Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 28	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées En Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1)

Partie A) $(E) : x'(t) = -x(t) + e^{-t}$

1.a) Soit l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$

L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = ke^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$ forme l'ensemble des solutions de l'équation.

1.b) Soit x_0 une fonction de la forme $x_0(t) = (at+b)e^{-t}$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

x_0 est solution de $(E) \iff x_0'(t) = -x_0(t) + e^{-t}$

$$\iff ae^{-t} + (at+b)(-e^{-t}) = -(at+b)e^{-t} + e^{-t}$$

$$\iff e^{-t}(a-b-at) = e^{-t}(1-b-at)$$

$$\iff a-b-at = 1-b-at \quad \text{car } e^{-t} \neq 0$$

$$\iff a = 1, \ b \in \mathbb{R}.$$

Si on prend $a = 1$ et $b = 0$
$x_0(t) = te^{-t}$ est une solution particulière de (E).

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1\. c) Donc sachant que $\mathcal{S}_0 = \{x(t) = ke^{-t},\ k \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) et que x_0 est une solution particulière de (E),

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{t \longmapsto ke^{-t} + te^{-t},\ k \in \mathbb{R}\} \text{ forme l'ensemble des solutions de } (E).}$$

2\. a) $(S) : \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = \qquad\quad -y(t) \end{cases}$

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$(S) \iff X'(t) = AX(t)$ $\boxed{\text{avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I_2$ est non inversible

$$\begin{aligned} &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff (\lambda+1)^2 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{-1\}$;

~~Soit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cherchons Y tel que $AY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⊛~~

~~⊛ $\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$~~

~~$\iff \{$~~

2. a) Montrons par l'absurde que A n'est pas diagonalisable :

Admettons que A soit diagonalisable, alors il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale contenant les ~~coeffi~~ valeurs propres de A sur sa diagonale telles que

$A = PDP^{-1}$ par la formule du changement de base.

or ici $Sp(A) = \{-1\}$ donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 I_2$

alors $A = P(-1 I_2)P^{-1}$
$= -1 P I_2 P^{-1}$
$= -1 PP^{-1}$
$= -I_2$

$\boxed{\text{or } A \neq -I_2 \text{ donc c'est impossible que } A \text{ soit diagonalisable.}}$

2. b) Une solution qui résout (S) et telle que $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est unique car c'est une solution d'un problème de Cauchy qui, par définition, admet une unique solution.

2. c) Par Q1.a) $y'(t) = -y(t) \iff y(t) = ke^{-t}, k \in \mathbb{R}$.

et par Q1.c) $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$
$\iff x'(t) = -x(t) + y(t)$ où $y(t) = e^{-t}$ avec $k=1$
$\iff x(t) = ke^{-t} + te^{-t}$

Donc les solutions du système (S) sont de la forme
$(x(t) = ke^{-t} + te^{-t}, y(t) = e^{-t})$

Or $x(0) = y(0) = 1 \iff \begin{cases} ke^0 + 0e^0 = 1 \\ e^0 = 1 \end{cases}$

$\iff k = 1$

Donc l'unique solution de (S) vérifiant $\begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{est } \left(x(t) = e^{-t} + te^{-t},\ y(t) = e^{-t} \right)}$$

2. d) Calcul des limites de x et y en $+\infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{-t}(1+t)$$

$= 0$ par croissance comparée

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{-t}$$

$= 0$

Donc quand t tend vers ~~plus~~ $+\infty$ (x, y) converge vers l'état d'équilibre $(0, 0)$

3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace (-2, 10, 200)
x = [ (1+t) * np.exp(-t) for t in T ]
y = [ np.exp(-t) for t in T ]

plt.title ('Trajectoire de la solution')
plt.plot (x, y, T)
plt.show()
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 28	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées en Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Exercice 1 Partie B

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$

4. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{kx}$

$= +\infty$ car $k > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$ car $k > 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{kx}$

$= 0$ par croissance comparée

4.b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = e^{kx} + (x+1)ke^{kx}$
$= e^{kx}(1 + k(x+1))$

$f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow e^{kx}(1 + k(x+1)) > 0$
$\Leftrightarrow 1 + k(x+1) > 0$ car $e^{kx} > 0$
$\Leftrightarrow kx > -1 - k$
$\Leftrightarrow x > \frac{-1}{k} - 1$ car $k > 0$

De plus $f_k(-1) = (-1+1)e^{-k}$ $\qquad$ $f_k(0) = (0+1)e^{0}$

$= 0$ $\qquad$ $= 1$

Tableau de variations de f_k :

x	$-\infty$		$-1/k - 1$		-1	0	$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$			
f_k	0	↘		↗	0	1	$+\infty$

5. a) La courbe $\mathcal{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_k$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$

$\Leftrightarrow (x+1)e^{(k+1)x} \geqslant (x+1)e^{kx}$

$\Leftrightarrow (x+1)e^{kx}e^{x} \geqslant (x+1)e^{kx}$

$\Leftrightarrow (x+1)e^{x} \geqslant (x+1)$ car $e^{kx} > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)e^{x} - (x+1) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(e^{x}-1) \geqslant 0$

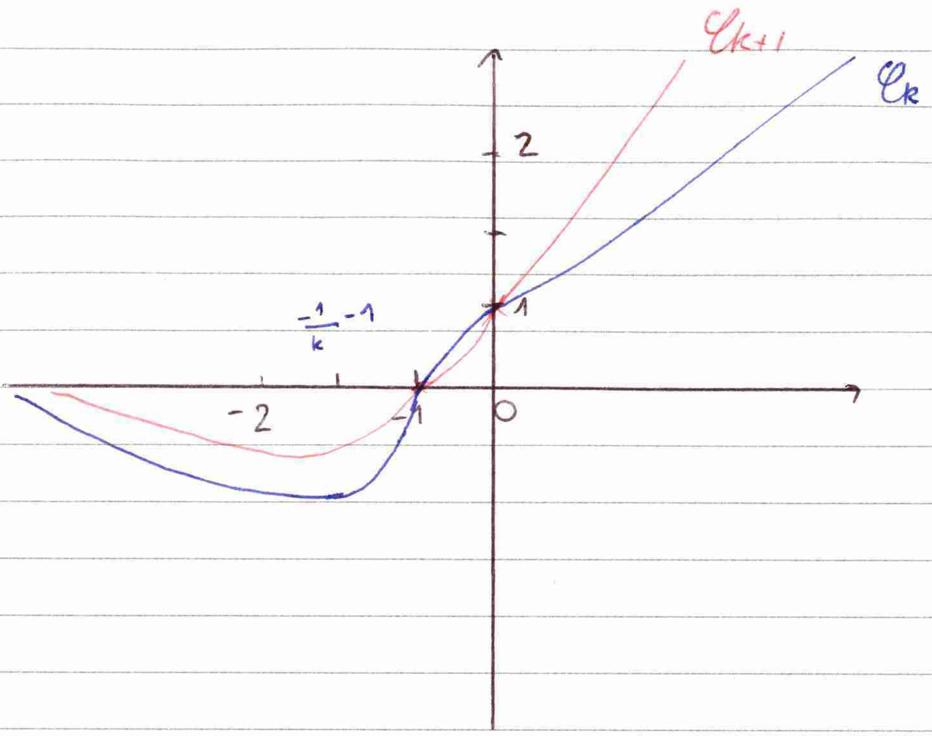
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ e^{x}-1 \geqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+1 \leqslant 0 \\ e^{x}-1 \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leqslant -1 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad$ ou $\quad x \leq -1$

Donc $\mathcal{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_k$ quand $x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$

Les courbes se croisent ~~en 0~~ aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$



Partie C

6. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 0$,

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k est strictement croissante sur $]-\frac{1}{k}-1; +\infty[$,
~~intervale contenant k~~.
Donc par le théorème de la bijection, f_k réalise une bijection croissante ~~sur~~ de $]-\frac{1}{k}-1; +\infty[$ sur $]f(-\frac{1}{k}; -1); +\infty[$, intervale contenant k une unique fois

En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{k} - 1 \leq -1$

$$\Leftrightarrow f(-\frac{1}{k} - 1) \leq f(-1)$$

$$\Leftrightarrow f(-\frac{1}{k} - 1) \leq 0 \leq k.$$

De plus, $\forall x \leq -\frac{1}{k} - 1$, $f_k(x) \leq 0$, donc $f_k(x) = k$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}^*_-$

Donc $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée u_k.

6. b) Cherchons $u_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(u_1) = 1$

Par la question 4. b) $f_k(0) = 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Donc } u_1 = 0}$

7. Montrons par récurrence que la proposition H_k : " $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln k}{k}$ " est vraie pour tout entier $k \geqslant 1$.

Initialisation :
par Q 6.b, $u_1 = 0$ or $\frac{\ln(1)}{1} = 0$
~~Donc~~
Donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{\ln 1}{1}$, H_1 est vérifiée, la proposition est initialisée.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1, fixé et quelconque. Supposons H_k vraie et montrons que H_{k+1} l'est aussi.

$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln k}{k}$

$\Longrightarrow f_k(0) \leqslant f_k(u_k) \leqslant f_k\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ par croissance de f_k sur $[0 ; +\infty[$

$\Longrightarrow 1 \leqslant k \leqslant$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées en Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1) Partie C)

7. Soit $k \geq 1 \Rightarrow \ln(k) \geq 0$ par croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Rightarrow \ln(k) + k \geq k \geq 1$$

$$\Rightarrow f_k^{-1}(1) \leq f_k^{-1}(k) \leq f_k^{-1}(\ln(k)+k)$$

par croissance de la fonction bijection réciproque de f_k.

Or par la partie B on sait que $f_k(0) = 1$

$$\Leftrightarrow 0 = f_k^{-1}(1)$$

On sait que $f_k(u_k) = k \Leftrightarrow f_k^{-1}(k) = u_k$.

et comme $f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\frac{\ln k}{k} + 1\right) \exp\left(k\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right)$

$$= \left(\frac{\ln k}{k} + 1\right) k$$

$$= \ln k + k.$$

Donc $f_k^{-1}(\ln(k) + k) = \frac{\ln(k)}{k}$

Alors on a $\forall k \geq 1 \quad f_k^{-1}(1) \leq f_k^{-1}(k) \leq f_k^{-1}(\ln k + k)$

$$\boxed{\Longleftrightarrow 0 \leq u_k \leq \frac{\ln k}{k}}$$

Or $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissance comparée.

Donc par le théorème d'encadrement des limites, $\lim u_k = 0$

8. a) Soit $k \geq 1$

~~Supposons que~~ $\cancel{u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}}$

$\cancel{\Longleftrightarrow k u_k = \ln(k) - \ln(u_k + 1)}$

$\cancel{\Longleftrightarrow k u_k = \ln\left(\frac{k}{u_k + 1}\right)}$

$\cancel{\Longleftrightarrow e^{k u_k} = \frac{k}{u_k + 1}}$

$\cancel{\Longleftrightarrow (u_k + 1) e^{k u_k} = k}$

$\cancel{\Longleftrightarrow f_k(u_k) = k}$, ~~on retrouve~~

8.a) Soit $k \geq 1$, on sait que $\forall k \geq 1$

$$f_k(u_k) = k \iff (u_k + 1) e^{k u_k} = k$$

$$\iff e^{k u_k} = \frac{k}{u_k + 1}$$

$$\iff k u_k = \ln\left(\frac{k}{u_k + 1}\right)$$

$$\iff k u_k = \ln(k) - \ln(u_k + 1)$$

$$\boxed{\iff u_k = \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}}$$

8.b) $$\lim_{k \to +\infty} \frac{u_k}{\ln(k)/k} = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}\right) \times \frac{k}{\ln(k)}$$

$$= \lim 1 - \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)}$$

or par Q7, $\lim_{k \to +\infty} u_k = 0$

Donc $\lim_{k \to +\infty} \ln(u_k + 1) = \ln(1) = 0$ par composition de limites.

Donc $\lim_{k \to +\infty} \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim \frac{u_k}{\ln k / k} = 1 - 0$

Alors $u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{k}$

9) $\forall k \geq 1 \quad 0 \leq U_k \leq \frac{\ln k}{k}$ et $U_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{k}$

Donc par le théorème dé équivalence des séries convergentes à termes positifs.

La série de terme général U_k est de même nature que la série de terme général $\frac{\ln k}{k}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus AM = MA\}$

Partie A) 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = -I_2$

$\Leftrightarrow -AA = I_2$

Donc par unicité de l'inverse A est inversible et $A^{-1} = -A$
$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow A - \lambda I_2$ est non inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$

$\Leftrightarrow (-\lambda)(-\lambda) - (-1)(1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

Il n'existe aucun réel λ valeur propre de A. A n'ayant pas de valeur propre, elle n'est pas diagonalisable.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ AM = MA \}$

• $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (1)

• ~~Sa~~ $A 0_2 = 0_2$ et $0_2 A = 0_2$
Donc $0_2 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$, $\mathcal{C}$ est non vide (2)

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit M et N appartenant à $\mathcal{C}$ telles que
$AM = MA$ et $AN = NA$

$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN$ par distribution et linéarité de la distribution

$= \lambda(MA) + NA$

$= (\lambda M + N) A.$ par linéarité de la factorisation.

Donc $A(\lambda M + N) = (\lambda M + N) A$, $\lambda M + N \in \mathcal{C}$,
Donc $\mathcal{C}$ est stable par combinaison linéaire. (3)

Alors, par ① ② et ③, $\mathcal{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4.a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$AM = MA \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ d = a \\ b = -c \end{cases}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

4.b) Donc $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$

$$= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \{ M = aI_2 + bA, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \mathrm{Vect}(I_2, A)$$

Or I_2 et A sont non colinéaires, donc la famille (I_2, A) est libre et génératrice de $\mathcal{C}$.

Donc (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}$.

5. $(M,N) \in \mathcal{C}$. $\iff$ $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus M = aA + bI_2$

$\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2 \setminus N = cA + dI_2$

5. a) $MN = (aA + bI_2)(cA + dI_2)$

$= a \times c\, A^2 + adA + bcA + bd\, I_2$

$= -acI + adA + bcA + bd\, I_2$ (car $A^2 = -$

$= (ad + bc)A + (bd - ac) I_2$

Donc le produit MN s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_2. Alors $MN \in \mathcal{C}$.

5. b) D'une part $MN = (ad + bc)A + (bd - ac) I_2$.

D'autre part $NM = (cA + dI_2)(aA + bI_2)$

$= ac\, A^2 + bcA + adA + bd\, I_2$

$= (bc + ad)A + bd\, I_2 - ac\, I_2$ car $A^2 = -I_2$

$= (ad + bc)A + (bd - ac) I_2$.

$= MN$

Donc $MN = NM$, M et N commutent

6) /

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 28	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2) Partie B)

7) $M = aI_2 + bA \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

7.a) $M^2 = (aI_2 + bA)(aI_2 + bA)$
$= a^2 I_2 + ab A + ba A + b^2 A^2$

$= a^2 I_2 + 2ab A - b^2 . I_2$ car $A^2 = -I_2$

$\Leftrightarrow \boxed{M^2 = (a^2 - b^2) I_2 + 2ab A}$

7.b) $P(M) = O_2 \Leftrightarrow M^2 + uM + vI_2 = O_2$
$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) I_2 + 2ab A + u(aI_2 + bA) + vI_2 = O_2$

$\Leftrightarrow (2ab + ub)A + (a^2 - b^2 + ua + v) I_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - b^2 + ua + v & -(2ab + ub) \\ 2ab + ub & a^2 - b^2 + ua + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v = 0 \\ 2ab + ub = 0 \end{cases}$

Partie C)

10) $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AMA \end{cases}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)A \\ &= (\lambda AM + AN)A \\ &= \lambda AMA + ANA \\ &= \lambda \varphi(M) + \varphi(N) \end{aligned}$$

Donc φ est stable par combinaison linéaire.
De plus, tout produit de 2 matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donne une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Donc $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $AMA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Donc φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est un endomorphisme

11. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(AMA)$

$$\begin{aligned} &= A(AMA)A \\ &= A^2 M A^2 \\ &= -I_2 M(-I_2) \\ &= M. \end{aligned}$$

Donc $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\varphi \circ \varphi(M) = M \Leftarrow$, $\varphi \circ \varphi = id$, l'application identité.

Or par unicité de l'inverse, φ est bijectif.
et $\varphi^{-1} = \varphi$.

12. a) $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= -E_4$

$\varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= E_3$

$\varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= E_2$

$\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= -E_1$

Donc $B = \mathrm{Mat}(\varphi, (E_1, E_2, E_3, E_4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

car $\varphi(E_1) = -E_4$, $\varphi(E_2) = E_3$, $\varphi(E_3) = E_2$, $\varphi(E_4) = -E_1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12.b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B est symétrique donc B est diagonalisable.

Or $\varphi \circ \varphi = id$, donc $B^2 = I_4$

$\Leftrightarrow B^2 - I_4 = 0_4$

Donc $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B.
$= (X-1)(X+1)$

Or $P(X) = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -1$
Donc $Sp(B) \subset \{-1; 1\}$.

-1 est bien valeur propre de B s'il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(B + I_4)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer donc $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $-1 \in Sp(B)$.

1 est valeur propre de $B \Leftrightarrow \exists\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(B - I_4)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(**)$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - t = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - t = 0 \end{cases}$$

Le système n'est pas de Cramer donc $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $1 \in Sp(B)$

Alors $\boxed{Sp(B) = \{-1 ; 1\}}$

12.c) On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(B + I_4)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -z \\ (t, z) \in (\mathbb{R}^*)^2 \end{cases}$$

Donc $\left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ x \end{pmatrix}, (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \right\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de B associés à -1.

Une base du sous-espace propre est donc $\boxed{E_{-1}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(B - I_4)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ z = y \\ (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \end{cases}$$

Donc $\left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \right\}$ forme l'ensemble des vecteurs propres de B associés à 1.

Une base du sous-espace propre est $\boxed{E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

Exercice 3)

Partie A)

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k prend des valeurs entre 1 et N. Il y a N numéros possibles à chaque tirage puisque l'on remet les boules dans l'urne.

Alors $X_k(\Omega) = [\![1, N]\!]$

et X_k suit une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$

$$\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])}$$

2) Cette fonction permet de s'assurer que l'entier x soit dans la liste L. Si le booléen " x in L " est faux donc si x n'appartient pas à L, alors x est rajouté à la fin de la liste L. Si x est déjà dans la liste, donc si " x in L " == Faux n'est pas vérifié, la liste n'est pas modifiée.

3.
```
import numpy.random as rd

def simul_T(N,i):
    L=[]
    k=0
    while len(L) < i
        x= rd.randint(1, N+1)
        ajout(L,x)
        k= k+1
    return(k)
```

4.
```
S=0
for k in range(100):
    S= Simul_T(3,2) + S
print(S/100)
```

Ce résultat représente la moyenne empirique de la variable T_2.

Partie B)

5) Si la variable X_k prend la même valeur à chaque tirage, alors on n'obtient jamais deux numéros distincts. Il faut au moins deux tirages pour obtenir 2 numéros distincts.

Donc $\boxed{T_2(\Omega) = [\![2\,;+\infty[\![}$

6. $[T_2=k] \cap (X_1=1) = [X_1=1] \cap [X_2=1] \cap [X_3=1] \cap \ldots \cap [X_{k-1}=1] \cap [X_k \neq 1]$

$$= ([X_k \neq 1]) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} [X_j = 1] \right)$$

$[T_2=k] \cap [X_1=1]$ correspond à l'évenement où les k-1 premiers tirages donnent 1, et le k^o tirage donne pour la première fois 2 ou 3.

6.b) Donc $[T_2=k] \cap [X_1=1] \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$ puisque ~~il se~~ on cherche le k tel que X_k ne vaut pas 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et X_j $\forall j \in [\![1;k-1]\!]$ vaut 1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

Donc $\boxed{\mathbb{P}([T_2=k] \cap [X_1=1]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}}$

6.c) Par la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements $([X_1=1], [X_1=2], [X_1=3])$

$\mathbb{P}(T_2=k) = \mathbb{P}([T_2=k] \cap [X_1=1]) + \mathbb{P}([T_2=k] \cap [X_1=2]) + \mathbb{P}([T_2=k] \cap [X_1=3])$

$$= \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3}$$

$$= 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{k-1}}$$

$$= \frac{2}{3^{k-1}}$$

Donc $\boxed{\forall k \geq 2 \quad \mathbb{P}(T_2=k) = \frac{2}{3^{k-1}}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 28	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) T2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général

$kP(T_2 = k)$ converge absolument.

Or $\forall k \geq 2$, $kP(T_2=k) \geq 0$, il suffit de montrer que la série de terme général $k\frac{2}{3^{k-1}}$ converge.

Or on reconnaît la série géométrique dérivée de terme général $k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ avec $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Donc T2 admet une espérance et

$$\mathbb{E}(T_2) = \sum_{k=2}^{+\infty} 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 1\left(\frac{1}{3}\right)^0\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1\right)$$

$$= \frac{2\times 9}{4} - 2$$

$$= \frac{9}{2} - 2$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{E}(T_2) = \frac{5}{2}}$$

8. $Z_2 = T_2 - 1$, Z_2 ~~donc~~ représente le nombre de tirage nécessaire avant ~~de~~ d'obtenir le premier numéro différent des autres

$Z_2(\Omega) = [\![1; +\infty[\![$
Soit $k \in [\![1; +\infty[\![$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = k) &= \mathbb{P}(T_2 - 1 = k) \\ &= \mathbb{P}(T_2 = k+1) \\ &= \frac{2}{3^k} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{k-1}} \\ &= p\, q^{k-1} \end{aligned}$$

Où p correspond à la probabilité ~~de~~ d'obtenir un numéro pas encore obtenu donc $p = \frac{2}{3}$ et q correspond à la probabilité de tomber sur le même unique numéro $k-1$ une fois.

Donc $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$

On sait par ailleurs que $\mathbb{E}(Z_2) = \frac{3}{2}$

$\iff \mathbb{E}(T_2 - 1) = \frac{3}{2}$

$\iff \mathbb{E}(T_2) = \frac{3}{2} + 1$ par linéarité de l'espérance

$\iff \mathbb{E}(T_2) = \frac{5}{2}$, on retrouve bien l'espérance de T_2.

$$V(Z_2) = \frac{1/3}{(2/3)^2}$$
$$= \frac{9}{3 \times 4}$$
$$= \frac{3}{4}$$

Donc $V(T_2 - 1) = \frac{3}{4}$

or par propriété de la variance, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
$V(aT_2 + b) = a^2 V(T_2)$

$$\boxed{\Longleftrightarrow V(T_2) = V(T_2 - 1) = \frac{3}{4}}$$

Partie C) 9. soit $i \in [\![2, N]\!]$ $Z_i = T_i - T_{i-1}$
Z_i ~~to~~ représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro inédit après que $i-1$ numéro distincts aient été tirés.

Donc ~~Zi~~ Z_i correspond à une suite éventuellement infinie d'épreuves indépendantes de Bernoulli définie par $B_j = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^\circ \text{ numéro distinct est pioché} \\ 0 & \text{si on tire un numéro déjà tiré} \end{cases}$

Or il y a N numéros en tout et $i-1$ distincts ont déjà été tirés donc il reste $N-(i-1)$ numéros encore jamais obtenus.

Donc $P(B_j = 1) = \frac{N-i+1}{N}$

$$\boxed{\text{Donc } Z_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{N-i+1}{N}\right)}$$

9. b) $\boxed{E(Z_i) = \frac{N}{N-i+1}}$

si $i = 1$, $E(Z_1) = \frac{N}{N-1+1} = \frac{N}{N} = 1$ or $Z_1 = 1$ à coup sur donc son espérance vaut 1

La formule est vraie pour 1.

9. b)

$$V(Z_i) = \frac{1 - \left(\frac{N-i+1}{N}\right)}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{(N - N + i - 1)}{N} \times \frac{N^2}{(N-i+1)^2}$$

$$= \frac{(i-1)N}{(N-i+1)^2}$$

11. ~~Soit $i \in [\![1, N]\!]$~~

11.a) Soit $(l, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $\quad \mathbb{P}[(Z_2 = l) \cap [Z_3 = k)]$

$= \mathbb{P}(Z_2 = l)\,\mathbb{P}(Z_3 = k)$ car les $Z_1, \dots Z_N$ sont indépendants

$$\mathbb{P}((Z_2 = l) \cap [Z_3 = k)) = \frac{N-2+1}{N}\left(1 - \frac{N-2+1}{N}\right)^{l-1}\left(\frac{N-3+1}{N}\right)\left(1 - \frac{N-3+1}{N}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{l-1}\frac{N-2}{N}\left(\frac{2}{N}\right)^{k-1}$$