ECRICOME PREPA 2024 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique

Note de délibération : 18.54 / 20

Numéro d'inscription	
Né(e) le	
Nom	
Prénom (s)	

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 8

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

Ex 1 :

1/a $M = A - I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $2M + I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$(2M+I)^2 = (2M+I) \times (2M+I) = \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 36 \\ 24 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(2M+I)^3 = (2M+I)^2 \times (2M+I) = \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} -3 & -6 & 36 \\ 24 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

18.54 / 20

b) $2M + I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(2M+I)^2 = (2M+I)\times(2M+I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 20 \\ 16 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

$(2M+I)^3 = (2M+I)^2 \times (2M+I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=$

Donc $(2M+I)^3 = 0$.

c) On a d'après la question precedente. $(2N+I)^3=0$.

$$(2N+I)^3=0 \iff (2N+I).(2N+I)^2=0.$$
$$\iff (2N+I)(4N^2+4N+I)=0$$
$$\iff 8N^3+8N^2+2N+4N^2+4N+I=0$$
$$\iff 8N^3+12N^2+6N=-I.$$
$$\iff N(8N^2+12N+6I)=-I.$$

d) On a d'après la question precedende:

$$N(8N^2+12N+6I)=-I.$$

donc $N(-8N^2-12N-6I)=I$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{donc on a } N\times N^{-1}=I \text{ alors } N \text{ est inversible} \\ \text{et } N^{-1}=-8N^2-12N-6I.\end{array}}$$

2) $$A\times X_n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -1 & 8\\ 4 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}r_n\\ s_n\\ t_n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-s_n+8t_n.\\ 4r_n+4s_n-4t_n\\ 2t_n\end{pmatrix}.$$

$$AX_n+B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}s_n+2t_n.\\ r_n+s_n-t_n.\\ \frac{1}{2}t_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}s_n+2t_n\\ r_n+s_n-t_n\\ \frac{1}{2}t_n+1\end{pmatrix}$$

or on a $\begin{cases} r_{n+1}=-\frac{1}{4}s_n+2t_n\\ s_{n+1}=r_n+s_n-t_n\\ t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n+1\end{cases}$

$\boxed{\text{donc } AX_n + B_n = X_{n+1}}$.

3) a $A \times C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ 32 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A \times C + B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = C.$

$\boxed{\text{Donc } AC + B = C}$.

b) $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -2 \\ -1 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$

On procède par pivot de gausse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/4 & 1/4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3/4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/4 & 1/4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & -7/4 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \to \frac{1}{4}L_2 + L_1.$$

c'est une materice triangulaire à diagonale non nul donc $(I-A)$ et inverssible.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 8

Numéro de table 1

Commencez à composer dès la première page...

3 c)

On note $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on cherche $X = AX + B$.

tel que : $AX + B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On résoud le système linéair suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}b + 2c = a. \\ a + b - c = b. \\ \frac{1}{2}c + 1 = c. \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4}b + 2c. \\ -\frac{1}{4}b + 2c - c = 0. \\ -\frac{1}{2}c + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4}b + 2c. \\ -\frac{1}{4}b + c = 0. \\ c = 2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4}b + 2c \\ -\frac{1}{4}b + 2 = 0 \\ c = 2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \times 8 + 2 \times 2. \\ b = 8 \\ c = 2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2. \\ b = 8 \\ c = 2. \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

donc $X = AX + B$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tq :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \\ c = 2. \end{cases} \quad \text{or} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc C est l'unique matrice collonne t.q :

$C = AC + B$

4. Raisonnons par récurrence et Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$X_n - C = A^n (X_0 - C)$.

+ Initialisation

pour $n = 0$: $X_0 - C = A^0 (X_0 - C)$.
$= X_0 - C$ vraie.

donc la proposition est initialisée.

+ Hérédité.

soit $n \in \mathbb{N}$: On suppose que $X_n - C = A^n (X_0 - C)$
et On montre que $X_{n+1} - C = A^{n+1} (X_0 - C)$.

On a d'après la question 2 : $X_{n+1} = AX_n + B$.

$X_{n+1} = AX_n + B \iff X_{n+1} - C = A \times X_n + B - C$

donc

$\iff X_{n+1} - C = A\left(A^n (X_0 - C) + C\right) + B - C$

Car d'après l'hypothèse de recurrence $X_n = A^n(X_0 - C) + C$

donc $X_{n+1} - C = A^{n+1}(X_0 - C)\ AC + B - C$

or d'après la question (3a) $AC + B = C$.

donc $X_{n+1} - C = A^{n+1}(X_0 - C)$

Alors d'après le principe de recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$:
$X_n - C = A^n(X_0 - C)$.

5) a. $2A - I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$(2A - I)^2 = (2A - I) \times (2A - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$(2A - I)^2 = (2A - I)^2 \times (2A - I) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{8}$

On a $(2A-I)^3 = 0$.
donc $P(X) = (2X-1)^3$ est un polynome annulateur de A.
donc : $P(X)=0 \iff (2X-1)^3=0$
$\iff 2X-1=0$ ou $2X-1=0$ ou $2X-1=0$
$\iff X=\frac{1}{2}$.

Puisque $\frac{1}{2}$ est la seule racine du polynome annulateur de A donc $\frac{1}{2}$ est la seule valeur propre possible.

b) i) on a supposé que la materice A est diagonalisable et on sait que $\frac{1}{2}$ est l'unique valeur propre de A (d'après la question precedente).

donc d'après le cours $A = R^{-1} D R$.
tq R est inversible et $D = \frac{1}{2} I$ (Materice diagonale avec les valeurs propres).

donc $A = R^{-1}(\frac{1}{2} I) R \iff R^{-1} A R = R^{-1} R^{-1} (\frac{1}{2} I) R.R.$
$\iff R^{-1} A R = \frac{1}{2} I$.

ii) supposons que A est diagonalisable on a déja monté que : $A = R^{-1} D R \iff A = D.I$.
$\iff A = \frac{1}{2} I$.

iii) supposons que A est diagonalisable.
donc $A = R^{-1} D R = \frac{1}{2} I$ d'après la question precedente.
or $A \neq \frac{1}{2} I$.
donc d'après le raisonnement par l'absurde A n'est pas diagonalisable

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 8

Numéro de table

Commencez à composer dès la première page

8) a $QP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$= \frac{12}{6} I = 2I.$

b) On a d'après la question précédente :
$QP = 2I \iff P \times \frac{1}{2} Q = I.$

donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} Q.$

c) $P \times T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cancel{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$P \times T \times Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$\boxed{\text{donc } \frac{1}{4} PTQ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

d) Raisonnons par recurrence et montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$A^n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot PT^nQ$

+ Initialisation

pour $n=0$: $A^0 = \frac{1}{2^0} PT^0Q$.

$A^0 = \frac{1}{2} P Q$. ~~mais~~

$A^0 = I$ car $P^{-1} = \frac{1}{2} Q$

Donc la proposition est initialisée.

+ Heridité :

soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que $A^n = \frac{1}{2^{n+1}} PT^nQ$.
et montrons que : $A^{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot PT^{n+1}Q$.

On a d'après l'hypothèse de recurrence:

$A^n = \frac{1}{2^{n+1}} PT^nQ \iff A^n . A = \frac{1}{2^{n+1}} PT^nQ . A$.

$\iff A^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} PT^nQ . \frac{1}{4} PTQ$.

$\iff A^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} PT^nQ . \frac{1}{2} . P.T. \frac{1}{2} Q$.

$\iff A^{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} PT^{n+1}Q$.

car $P^{-1} = \frac{1}{2} Q$.

D'après le raisonnement par recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = \frac{1}{2^{n+1}} PT^nQ$.

e). ~~Rdxx~~ Raisonnons par recurrence et montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

+ Initialisation

pour $n=0$: $T^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ vraie

donc la proposition et initialisé

+ Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et montrons que : $T^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

on a d'après l'hypothèse de recurrence :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T^n \times T = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 4n+2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & 2n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le raisonnement par recurrence $\forall n \in \mathbb{N} : T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{2^{n+1}} . P . T^n . Q.$$

$$P \times T^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -6n+6 & -6n(n-1)+12n+4 \\ 6 & 12n & 12n(n-1) \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$P \times T^n \times Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -6(n-1) & -6n(n-1)+12n+4 \\ 6 & 12n & 12n(n-1) \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12(n-1) & -6-6(n+1) & 12(n-1)-18n(n-1)+36n+12 \\ 24n & 12+12n & -24n+36n(n-1) \\ 0 & 0 & 12. \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(n-1) & -1-n-1 & 2n\cancel{-2}-3n^2+3n+6n\cancel{+2} \\ 4n & 2n+2 & -4n+6n(n-1) \\ 0 & 0 & 2. \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(n-1) & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} -2(n-1) & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math-info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 8

Numéro de table

Commencez à composer dès la première page...

$$A^n \times X_0 = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2^{n+1}} \left(-4n+4 - 2n - 6n^2+22 \right.}$$

$$A^n \times X_0 = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -4n+4-10n-3n^2+11n \\ 8n+20n+20-10n+6n^2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -3n^2-3n+4 \\ 18n+20+6n^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n . C = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -4n+4-8n-6n^2+22n \\ 8n+16n+16-20n+12n^2 \\ 0+0+4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} 10n-6n^2+4 \\ 4n+16+12n^2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

On a d'après la question 4 : $X_n - C = A^n (X_0 - C)$.

Donc $X_n = A^n X_0 - A^n C + C$.

$$X_n = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} -3n^2 - 3n + 4 \\ 18n + 20 + 6n^2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 10n - 6n^2 + 4 \\ 4n + 16 - 12n^2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(-3n^2 - 3n + 4 - 10n + 6n^2 - 4\right) + 2. \\ S_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(18n + 20 - 4n - 16 + 12n^2 - 6n^2\right) + 8. \\ T_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\cancel{8}\right) + 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(3n^2 - 13n\right). \\ S_n = 8 + \frac{1}{2^n}\left(-3n^2 + 7n + 2\right) + 8 \\ T_n = 2 - \frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

8 a) $\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \ln(n^2) - \ln(2^n)$.

$$= 2\ln(n) - n\ln(2)$$

$$= \frac{2\ln(n)\, n}{n} - \frac{n^2 \ln(2)}{n}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln\left(\frac{n^2}{2n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{\ln\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right)}$$

or $\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{2(\ln(n))}{n} - \ln(2)\right) = -\infty$

car $\lim_{n \to +\infty} \frac{2\ln(n)}{n} = 0$ par croissance compareé.

Donc $\lim_{n \to +\infty} e^{\ln(n^2/2n)} = 0$. $\boxed{\text{donc } \lim_{n \to +\infty} n^2/2n = 0}$

et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n} = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(n/2n)}$.

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} e^{\ln(n/2n)} = +\infty$
(par croissance comparée)

$\boxed{\text{donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n} = +\infty}$.

b) $\lim_{n \to +\infty} rn = \lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{3n^2}{2n+1} - \frac{13n}{2n+1}$

$$= \lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n}{2n+1} = -\infty.$$

$\lim_{n \to +\infty} sn = \lim_{n \to +\infty} 8 - \frac{n^2}{2n} + \frac{7n}{2n} + \frac{2}{2^n}$
$\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$

$= 8.$

car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

$\lim_{n \to +\infty} tn = \lim_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{2^n} = 2.$

Ex 1:

Partie A

1) a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{1+e^x} = 4.$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

b) donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$.

2) a. On a $x \mapsto 1+e^x$ est une fonction exponentielle donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

donc $x \mapsto \frac{4}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{4}{(1+e^x)} \iff f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}.$

on sait que $(1+e^x)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

et $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

donc $-4e^x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	
f	4	$\searrow$ 2 $\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

$f(0) = 2$

c) On a f est décroissante et 4 c'est le maximum de la fonction. ~~hors l'asymptote~~

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 8

Numéro de table 4

Commencez à composer dès la première page.

or f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$.
Donc la courbe f se trouve en dessous de l'asymptote

d) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\boxed{T: y = -x + 2.}$ car $f'(0) = \frac{-4}{4} = -1$

3) a. on a $f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$. $f''(x) = \frac{-4e^x(1+e^x)^2 + 8e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

~~donc $f''(x) = \frac{-4e^x + 2e^x(1+e^x).4e^x}{(1+e^x)^4}$~~

$f''(x) = \frac{4e^x(1+e^x)(-1-e^x+2e^x)}{(1+e^x)^4}$

~~$= \frac{-4e^x + 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$.~~

$f''(x) = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

~~$= 4e^x($~~

b) on a $f''(x) = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ et on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$:
$4e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de (e^x-1).

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

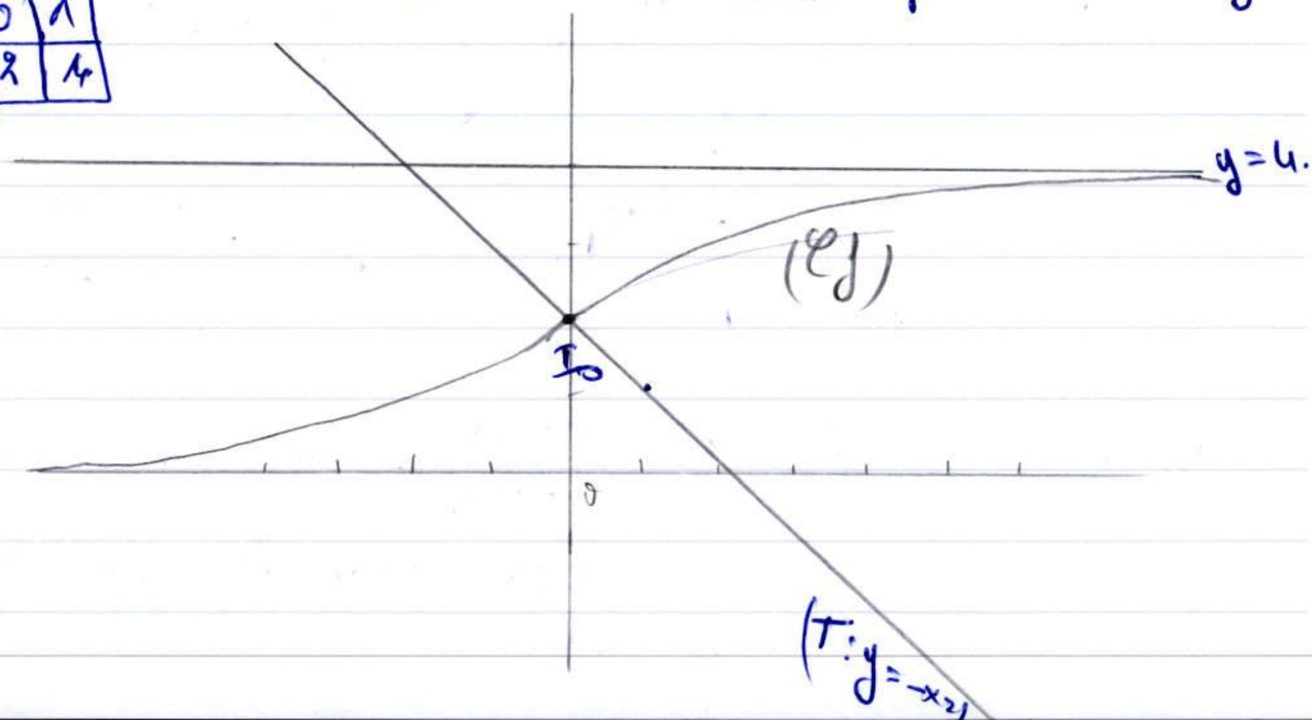
or (e^x-1) s'annulle et change de signe sur $\mathbb{R}$.
donc f'' admet un point d'inflexion tel que elle est convexe la où (e^x-1) est positive et concave là où (e^x-1) est négative.

c) au point d'abscisse 0 : la tangente est égale à 2.
et on a d'après la question précedente (e^x-1) s'annule en point d'inflexion $I(0,2)$.

donc sur $]-\infty;0[$ $e^x-1<0$ donc f est concave et en dessous de la tengeante. $y=2$
sur $[0;+\infty[$: $e^x-1\geq 0$ donc f est convexe et au dessus de la tengeante $y=2$

Representation graphique de la courbe f.

x	0	1
y	2	4



$\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $4 \times \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 4 \frac{1/e^x}{1+\frac{1}{e^x}}$

$= 4 \frac{1/e^x}{\frac{e^x+1}{e^x}}$

$= 4 \cdot \frac{1}{\cancel{e^x}} \cdot \frac{\cancel{e^x}}{e^x+1}$

$= \frac{4}{e^x+1}$

$= f(x)$

b) la primitive est $4 \ln(1+e^{-x})$ et qui s'annulle en 0.

Partie 2:

6a On a $y \mapsto \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)$ est une fonction logarithme continue et derivable sur $D_g =]0,4])$.

donc d'après le theoreme de bijection g admet une bijection de $g(]0,4])$ sur $]0,4]$.

tq elle admet une unique solution.

b) $g(]0,4] = [f(0), f(4)] =]-1, 0]$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 8

Numéro de table 1

Partie 3 :

soit $N \in \mathbb{N}$.

a) $\int_0^N f(t).dt = 4\int_0^N \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}.dt$

$= -4 \int_0^N \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}.dt$

$= -4 \left[\cancel{\frac{1}{1+e}} \ln(1+e^{-t}) \right]_0^N$.

$= -4\ln(1+e^{-N}) + 4\ln(1+e^0)$

$= 4\ln(1+e^{-N}) + 4\ln(2)$.

$\lim_{N \to +\infty} 4(\ln(1+e^{-N})) = 0$ car $\lim_{n \to -\infty} e^n = 0$.

donc $\lim_{N \to +\infty} \int_0^N f(t).dt = 4\ln(2)$ converge.

alors $\int_0^{+\infty} f(t).dt$ converge.

tq : $\int_0^{+\infty} f(t).dt = 4\ln(2)$.

b f est une densité ssi $\int_0^{+\infty} f(t).dt = 1$.
donc il faut $\frac{1}{4\ln 2} h(t)$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

c) $U \hookrightarrow U]0,1[$.

donc elle admet une densité.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{1-0} & \text{si } t \in]0,1[. \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et la fonction de Repartition:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0. \\ t. & \text{si } t \in]0,1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

d)

$\forall x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} x > 0 &\iff -x < 0 \\ &\iff e^{-x} < 1. \\ &\iff 1+e^{-x} < 2. \\ &\iff \ln(1+e^{-x}) < \ln(2) \\ &\iff \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} < 1. \\ &\iff 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} > 0. \end{aligned}$$

donc $\forall x \in [0;+\infty[: 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln 2} \in [0,1]$.

e) $\forall x \in [0;+\infty[$:

$$P([X \leq x]) = P\left(-\ln\left(e^{(1-U)\ln 2}-1\right) \leq x\right).$$

$$= P\left(\ln\left(e^{(1-U)\ln 2}-1\right) \geq -x\right)$$

$$\cancel{= P\left(\frac{-\ln\left(e^{(1-U)\ln 2}\right)}{\ln(1)} \leq x\right)}$$

$$\cancel{= P\left(-(1-U)\ln 2 \leq x\right)}$$

$$= P\left(e^{\ln\left(e^{(1-U)\ln 2}-1\right)} \geq e^{-x}\right).$$

$$= P\left(e^{(1-U)\ln 2}-1 \geq e^{-x}\right)$$

$$= P\left(e^{(1-U)\ln 2} \geq e^{-x}+1\right)$$

$$= P\left((1-U)\ln 2 \geq \ln(e^{-x}+1)\right).$$

$$= P\left(\ln(2) - U\ln 2 \geq \ln(e^{-x}+1)\right)$$

$$= P\left(-U\ln 2 \geq \ln(e^{x}+1) - \ln(2)\right).$$

$$= P\left(U \leq \frac{-\ln(e^{x}+1)}{\ln 2} + 1\right).$$

$$= G\left(1 - \frac{\ln(e^{x}+1)}{\ln 2}\right).$$

or on sai que $1 - \dfrac{\ln(e^{x}+1)}{\ln 2} \in [0,1[$.

donc $P([X \leq x]) = 1 - \dfrac{\ln(1+e^{x})}{\ln 2}$.

f)

Import numpy as np.

g) Def: simul X.

```
return: 1-(np.log(1+np.exp(-x))/np.log(3))
```

Ex3:

Partie 1:

1/ Raisonnons par recurrence et mq $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n + c_n = 1$.

+ Initialisation:

pour $n=0$: $a_0 + b_0 + c_0 = \frac{3}{5} + 0 + \frac{5}{8} = 1$ vraie

donc la proposition est initialisée.

+ Heridité

soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que $a_n + b_n + c_n = 1$.

et montrons que $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$

on a $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{11} a_n + \frac{3}{11} b_n + \frac{3}{11} c_n + \frac{4}{11} a_n + \frac{3}{11} b_n + \frac{4}{11} c_n + \frac{5}{11} a_n + \frac{5}{11} b_n + \frac{4}{11} c_n$.

$= \frac{1}{11}(2a_n + 3b_n + 3c_n + 4a_n + 3b_n + 4c_n + 5a_n + 5b_n + 5c_n)$

$= \frac{1}{11}(11a_n + 11b_n + 11c_n)$

$= 1(a_n + b_n + c_n)$

$= 1$.

D'après le principe de recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n + c_n = 1$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 8

Numéro de table 4

Commencez à composer dès la première page...

1- $x_{n+1} - x_n = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} - a_n - b_n - c_n$
$> 0.$

car $\forall n \in \mathbb{N} : a_n + b_n + c_n = 1.$

donc $x_{n+1} - x_n \geq 0$ alors
la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3.a $y_{n+1} = -a_{n+1} + 2b_{n+1} - c_{n+1}.$

$= \frac{1}{11} a_n - \frac{2}{11} b_n + \frac{1}{11} c_n.$

$= -\frac{1}{11} (-a_n + 2b_n - c_n)$

$= \frac{-1}{11} y_n.$

donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géo de raison $q = \frac{-1}{11}.$

4a $z_{n+1} = \frac{5}{11} a_n + \frac{5}{11} b_n - \frac{7}{11} c_n.$

$= \frac{-1}{11} (-5a_n - 5b_n + 7c_n).$

$= \frac{-1}{11} (z_n).$

donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géo de raison

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

$-\frac{1}{11}$.

4b) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite géo de raison $\frac{-1}{11}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $z_n = z_0 \cdot q^n$
$= \frac{20}{8} \cdot \left(\frac{-1}{11}\right)^n$.

5 a)

$$\begin{cases} x_n = a_n + b_n + c_n \\ y_n = -a_n + 7b_n - c_n \\ z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n \end{cases} \iff$$

Partie 2:

7: $g_1 = \frac{3}{8}$ car il y'a un total de 8 poissons dont 3 sont des goujons

$p_1 = 0$ car il est impossible de pecher un perche puisqu'elles se refugient au fond du seau.

$t_1 = \frac{5}{8}$ car il y'a 5 truites parmis 8 poissons.

8a) $P_{G_1}(G_2) = \frac{2}{7}$ et $P_{T_1}(G_2) = \frac{3}{7}$.

car les poissons sont relachées.

b) on a g_1 et t_1 un systeme complet d'event d'après la formule de proba totales.

$g_2 = P(G_1 \cap G_2) \cup P(T_1 \cap G_2)$.

$= P(G_1) \cdot P_{G_1}(G_2) + P(T_1) \cdot P_{T_1}(G_2)$ car les events ne sont pas independants.

$= \frac{2}{7} g_1 + \frac{3}{7} t_1$.

$= \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8}$.

$= \frac{6+15}{56}$

$= \frac{21}{56}$.

9 $P_{T_1}(G_2) = \frac{P(G_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{15/56}{5/8} = \frac{15}{56} \times \frac{8}{5}$.

$= \frac{3}{7}$.

$$P_{G_n}(G_{n+1}) = \frac{}{8-(n+1)}$$

Partie 3 :

13. a) On a $U(\Omega) = [0, 1]$ on attrappe soit 1 poisson soit 0.

et $P(U=1) = \frac{1}{4}$ or $P(U=0) = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

Donc la variable aléatoire U suit une loi de Bernoulli.

b) on a V la variable aleatoire égale au nombre de succes (pecher un poissonts) lors de la repetition de n epreuves de Bernoulli independantes.

donc $V \hookrightarrow B(9, \frac{1}{4})$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Math - info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 8 / 8

Numéro de table 0 0 14

Commencez à composer dès la première page...

$P(Y=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^9$ c'ad que pour sortir bredouille le pecheur ne doit réaliser aucun succes lors des 9 epreuves.

14. a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$E(X) = V(X) = \lambda$.

b)

c) $P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$.

15. a. $[X+Y=15]$ est réalisé si et seulement si la somme des 2 valeurs obtenu par X et Y est egale à 15. (K et 15-k)
donc $P[X+Y=15] = \bigcup_{k=0}^{15} \left([X=k] \cap (Y=15-k) \right)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

b) on a $\bigcup_{k=0}^{15} \left((X=k) \cap (Y=15-k) \right)$

$\sum_{k=0}^{15} P((X=k) \cap (Y=15-k)$ car les evé. sont incompatibles.

$\sum_{k=0}^{15} P(X=k) \times P(Y=15-k)$.

$\cancel{\sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15-k} \cdot \frac{4}{15!}}$

$\sum_{k=0}^{15} \frac{\lambda^k}{15!} \cdot e^{-\lambda} \frac{4}{15!} e^{-4}$