } \frac{J_n}{n} \text{ converge et sa somme vaut } \pi.}$

d)
```
def suite J(n):
    J = np.pi/2
    for k in range(2, n+1):
        J = J*(1-2*n)/(-2)* n
    return J.
```

$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, J_n - 2nJ_n = -2n J_{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \frac{(1-2n)}{-2n} = J_{n+1}$