Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 29	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques T ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

+ Ex 1

1/ a On a $t \mapsto -\sqrt{t}$ est une fonction polynome de degres $\frac{1}{2}$ donc elle est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

et on a $t \mapsto e^t$ est une fonction exponentielle donc elle est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition $h : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

tq $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$: $h(t) = e^{-\sqrt{t}} \Leftrightarrow \boxed{h'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}}$.

b) $\forall y \geqslant 0$: $\int_0^y g(t)\, dt = -\int_0^y -\frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \cdot dt$. par linéarité

$= -\int_0^y h'(t) \cdot dt$

$= -[h(t)]_0^y$.

$= -e^{-\sqrt{y}} + e^0$

$= e^{-\sqrt{y}} + 1$.

$$\boxed{\text{donc } \int_0^y g(t) \cdot dt = e^{-\sqrt{y}} + 1}$$

2 Montrons que f est une densité de proba.

+ <u>Positivité</u>

si $t \leq 0$: $f(t) = e^t > 0$ car c'est une fonction exponnentielle.

si $t > 0$: $f(t) = 0 \geq 0$ car c'est une fonction nulle

donc $\forall t \in \mathbb{R}$: $f(t) \geq 0$.

+ <u>Continuité</u>

si $t \in]-\infty ; 0]$: $f(t) = e^t$ elle est continue sur $]-\infty ; 0]$ (fonction exponnentielle).

si $t \in]0 ; +\infty[$: $f(t) = 0$ elle est continue (f est nulle) sur $]0 ; +\infty[$.

donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf <u>peut-être en 0</u>

+ Calcul $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt$.

On a $\int_0^{+\infty} f(t).dt = 0$ <u>converge</u>.

soit $N \in \mathbb{N}$: $\int_N^0 f(t).dt = [e^t]_N^0 = e^0 - e^N$
$= 1 - e^N$.

$\lim\limits_{N \to -\infty} e^N = 0$ donc $\lim\limits_{N \to -\infty} \int_N^0 f(t).dt = 1$.

donc $\int_{-\infty}^0 f(t).dt = 1$ <u>converge</u>.

D'après Shasles : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt = \int_{-\infty}^0 f(t).dt + \int_0^{+\infty} f(t).dt$
$= 1$.

Les 3 conditions étant accomplies f est bien une

3/

densité".

3) soit $x \in \mathbb{R}$.

si $x \geq 0$: $F_X(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$.

relation de Charles : $= \int_{-\infty}^{0} f(t).dt + \int_{0}^{x} f(t).dt$

$= 1 + 0$.

$= 1$. d'après la question précédente.

donc $\boxed{\forall x \geq 0 : F_X(x) = 1}$

b) si $x < 0$: $F_X(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$.

$= \int_{-\infty}^{x} e^t .dt = e^x$ d'après le calcule de l'intégrale.

donc $\boxed{\forall x < 0 : F_X(x) = e^x}$..

4 a) soit $x \in \mathbb{R}$:

$G(x) = G(-X \leq x) \Leftrightarrow G(X \geq -x)$.

$\Leftrightarrow 1 - G(X \leq -x)$

$\Leftrightarrow 1 - F_X(-x)$.

b) on a d'après la question (3b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0. \\ e^x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 19	Session : 2024

Épreuve de : Math

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc $G_{-X}(x) = 1 - F_X(-x)$.

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } -x \geq 0. \\ 1 - e^{-x} & \text{si } -x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0. \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

la Fonction de repartition de $G(x)$ coïncide avec la fonction de repartition d'une loi exponentielle de paramètre 1 :

c) $E(X) = \frac{1}{a} = 1$ et $V(X) = \frac{1}{1^2} = 1$.

5 a)

$E(Y) = E(X^2) = E(X \times X) = 1$.

soit $y \in \mathbb{R}$ on note $H_Y(y)$ la fonction de répartition de Y.

$H_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$.

$\Rightarrow$ si $y \in [0;+\infty[$:

$P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$.

$\Rightarrow$ si $y \in]-\infty;0[$:

$P(X^2 \leq y) = 0$.

donc $H_Y(y) = \begin{cases} e^{\sqrt{y}} & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$

c) Montrons que ~~X~~ admet une densité.

$H'_Y(y) = h(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y < 0 \\ 0 & y \geq 0 \end{cases}$

car on a d'après 1(a) $(e^{\sqrt{y}})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{y}}$

Montrons que h est une densité de proba.

+ continuité et positivité.

si $y \geq 0$: $h(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \geq 0$ est continue sur $[0;+\infty[$: (produit de fct rationnelle et exponnentielle).

si $y < 0$: $h(y) = 0$ fonction nulle donc elle est positive et continue sur $]-\infty; 0[$.

donc $h(y) \geq 0$ et h est continue en $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0.

+ Calcul : $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \cdot dy$.
soit $N \in \mathbb{R}$.

$$\int_{N}^{0} h(y) \cdot dy = \int_{N}^{0} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{\sqrt{y}}$$

$$= \left[e^{\sqrt{y}} \right]_{N}^{0} = e^{0} - e^{\sqrt{N}}.$$

$\lim\limits_{N \to -\infty} e^{\sqrt{N}} = 0$ donc $\lim\limits_{N \to -\infty} \int_{N}^{0} h(y) = 1$.

donc $\int_{-\infty}^{0} h(y) = 1$. converge

et on a $\int_{0}^{+\infty} h(y) = 0$ converge.

donc D'après Chasles : $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y) = 0$.

les 3 conditions étant accomplie h est bien une densité.

Ex 2 :

1 : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix}$.

7/

$$A^2 - 8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 8 & 24 & 8 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= -12I.$$

~~b) On procede par pivot de Gausse.~~

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \quad \cancel{L_1 \to L_1 - L_2.}$$

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \quad \cancel{L_1 \to L_1 + L_3.}$$

~~b) on a $A^2 - 8A = -12I \iff A^2 - 8A + 12I = 0$.~~
~~donc $P(X)$ est un polynome annulateur de A.~~
~~tq $P(X) = X^2 - 8X + 12$~~

~~$P(X) = 0 \iff X^2 - 8X + 12 = 0$.~~
~~Le trinôme $X^2 - 8X + 12$ est de determinant~~

b) on a $A^2 - 8A = -12I \iff A(A - 8I) = -12I$.

$$\iff A \times \frac{-1}{12}(A - 8I) = I.$$

$\boxed{\text{donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{-1}{12}(A - 8I)}$

8/

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 29	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Math.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) Determinons les valeures propres de A.

On a $A^2 - 8A + 12I = 0$.
donc on note $P(X) = X^2 - 8X + 12$ un polynôme annulateur de A.
le trinome $X^2 - 8X + 12$ de determinent $\Delta = 16$.
a det les solutions suivante.

$$x_1 = \frac{8+\sqrt{16}}{2} = \frac{8+4}{2} = 6.$$

$$x_2 = \frac{8-\sqrt{16}}{2} = \frac{8-4}{2} = 2.$$

donc $S_{P(x)} = \{6, 2\}$.

et le valeures propres eventuelles de A sont 6 et 2.

2a $AX = 6X \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix}$.

on résoud le system

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6x. \\ x + 3y + z = 6y \\ 2x + 2y + 4z = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0. \\ 2x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\begin{cases} y = 3x - z \\ x - 9x + 3z + 3z = 0 \\ x + 6x - 2z - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - z \\ -8x + 4z = 0 \\ 7x - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - z \\ x = -4z/-8 \\ 7x - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3z/2 - z \\ x = z/2 \\ 7z/2 - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z/2 \\ x = z/2 \end{cases}$$

19/

On procède par pivot de gauss :

$$\begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 5y - 3z = 0. \end{cases} \qquad L_3 \to L_3 - L_2.$$

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 5y - 3z = 0. \end{cases} \qquad L_1 \to L_1 - L_2.$$

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \to 3L_2 + L_3.$$

$$\begin{cases} -7x = 0. \\ \\ \end{cases} \qquad L_1 \to L_1 - 2L_2$$

b) $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

on a d'après la question 2(a) et b.

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc 2 est une valeur propre associé au vecteur propre non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc ~~1~~ est une valeur propre associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc 6 est une valeur propre associé au vecteur non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

11/

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

Donc $P \times Q = 4I \Leftrightarrow P \times \frac{1}{4} Q = I$.

alors P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4} Q$.

b. $AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$P \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

donc $AP = PD \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ car P inversible d'après la question précédente.

donc $A = PDP^{-1}$ tq P est diagonale avec les valeurs propres respective aux vecteures

c) Demontrons par Recurrence $\forall n \in \mathbb{N} : A^n = PD^nP^{-1}$.

+Initialisation :

pour $n = 0$: $A^0 = PD^0P^{-1} = I$ vrai
donc la proposition est initialisée.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 29	**Session :** 10/4

Épreuve de : Math

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

+ Heridité :

soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$

et Ma $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

On a d'après l'hypothèse de recurrence.

$$A^n = PD^nP^{-1} \iff A^n \times A = PD^nP^{-1}\ A$$
$$\iff A^{n+1} = PD^nP^{-1}\ PDP^{-1} \quad (\text{qst precedente})$$
$$\iff A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc d'après le raisonnement par recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$:
$A^n = PD^nP^{-1}$.

d. $P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^n & 2^n & 2^n \\ 6^n & -2^n & 0 \\ 2.6^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

~~$P \times D^n \times P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} & & 2^n \\ & & 0 \\ & & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$~~

~~$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} & 2^n + 2^n \\ & 2^n + 2^n \\ & 2^{n+1} - 2^n(-3) \end{pmatrix} = 2^{-2} \times 2^n$~~

$$P \times D^n \times Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6^n & 2^n & 2^n \\ 6^n & -2^n & 0 \\ 2.6^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2^{-2}\begin{pmatrix} \cancel{6^n+2^n+2^{n+1}} & & \\ \vert & \vert & 6^n+2^n+2^n.(-2) \\ \vert & \vert & 6^n-2^n \\ \vert & \vert & 2.6^n+2^n(-2) \end{pmatrix}$$

$$= 2^{-2} \times 2^n \begin{pmatrix} \vert & \vert & 3^n+1-2 \\ \vert & \vert & 3^n-1 \\ \vert & \vert & 2(3^n+1) \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-2}\begin{pmatrix} \vert & \vert & 3^n-1 \\ \vert & \vert & 3^n-1 \\ \vert & \vert & 2(3^n+1) \end{pmatrix}.$$

donc la dernière colonne de A^n est bien

$$2^{n-2}\begin{pmatrix} 3^n-1 \\ 3^n-1 \\ 2(3^n+1) \end{pmatrix}.$$

4) a) sachant quelle lit 1 livre dinasaure le jour 1.

donc $d_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

donc $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) on a c_n, p_n, d_n un systeme de proba Totale on aplique la formule des probas totales:

$c_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3} d_n + \frac{1}{2} c_n$.

$d_{n+1} = \frac{2}{3} d_n + \frac{1}{6} c_n + \frac{1}{6} p_n$.

$p_{n+1} = \frac{1}{3} d_n + \frac{1}{6} c_n + \frac{1}{2} p_n$.

or $\frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_n + \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} d_n. \\ \frac{1}{6} c_n + \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{6} d_n \\ \frac{1}{3} c_n + \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} d_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ p_{n+1} \\ d_{n+1}. \end{pmatrix}$

15/

Donc $\boxed{X_{n+1} = \frac{1}{6} A X_n}$.

c) Raisonnons par recurrence et Λq $\forall n \in \mathbb{N}$:

$X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$.

+ Initialisation :

pour $n = 1$ $X_1 = \frac{1}{6^0} A^{1-1} X_1 = X_1$ vrai

donc la proposition est initialisée.

+ Heridité

soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que $X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$.

et Λq $X_{n+1} = \frac{1}{6^n} A^n X_1$.

on à d'après la qst precedente :

$X_{n+1} = \frac{1}{6} A X_n \iff X_{n+1} = \frac{1}{6} \cdot A \times \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$

$\iff X_{n+1} = \frac{1}{6^n} A^n \cdot X_1$.

D'après le raisonnement par recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$:

$X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1$.

d) on a d'après la question precedente.

$X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1 \iff \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} = \left(2^{n-3} \frac{1}{6^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 \\ 2(3^{n-1}+1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

16/

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 29	Session : 2024

Épreuve de : Math.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{2^{n-3}}{6^{n-1}} \times \begin{pmatrix} 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 \\ 2(3^{n-1}+1) \end{pmatrix}$$

donc $d_n = \frac{2^{n-3}}{6^{n-1}} \times 2(3^{n-1}+1)$

$$= 2^{-1} \times \frac{2^{n-2}}{6^{n-1}}(3^{n-1}+1)$$

$$= 2^{-1} \times \frac{2^n 2^{-2}}{6^n \times 6^{-1}}(3^{n-1}+1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2^n}{6^n} \times \frac{1}{4} \times 6\,(3^{n-2}+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ car $\left|\frac{1}{3}\right| < 0$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}$.

Ex3.

Partie 1.

1 a on admet $n = 2N$ c'est à dire que le nombre de boules dans l'urne st paire

donc le il y'a $\frac{n}{2}$ numéros pairs dans l'urne.

b) X st la variable aleatoire egale au mombre de succes (le numero de la boule tirage s) lors de la repetition de n épreuves de Bernoulli independants.

donc $X(\Omega) = [1, n]$.

ta

K	1	2	......	n
$P(X=k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$.

donc X suit une loi uniforme de parametre $\frac{1}{n}$.

Y st la variable aleatoise egale soit a 1 si le nombre st paire ou 0 si impaise.

donc $Y(\Omega) = [0, 1]$.

et $P(Y=1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y=0) = (1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

donc Y suit une loi de Bernoulli au succes egale à $\frac{1}{2}$ [car il y'a autant de paire que d'impaise $(n=2N)$]

18/

$E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

$E(Y) = \frac{1}{2}$ et $V(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

2

```
Import numpy as np.
Import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
    n= 2*N
    X= rd.randint (1,n+1)
    Y= rd.randint (0, 2).
    return X+Y.
```

3) ~~P(X=4)∩P(Y=4)~~

X comptabilise le numero du premier tirage qui est independant et dont la boule est remise avant d'effectuer le second qui est comptabiliser par Y.

donc les evenements sont independants car le resultat de l'un ne touche pas l'autre.

4 $X+Y(\Omega) = [1; n+1]$ car $Y(\Omega) = [0,1]$ et $X(\Omega) = [1; n]$. donc en sommant les termes 1 à 1 on peut pas obtenir un chiffre inferieur à 1 ni un chiffre superieur à $(n+1)$.

5/a. ~~[redacted]~~.

c'ad $[X+Y=1]$ est realisé si et seulement si on pioche le numero 1 au premier tirage et un nombre impaire au second.

cad on tire 1 puis 3 ou 1 puis 5 ou 1 puis 7 jusqu'a 1 puis $2n-1$.

$$P(X+Y=1) = P(X=1) \cap P(Y=0)$$
$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2n}.$$

$$P(X+Y=n+1) = P(X=n) \cap P(Y=1)$$
$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}.$$
$$= \frac{1}{2n}.$$

5 b) on a $[Y=1]$ et $[Y=0]$ est un système complet d'evenement. d'après la formule des probas totales:

$$P(X+Y=k) = P(X=k) \cap P(Y=0) \cup P(X=k-1) \cap P(Y=1)$$

par independance et incompatibilité des lancers

$$P(X+Y=k) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}.$$
$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}.$$
$$= \frac{2}{2n}$$

$$\boxed{P(X+Y=k) = \frac{1}{n}}.$$

c) $P(X+Y=1) + P(X+Y=2) + \dots + P(X+Y=k+1)$ represente toutes les possibilité de la proba de l'evenemt $[X+Y=k]$ or $X+Y(\Omega) = [1;n+1]$.

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} P(X+Y=k) = \underline{1}$ (Totale des probas)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 29	Session : 2024

Épreuve de : Math.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6/ a $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance.

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{n+2}{2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} E(X+Y) = +\infty$$

~~donc les probabilité ne suit~~

La moyenne de tous les evenets de $(X+Y)$ s'accroit au fils des tirages.

6/ b. 4,939 est la moyenne lorsqu'on effectue 1000 tirages

Partie II :

1, a on sait que l'urne contient autant de paire que d'impaire soit N de chaque.

Et a le nombre totale des billes est pair donc qu'on on effectue 1 tirage sans remise, le nombre totale de billes devient impaire : $2N-1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

si le nombre tiré est paire alors il reste $N-1$ paire dans l'urne.

si le nombre tiré est impaire alors il reste N paire dans l'urne.

donc $P_{(X \text{ paire})}(Y=1) \quad \dfrac{N}{2N-1}$ → Nombre totale. après 1 tirages

$$P_{(X \text{ impaire})}(Y=1) = \frac{N-1}{2N-1}.$$

b) les evenements (X est paire) et (X est impaire) representent un systeme complet d'evenement d'après la formule des probas totales:

$P(Y=1) = P(X \text{ paire} \cap Y=1) \cup P(X \text{ impaire} \cap Y=1)$

par non independance et incompatibilité:

$$P(Y=1) = P(X \text{ paire}) \times P_{X \text{ paire}}(Y=1) + P(X \text{ impaire}) \times P_{X \text{ impaire}}(Y=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{N}{2N-1} + \frac{1}{2} \times \frac{N-1}{2N-1}.$$

$$= \frac{N}{4N-2} + \frac{N-1}{4N-1}.$$

$$P(Y=1) = \frac{2N-1}{4N-2}.$$

$$P(Y=0) = 1 - \frac{2N-1}{4N-2} = \frac{2N-1}{4N-2}$$

21/

Y suit toujour une loi de Bernoulli tq $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2N-1}{4N-2}\right)$. $E(Y) = \frac{2N-1}{4N-2}$

2) a) l'evenet $(X=1)$ et $(Y=1)$ est realisé si on tire tabille de fois un chiffre paire sauf

$$P((X=1)\cap(Y=1)) = P(X=1) \cap P_{(X=1)}(Y=1).$$
$$= \frac{1}{N} \times \frac{N-1}{2N-1}.$$
$$= \frac{N-1}{N(2N-1)}.$$

b Elles ne sont pas independantès car on ne remet pas la boule donc le numéro de boules diminuent en fonctions des evenet precedent (or X est l'evenet precedent de Y).

3) $E(X+Y) = E(X) + E(X)$ par linéarité

$$= \frac{1}{N} + \frac{2N-1}{4N-2}.$$

$$= \frac{4N-2+2N^2-N}{N(4N-2)}$$

$$E(X+Y) = \frac{2N^2+3N-2}{N(4N-2)}.$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{2N^2}{4N^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

donc $\lim_{N\to+\infty} E(X+Y) = \frac{1}{2}$

21/

cela signifie que la moyenne de ces tirages tend vers $\frac{1}{2}$ ce qui est inferieur à la version precedente où $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X+Y) = +\infty$.

donc la premiere version permet de gagner plus de points.

Ex 4 :

1)

$$v_3 = \frac{-v_1 + 3v_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1.$$

$$v_4 = \frac{-2v_2 + 5v_3}{3} = \frac{-2+5}{3} = 1.$$

b) Raisonnons par recurrence et Mq $\forall n \in \mathbb{N}$:
$v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$. ~~Vn+1~~:
+ Heridité :
On a $v_1 = 1$ et $v_2 = 1$ vraie
donc la proposition est innitialisée.

+ Innitialisation
soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que $v_n = v_{n+1} = 1$.
et Mq $v_{n+2} = 1$.

on a $v_{n+2} = \frac{-nv_n + (2n+1)v_{n+1}}{n+1}$

$v_{n+2} = \frac{-n + (2n+1)}{n+1}$

$v_{n+2} = \frac{n+1}{n+1} = 1.$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 29	Session : 2024
Épreuve de : Math.		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$:
$v_{n+1} = v_n = 1$.

c) i. $S_{2N} - S_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

$$= \left(\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{N}} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{+} \dots + \cancel{\tfrac{1}{N}}\right)$$

$$= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \dots + \frac{1}{2N}$$

tq $N \in \mathbb{N}^*$ alors la serie $S_{2N} - S_N$ est minorée par $\frac{1}{1+1}$ (le plus petit terme de la some).

donc $S_{2N} - S_N \geqslant \frac{1}{2}$.

ii. $S_{N+1} - S_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

$$= \frac{1}{N+1} > 0 \text{ car } N \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante
~~ser~~ mais elle est minorée par $\frac{1}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'après le théorème de la limite monotone la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente donc elle admet pas de limite finie.
Donc $\lim_{N\to+\infty} S_n = +\infty$.

iii). on a la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n v_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

~~soit~~ $\cancel{N \in \mathbb{N}^* \ \sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n}}$

on pose $N\in\mathbb{N}^*$ tq $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = S_n$.

or on sait que $\lim_{N\to+\infty} S_n = +\infty$.

donc la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n v_n}$ est divergente

la variable aléatoire X_v existe si et seulement si $P(X_v=n)\geq 0$ et $\sum_{n\geq 1} P(X_v=n) = 1$.

or on a $P(X_v=n) = \frac{\alpha}{n v_n} > 0$.

Mais $\sum_{n\geq 1} P(X_v=n) = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha}{n v_n}$.

$= \alpha \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ par linéarité

or on sait que cette serie converge (donc elle est différente de 1).

Alors la variable aléatoire n'existe pas.

2) $$u_3 = \frac{\ln(1+1) - u_1 + (3u_2)}{2}$$

$$= \frac{\ln 2 - 1 + 3}{2}$$

$$u_3 = \frac{\ln 2 + 2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2) + 1 + 0\ln(3)}$$

$$u_4 = \frac{\cancel{u_2} - 2u_2 + (5u_3) + \ln(3/2)}{3}$$

$$u_4 = \frac{3 + \ln(3) - \ln(2)}{3}$$

$$\boxed{u_4 = \frac{1}{3}\ln(3) - \frac{1}{3}\ln(2) + 1.}$$

3)
```
import numpy as np.
def suite U(N):
    u = np.ones(N)
    For k in range(1, N-1)
        u(k+1) =
    return u.
```

4) a) $$w_1 = \frac{e^{1}(u_2 - u_1)}{1} = 1.$$

b) $$\cancel{w_{n+1} - w_n = \frac{e^{n+1}(u_{n+2} - u_{n+1})}{n+1} - \frac{e^{n}(u_{n+1} - u_n)}{n}}$$

$$\cancel{= \frac{ne^{n+1}(u_{n+2} - u_{n+1}) - (n+1)e^{n}(u_{n+1} - u_n)}{n(n+1)}}$$

$=$

25/

b) Raisonnons par récurrence et montrons que w_n est constante

+ <u>Initialisation :</u>

on a $w_1 = 1$ vraie la proposition est initialisée

+ <u>Hérédité</u>

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que w_n est constante égale 1.
et montrons que $w_{n+1} = 1$.

$$w_{n+1} = \frac{e^{n+1}(u_{n+2} - u_{n+1})}{n+1}$$

c) ~~$w_n = \frac{e^n(u_{n+1} - u_n)}{n}$~~

~~$\iff n w_n = e^n(u_{n+1} - u_n)$~~

~~$\iff n w_n = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$~~

~~$\iff n w_n =$~~

c) On a w_n est constante et égale à 1.

donc $\frac{e^n(u_{n+1} - u_n)}{n+1} = 1 \iff e^{n(u_{n+1}-u_n)} = n$

$\iff n(u_{n+1} - u_n) = \ln(n)$

$\iff$ [illegible]

$\iff u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n)}{n}$

d) on a $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

$\iff \sum_{n=2}^{N-1} u_{n+1} - u_n = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}$

$u_N - u_2 = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}$

$$u_N = 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}.$$

26/

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 29	Session : 2024

Épreuve de : Math

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5/ a/ $f : \mathbb{R}_+ \quad t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est dérivable

$f(t) = \frac{\ln(t)}{t} \iff f'(t) = \frac{\frac{t}{t} - \ln t}{t^2}$

$\iff f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$

	0	e	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		$\nearrow$	

f est croissante sur $[3;+\infty[$

car $f'(x) \geq 0$ sur $[3;+\infty[$.

$\forall k \in [3;+\infty[$.

b) $k < t < k+1 \iff \frac{1}{k+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{k}$.

$\iff \frac{\ln(k+1)}{k+1} < \frac{\ln(t)}{t} < \frac{\ln k}{k}$

par passage à la fonction car croissante sur $[3;+\infty[$. $\iff f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

par croissance de l'integrale. $\Longleftrightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t).dt \leq f(k$.

c) $\sum_{k=4}^{N} f(k) \leq \sum_{k=\cancel{3}}^{N} \int_{\cancel{k}}^{k+1} f(t).dt \leq \sum_{k=\cancel{3}}^{N} f(k)$.

par croissance de la fonction sur $[3;+\infty[$.

or $\sum_{k+1=3}^{N} \int_{k}^{k+1} f(t).dt = \int_{3}^{4} f(t).dt + \int_{4}^{5} f(t).dt \ldots$

$\int_{N-1}^{N} f(t).dt$.

d'apres la relation de chalses:

$$\sum_{k=4}^{N} \int_k^{k+1} f(t).dt = \int_3^N f(t).dt.$$

donc $\sum_{k+1=3}^{N} f(k+1) \leq \sum_{k=3}^{N} \int_3^N f(t).dt \leq \sum_{k=3}^{N-1} f(k)$.

donc $\sum_{k=4}^{N} f(\cancel{k+1}) \leq \int_3^N f(t).dt \leq \sum_{k=3}^{N-1} f(k)$.

changt de variable.

28/

d) $\sum_{k=4}^{N} f(k) \le \int_3^N f(t)\,dt \le \sum_{k=3}^{N-1} f$

6) a) $((\ln(t))^2)' = 2\cdot\frac{\ln t}{t}$.

b) $\int_3^N f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_3^N 2\cdot\frac{\ln t}{t}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(t)^2\right]_3^N$.

$= \frac{1}{2}\ln(N)^2 - \frac{1}{2}\ln(3)^2$.

7) ona $1+f(2)+\int_3^N f(t)\,dt = 1+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln N^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$.

$\lim_{N\to+\infty} 1+f(2)+\int_3^N f(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} 1+\frac{\ln 2}{2}+\frac{(\ln N)^2}{2}-\frac{(\ln 3)^2}{2}$

$= \lim_{N\to+\infty} \frac{2+\ln 2+(\ln N)^2-(\ln 3)^2}{2}$

29/

8a) $\int_2^A \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{(\ln t)^2} = \int_2^A (\ln t)' \times \frac{1}{(\ln t)^2} \, dt$

$= \left[\frac{-1}{(\ln t)} \right]_2^A$

$= \frac{-1}{\ln A} - \frac{1}{\ln 2}]$.